



# Diep in de problemen Hoog in de bomen

---

Panamaconferentie - Woudschoten

Rogier Bos

Universitair Docent Wiskundeonderwijs

Freudenthal Instituut

Universiteit Utrecht



**Utrecht University**

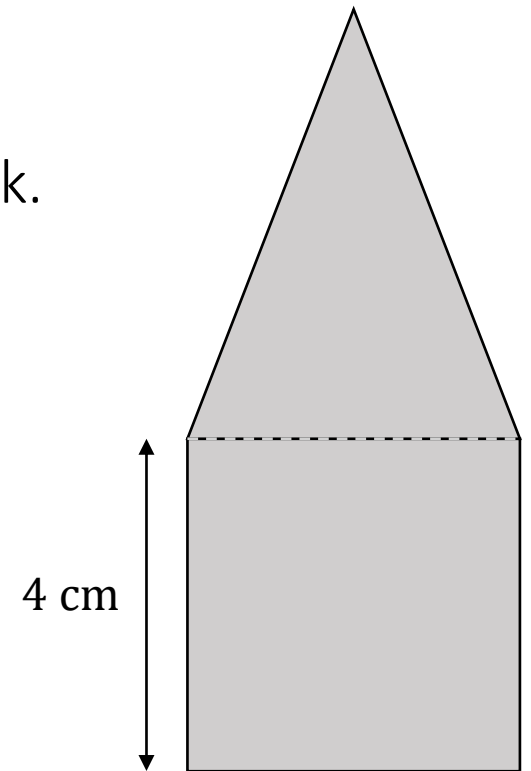
# Planning

- Introductie probleemaanpak
- Compressie
- Heuristieken & heuristiekbomen
- Practicum: maak je eigen heuristiekboom
- Stroomdiagram

# Het belang van probleemoplossen in de klas

**Vraag:** waarom vinden we het belangrijk leerlingen niet uitsluitend routineopgaven voor te schotelen?

**Probleem:** Een vierkant en een driehoek vormen samen een vijfhoek.  
Het vierkant en de driehoek hebben dezelfde omtrek.  
Hoeveel cm is de omtrek van de vijfhoek?



Het probleem met probleemaanpak in de klas:  
Hoe pak je dat aan?



# Probleem: probleemaanpak in de klas?

## Hoe pak je dat aan?

Organisatie van  
wiskundige kennis

Bronnen/voorkennis

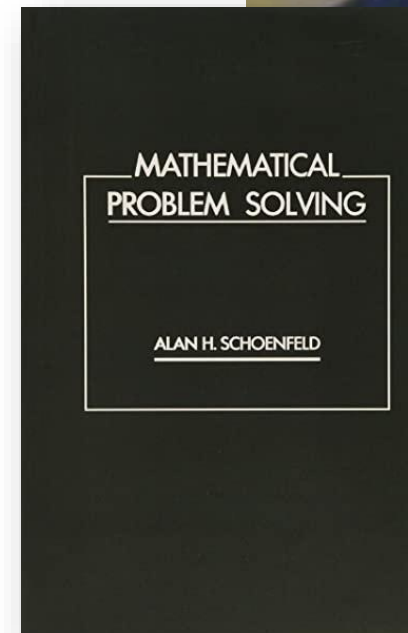
Heuristieken

Metacognitie (control)

Affect (belief)



Alan H. Schoenfeld



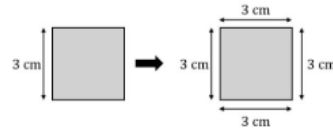
# Ondersteuning met heuristiekbomen



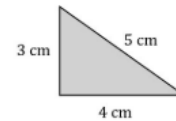
## Oriënteren

1. Vierkanten: wat is een belangrijke eigenschap van vierkanten?
2. Omtrek: Hoe bereken je de omtrek van een driehoek of vierkant?

Van een vierkant zijn alle zijden even lang. Bijvoorbeeld: is één zijde 3 cm lang, dan zijn alle zijden 3 cm lang.

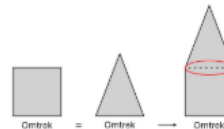


Je berekent de omtrek door de lengte van de zijden bij elkaar op te tellen. Bijvoorbeeld: de driehoek in het plaatje heeft een omtrek van  $3 + 4 + 5 = 12$  cm.



Als een figuur uit twee andere is samengesteld, dan is het vaak handig om eerst te rekenen aan de losse figuren.

De vijfhoek bestaat uit een vierkant en een driehoek. Die hebben dezelfde omtrek. Probeer deze omtrek uit te rekenen en daarmee de omtrek van de vijfhoek. Maar: pas op voor de zijde waar ze aan elkaar geplakt zijn!



## Plan maken en uitvoeren

Een plan om het probleem aan te pakken bestaat uit twee stappen

1. Bereken de omtrek van het vierkant en de driehoek
2. Bereken de omtrek van de vijfhoek

De zijden van het vierkant zijn allemaal even lang. Eén zijde is 4 cm, dus alle zijden zijn 4 cm. De omtrek is dus  $4 \times 4 = 16$  cm.

De driehoek heeft dus ook een omtrek van 16 cm.

Om de omtrek van de vijfhoek uit te rekenen kun je de omtrek van het vierkant en de omtrek van de driehoek bij elkaar optellen. Je hebt dan alleen twee keer de plakrand meegeteld, terwijl die dan niet meer meedoet in de omtrek van de vijfhoek.

De plakrand heeft een lengte van 4 cm, omdat die ook een zijde van het vierkant is. Doe dus:

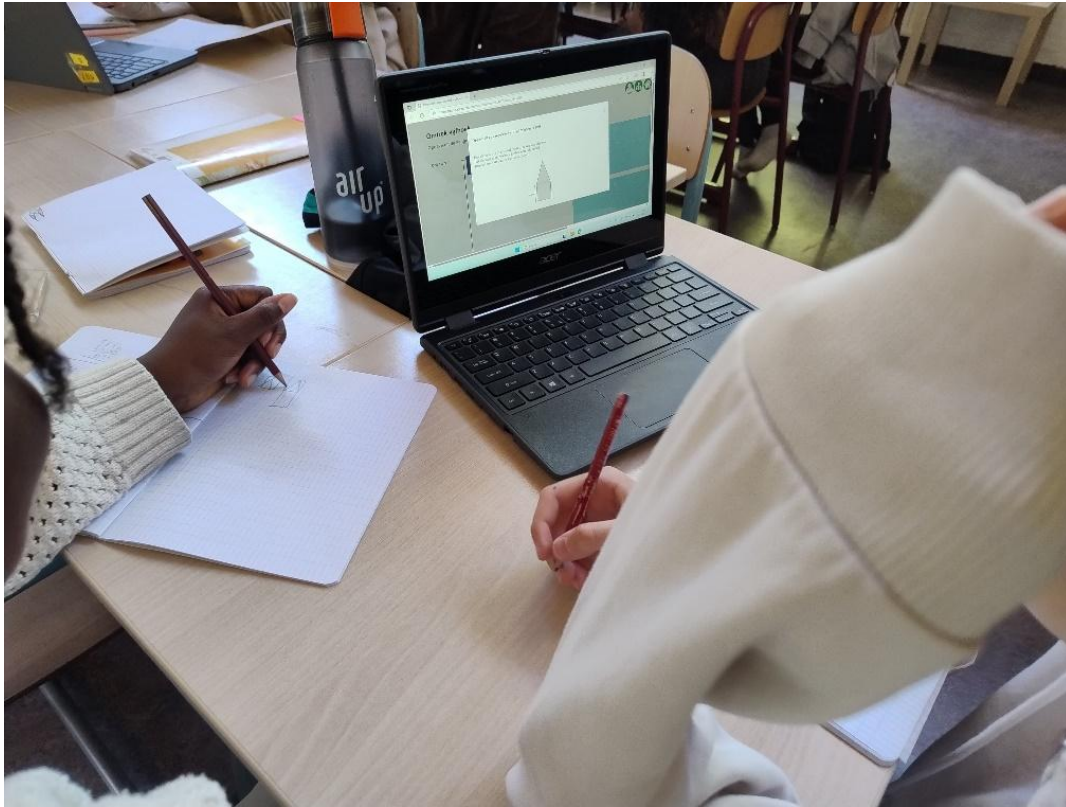
omtrek vierkant + omtrek driehoek - lengte plakrand - lengte plakrand

## Afronden

Lees het probleem nog eens goed. Kun je de alle zijden van de vijfhoek uitrekenen?

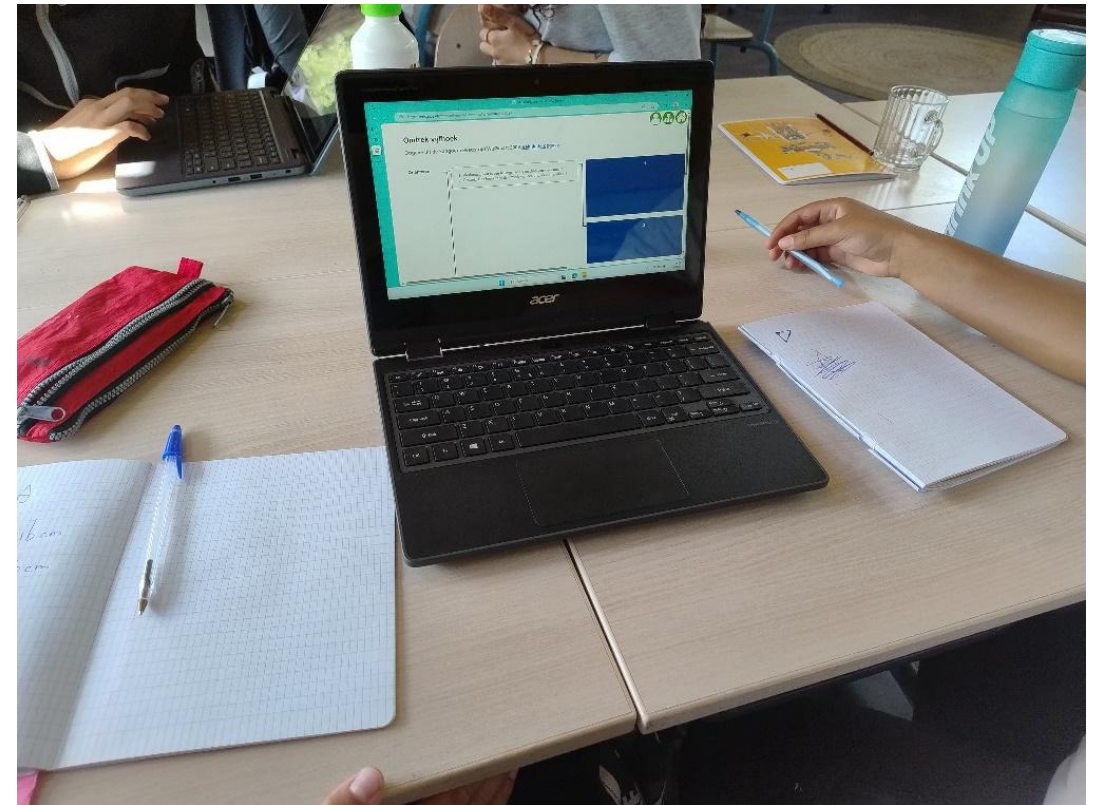
In het plaatje lijkt het alsof de lange rijden van "het dak" even lang zijn, maar dat staat niet in de opgave. Je kan dus niet berekenen hoe lang die zijden precies zijn.





## Eerste observaties

- Gemiddeld ln welwillend aan de slag
- Vlot antwoorden, maar... validatie...
- De leerlingen blijven volop vragen stellen  
... didactisch contract



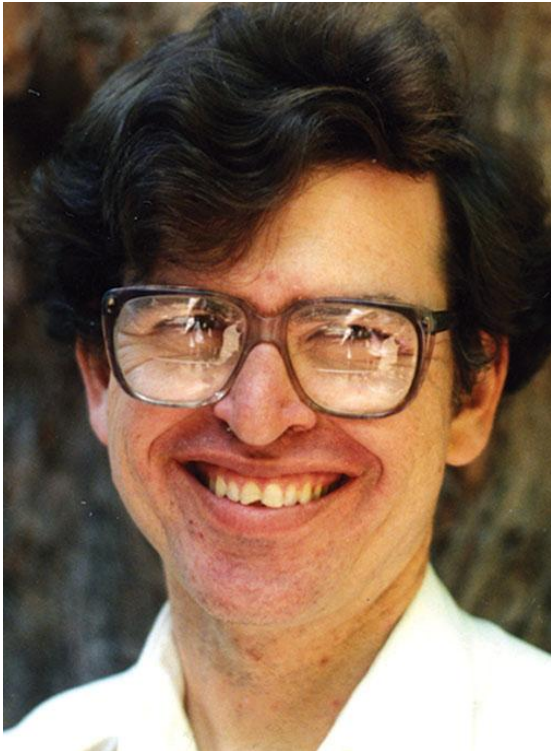
# Planning

- Introductie probleemaanpak
- **Compressie en decompressie**
- Heuristieken & heuristiekbomen
- Practicum: maak je eigen heuristiekboom
- Stroomdiagram



# Organisatie van wiskundige kennis

William Thurston



“you may struggle a long time, step by step, to work through some process or idea from several approaches. But once you really understand it and have the mental perspective to see it as a whole, there is often a tremendous mental compression. You can file it away, recall it quickly and completely when you need it, and use it as just one step in some other mental process. The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics.”

# Organisatie van wiskundige kennis: compressie

**Probleem:** Een vierkant en een driehoek vormen samen een vijfhoek. Het vierkant en de driehoek hebben dezelfde omtrek. Hoeveel cm is de omtrek van de vijfhoek?

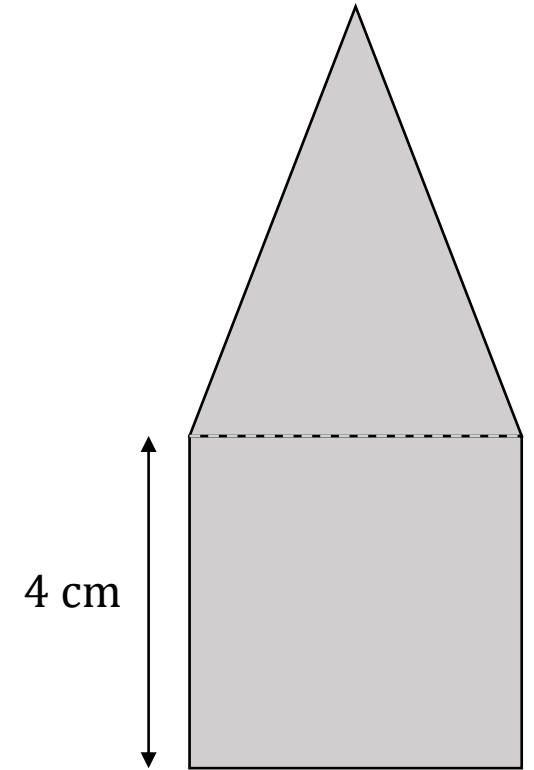
**Oplossing:**

Procedure

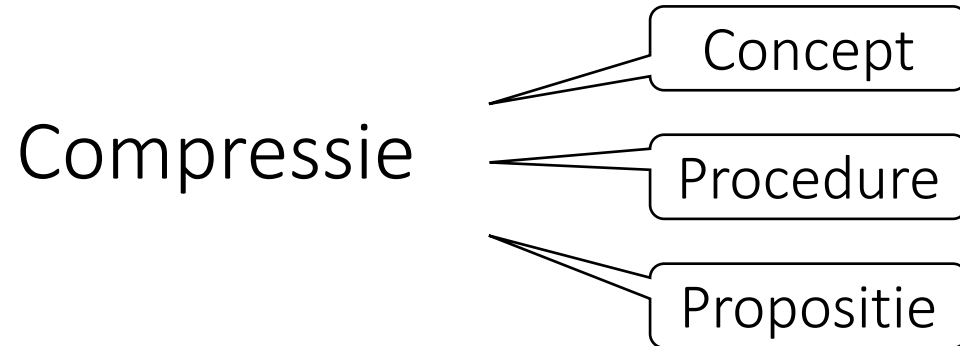
Concept

“Ik bereken de omtrek van het vierkant. De driehoek heeft dezelfde omtrek. Ze zijn aan elkaar geplakt, dus de hele omtrek is de omtrekken opgeteld min twee keer de plakrand.”

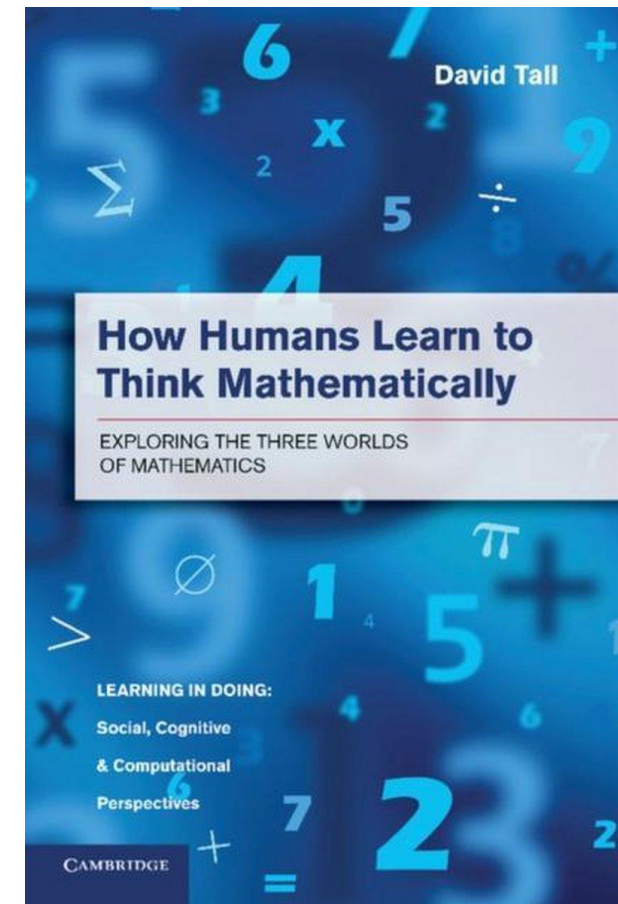
Propositie



# Organisatie van wiskundige kennis: compressie



- Zie het als een **geheel** -> waarachter veel ervaringen
- Aandacht verschuift naar **eigenschappen**, aanknopingspunten
- Details beschikbaar in lange-termijngeheugen



# Organisatie van wiskundige kennis: compressie

“Cijferend aftrekken”:

- Onder elkaar schrijven
- Meest rechter cijfer aftrekken
- Mogelijk: 1 “lenen”
- etc

versus

Aftrekken

- Geschikt om hoeveelheden of meetgegevens te vergelijken: bv. “hoeveel moet er nog bij”?
- Inverse relatie van optellen (in zekere zin) -> zie kerndoelen
- Niet commutatief (omdraaien mag niet)!
- Betekenis op de getallenlijn

Hoe bevorder je een goed georganiseerd geheugen?

# Planning

- Introductie probleemaanpak
- Compressie
- **Heuristieken & heuristiekbomen**
- Practicum: maak je eigen heuristiekboom
- Stroomdiagram



# Heuristiekbomen: decompressie langs takken

Heuristiek: deel het probleem op in deelproblemen

“Many heuristic labels subsume half a dozen strategies or more. Each of these more precisely defined strategies needs to be fully explicated before it can be used reliably by students”

Decompressie naar geval: “Als een figuur uit twee andere is samengesteld, dan is het vaak handig om eerst te rekenen aan de losse figuren”

Alan Schoenfeld



# Heuristiekbomen: decompressie langs takken

deel het  
probleem op in  
deelproblemen



Als een figuur uit twee  
andere is samengesteld,  
dan is het vaak handig  
om eerst te rekenen  
aan de losse figuren



De vijfhoek bestaat uit een  
vierkant en een driehoek.  
Die hebben dezelfde  
omtrek. Probeer deze  
omtrek uit te rekenen en  
daarmee de omtrek van de  
vijfhoek. Maar: pas op voor  
de zijde waar ze aan elkaar  
geplakt zijn!

Decompressie:  
toepassing op speciaal  
geval - meetkunde

Decompressie:  
toepassing op speciaal  
geval – omtrek vijfhoek

# Heuristiekbomen: decompressie langs takken

Een plan om het probleem aan te pakken bestaat uit twee stappen

1. Bereken de omtrek van het vierkant en de driehoek
2. Bereken de omtrek van de vijfhoek

Decompressie: details van een techniek

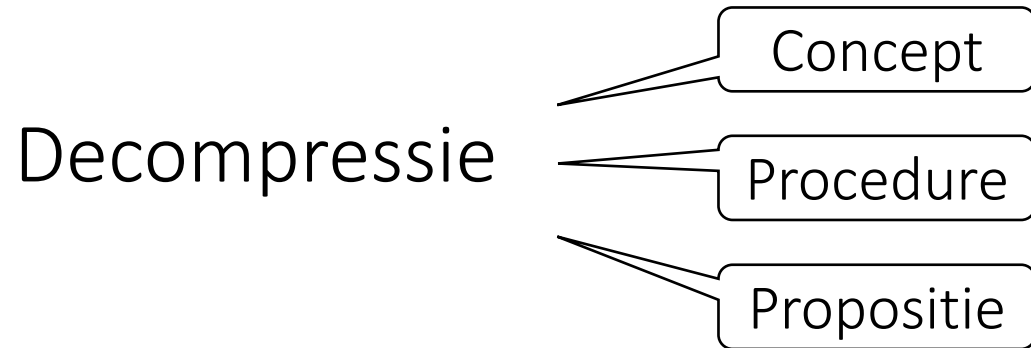
- Om de omtrek van de vijfhoek uit te rekenen kun je de omtrek van het vierkant en de omtrek van de driehoek bij elkaar optellen. Je hebt dan alleen twee keer de plakrand meegeteld, terwijl die dan niet meer meedoet in de omtrek van de vijfhoek.

Decompressie: toepassing op speciaal geval – vijfhoek in probleem

De plakrand heeft een lengte van 4 cm, omdat die ook een zijde van het vierkant is. Doe dus:

omtrek vierkant +  
omtrek driehoek -  
lengte plakrand -  
lengte plakrand

# Organisatie van hulp: decompressie langs takken



- (I) **Decompressie op geval:** Pas een procedure/propositie toe op steeds specifiekere geval. Illustreer een concept in een steeds specifiekere geval
- (II) **Decompressie op details:** Geef meer details/stappen van een procedure of propositie.

Noem aan welke eigenschappen je herkent dat een techniek/propositie relevant is!

# Ontwerpprincipes heuristiekbomen

- Compressie – decompressie dynamiek -> ordening
- Logisch redeneren -> ordening
- Probleemaanpak fases -> ordening
- Onafhankelijkheid van hulp in takken
- Rantsoenering -> een kaartje bevat niet meer hulp dan waarom gevraagd wordt.
- Navigatie -> de inhoud van kaartjes wordt duidelijk aangekondigd
- De meest linker kaartjes verwijzen niet naar het concrete probleem: kunnen hergebruikt worden
- Formuleer als mogelijk “Als [conditie], dan [aanwijzing]”
- Vertak in meerdere takken als mogelijk (geen lange sliert kaarten)

# Literatuur heuristiekbomen

Bos, R. (2017). Structuring hints and heuristics in intelligent tutoring systems. In G. Aldon & T. Jana (Eds.), *Proceedings of the 13th International Conference on Technology in Mathematics Teaching* (pp. 436–439). Retrieved from <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01632970>

Lemmink, R. (2019). Improving Help-Seeking Behavior for Online Mathematical Problem-Solving Lessons (Utrecht University). Retrieved from <https://dspace.library.uu.nl/handle/1874/382857>

Bos, R.D. & van den Bogaart, T. (2020). *Vastgelopen? Je kunt de boom in!*. Euclides, 96(2), 4-7.

Bos, R., & van den Bogaart, T. (2022). Heuristic Trees as a Digital Tool to Foster Compression and Decompression in Problem-Solving. *Digital Experiences in Mathematics Education* 8, 157–182.

Bos, R., & van den Bogaart, T. (2022). Teachers' design of heuristic trees. *Hiroshima Journal for Mathematics Education*, 15(1).

Zwennes, E. (2024). The fruit of heuristic trees. UU Master thesis. <https://studenttheses.uu.nl/handle/20.500.12932/47001>

Bos, R. (2025). Heuristic trees and their fruits. CERME14 conference proceedings (to appear)



# Ervaringen met heuristiekbomen en stroomdiagram

- Leerlingen scoren significant beter op een post-test met problemen dan leerlingen die alleen met een antwoordmodel werken (Zwennes, 2024)
- Studenten/leerlingen werken veel zelfstandiger (Bos & vd Bogaart, 2020a)
- Studenten/leerlingen kijken veel minder bij de antwoorden (Bos & vd Bogaart, 2020a)
- Studenten/leerlingen hebben beter inzicht in welke technieken van belang zijn voor het vak (Bos & vd Bogaart, 2020a)
- Bos & vd Bogaart (2020b): resultaten over de uitdagingen van hbomen ontwerpen

# Planning

- Introductie probleemaanpak
- Compressie
- Heuristieken & heuristiekbomen
- **Practicum: maak je eigen heuristiekboom**
- Stroomdiagram

# Ontwerpprincipes en protocol heuristiekbomen

- Compressie – decompressie dynamiek -> ordening
- Logisch redeneren -> ordening
- Probleemaanpak fases -> ordening
- Onafhankelijkheid van hulp in takken
- Rantsoenering -> een kaartje bevat niet meer hulp dan waarom gevraagd wordt.
- Navigatie -> de inhoud van kaartjes wordt duidelijk aangekondigd
- De meest linker kaartjes verwijzen niet naar het concrete probleem: kunnen hergebruikt worden
- Formuleer als mogelijk “Als [conditie], dan [aanwijzing]”
- Vertak in meerdere takken als mogelijk (geen lange sliert kaarten)

5 kinderen eten pruimen. Lauren eet 2 pruimen meer dan Sophie. Betty eet 3 pruimen minder dan Lauren. Claire eet 1 pruim meer dan Betty en 3 pruimen minder dan Alice. Welke 2 kinderen eten evenveel pruimen?

In een schaaktoernooi moet Sam 15 potjes spelen. Tot nu toe heeft Sam de helft van de potjes gewonnen, deel verloren en 2 spelletje zijn geëindigd in gelijkspel.

# Ontwerpprincipes en protocol heuristiekbomen

## Ontwerpprotocol voor Heuristiekbomen

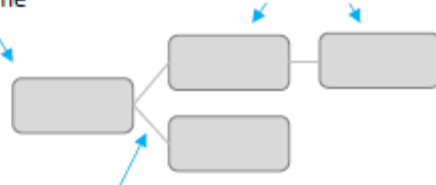
### Voorbereiding

1. Beschrijf de relevante **concepten**.
2. Beschrijf de algemene **technieken en proposities**.
3. Beschrijf de belangrijkste **inzichten** om het probleem op te lossen.
4. Beschrijf waar je verwacht dat de leerling op **vastloopt**.

### Implementatie

5. Maak takken als volgt (volgens **decompressie**):

- Het meest linker kaartje is zo geformuleerd dat het ook op andere problemen van toepassing kan zijn: algemene heuristieken, technieken, proposities, en concepten.



- Stappen naar rechts geven óf aan hoe het kaartje daarvoor wordt toegepast op het concrete probleem, óf geven meer details.

- Als er meer stappen, aspecten of details onderscheiden worden, dan komen er zijtakken.

Geef nergens meer informatie weg dan nodig. Zet in kaarten vragen die de verbinding maken naar de volgende kaart(en).

6. Formuleer voor elke tak een **vraag voor op de (eerste) gesloten kaart**.
  7. Maak de boom; zet daarbij de takken in een **logische volgorde** en wortel ze in drie fasen:
    - Oriëntatie
    - Plannen maken & uitvoeren
    - Afronding
- Hulp in verschillende takken is zo veel mogelijk onafhankelijk van elkaar.

### Validatie

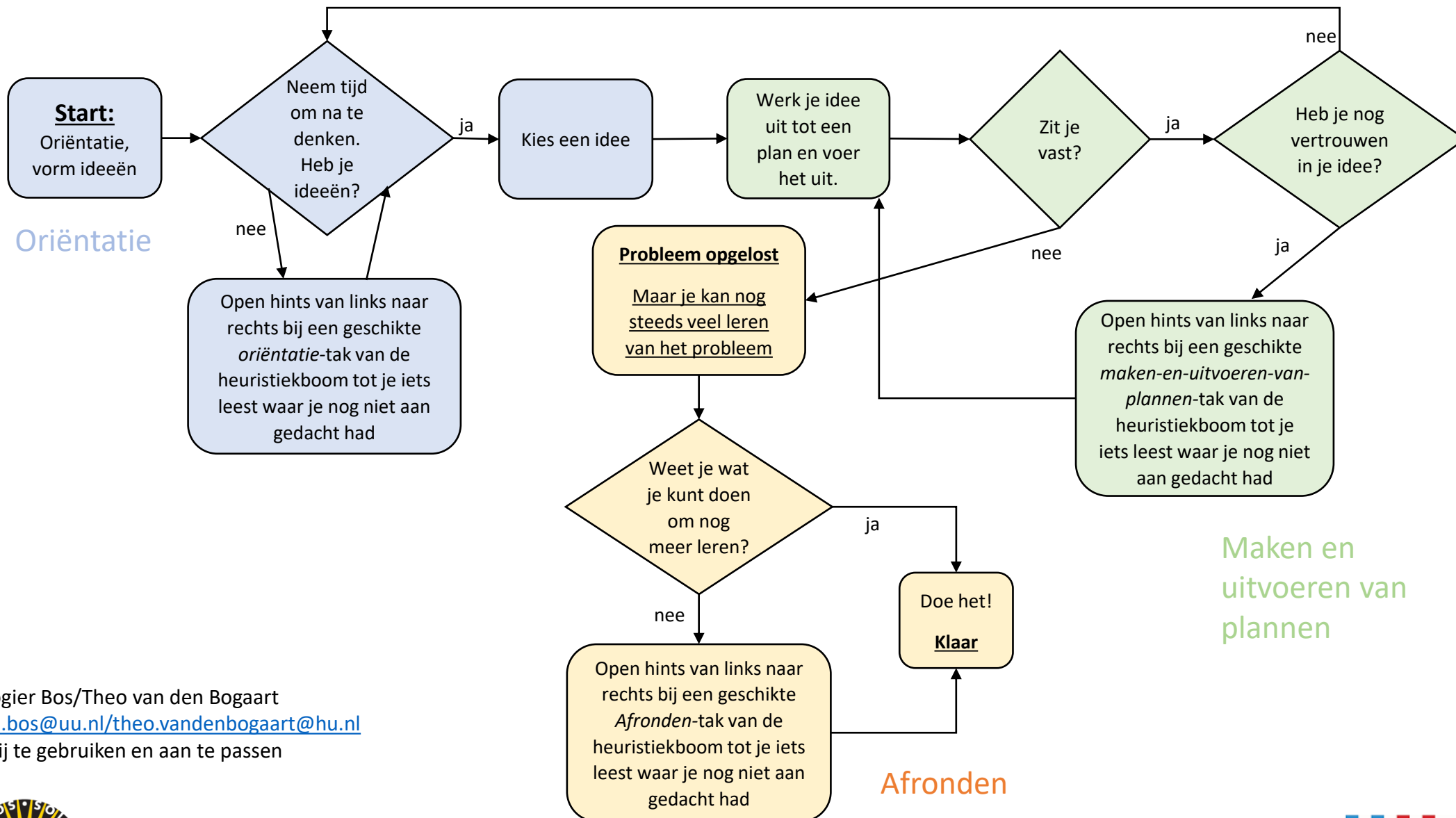
8. Ga nog eens na of je alle implementatiestappen hebt uitgevoerd.
9. Controleer of je formuleringen duidelijk zijn en van het juiste niveau.

5 kinderen eten pruimen. Lauren eet 2 pruimen meer dan Sophie. Betty eet 3 pruimen minder dan Lauren. Claire eet 1 pruim meer dan Betty en 3 pruimen minder dan Alice. Welke 2 kinderen eten evenveel pruimen?

In een schaaktoernooi moet Sam 15 potjes spelen. Tot nu toe heeft Sam de helft van de potjes gewonnen, deel verloren en 2 spelletje zijn geëindigd in gelijkspel.

# Planning

- Introductie probleemaanpak
- Compressie
- Heuristieken & heuristiekbomen
- Practicum: maak je eigen heuristiekboom
- **Stroomdiagram**



Rogier Bos/Theo van den Bogaart  
[r.d.bos@uu.nl](mailto:r.d.bos@uu.nl)/[theo.vandenbogaart@hu.nl](mailto:theo.vandenbogaart@hu.nl)  
 Vrij te gebruiken en aan te passen



Universiteit Utrecht



# Einde

- Contact: [r.d.bos@uu.nl](mailto:r.d.bos@uu.nl)
- Doe je iets in de klas met heuristiekbomen -> laat het weten!

