

Variatietheorie en Lesson Study in de lerarenopleiding wiskunde

*PhD-research door Dédé de Haan, d.dehaan@uu.nl
begeleidingsteam: prof. dr. Paul Drijvers, dr. Siebrich de Vries, dr. Gerrit Roorda*



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
 groningen

Opzet presentatie

- Achtergrond
- Variatietheorie
- Learning Study (Lesson Study met Variatietheorie)
- Resultaten
- Vragen



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
 groningen



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University

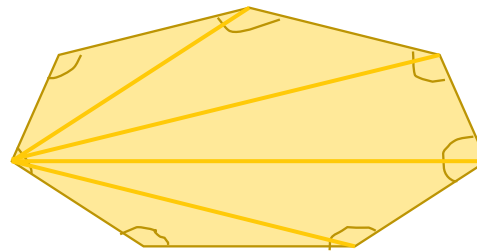


rijksuniversiteit
groningen

Instrumenteel en relationeel begrijpen (Skemp, 1978)

Instrumenteel:

De formule voor de som van de hoeken in een n -hoek is $(n - 2) \cdot 180^\circ$



7-hoek, dus de som van de hoeken is gelijk aan

$$(7 - 2) \cdot 180^\circ = 5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$$

”Rules without reasons”, stappenplan volgen, procedures uitvoeren, zonder nadenken

Relationeel:

Een driehoek heeft altijd 180° , ik kan de 7-hoek in 5 driehoeken opdelen, dus in totaal heeft de 7-hoek $5 \cdot 180^\circ = 900^\circ$

Verbinden, relatie leggen, met andere kennis.

1) zelf relationeel begrip ontwikkelen

$$(x - 2)^2 + 4 = 0$$

$$(x^2 - 4x + 4) + 4 = 0$$

$$x^2 - 4x + 8 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 32}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-16}}{2}$$

INSTRUMENTEEL

$$(x - 2)^2 + 4 = 0$$

$$(x - 2)^2 = -4$$

$$(x - 2)^2 + 4 = 0$$

zicht op structuur, symbol sense
RELATIONEEL

Geen reële oplossingen!



2) zicht op hoe leerlingen wiskunde begrijpen

- waarom denken leerlingen dat -1000 groter is dan $-0,01$?
- waarom denken leerlingen dat $-3 - 5 = 8$?
- waarom vinden leerlingen optellen gemakkelijker dan aftrekken?
- waarom denken leerlingen dat het tekenen van een driehoek met zijden 1, 5 en 7 geen probleem is? (totdat ze hem gaan tekenen...)



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
 groningen

3) lesgeven gericht op relationeel begrip

- in welke volgorde bied ik de stof aan?
- wat bied ik aan, hoe, en waarom?
- wat doe ik anders dan de methode, hoe, en waarom?
- wat is mijn rol?
- wat vertel ik – wat laat ik de leerlingen ontdekken – welke vragen stel ik?



Vakdidactische theorie
in de opleiding

Toepassing in de
schoolpraktijk



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



university of
applied sciences



rijksuniversiteit
 groningen

WALS 2018

World Association of Lesson Studies
International Conference 2018

W10

Abstract ID: H0113

Enhancing learning and teaching with learning study in Hong Kong

Yuefeng Ellen Zhang, *The Education University of Hong Kong, China*

This workshop aims to introduce Learning Study, the main Lesson Study model adopted for pre-service and in-service teacher education in Hong Kong since 2000. Learning Study has been proved to be an effective approach for enhancing student learning and promoting teacher professional development. Its uniqueness lies in the adoption of Variation Theory as its guiding principle, which teachers apply to plan, teach and review lessons collaboratively in Learning Study projects. Variation Theory argues that learning is always directed to a certain object of learning. Each object of learning bears many various aspects. Some of the aspects are more critical than the others and

Check-in

Nov., 14:00-20:00

Building Ground floor

Normal University

Normal University, Beijing, China

Nov. 23-26, 2018



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



university of
applied sciences



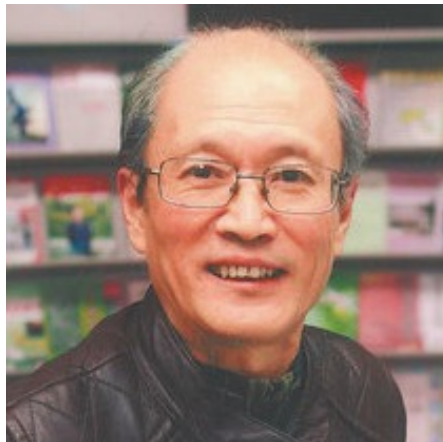
rijksuniversiteit
 groningen

Variatietheorie

(變易理論)



Ference Marton



Lingyuan Gu

¹ Gu, L., Huang, R., & Marton, F. (2004). Teaching with variation: A Chinese way of promoting effective Mathematics learning. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai & S. Li (Eds.), *How Chinese learn Mathematics: Perspectives from insiders*. Singapore: World Scientific Publishing.



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University

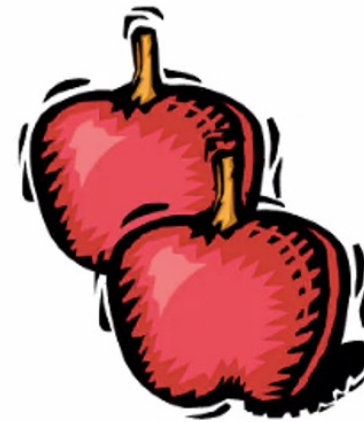


university of
applied sciences



rijksuniversiteit
 groningen

Wat betekent あかい ?



あかい

Betekent het fruit?

Betekent het appel?

Betekent het twee?

Betekent het rood?



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
 groningen

Wat betekent あかい ?

あかい



きいろ



みどり



invariant	variant
fruit	Soort fruit, aantal, kleur

Betekent het fruit?

Betekent het appel?

Betekent het twee?

Betekent het rood?

Wat betekent あかい ?

CONTRAST

“je kan alleen leren
wat het is als je ook
leert wat het *niet* is”

あかい



きいろ



みどり



invariant	variant
Appel, aantal	kleur

Betekent het appel?

Betekent het twee?

Betekent het rood?



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040

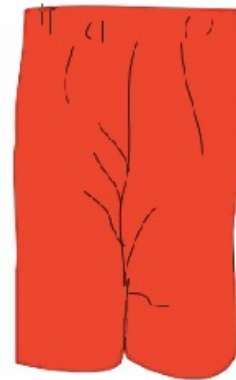


Utrecht University



rijksuniversiteit
groningen

Wat betekent あかい ?



あかい

GENERALISATIE

”als je geleerd hebt waar het om gaat (essentieel kenmerk), dan moet je ook leren waar het *niet* om gaat (niet-essentiële kenmerken)”

invariant	variant
kleur	Aantal, verschijningsvorm

Variation theory

‘the central idea of teaching with variation is to highlight the essential features of the concepts through varying the non-essential features’ (Gu, Huang & Marton, 2004)



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



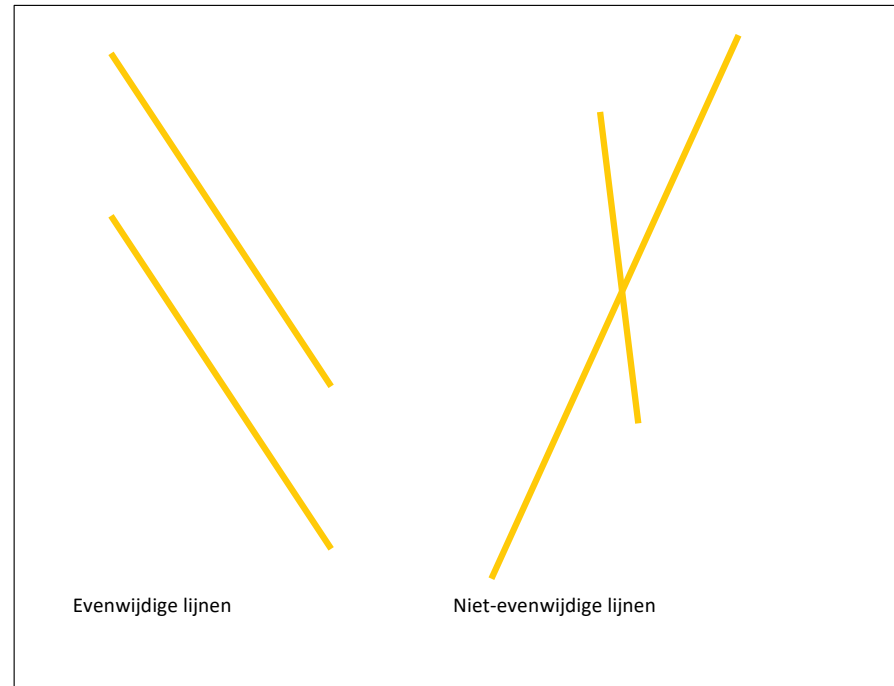
Utrecht University



rijksuniversiteit
 groningen

altijd een **Object of Learning**. Hier: **evenwijdigheid** van lijnen

Voorbeelden en
non-voorbeelden



'ondoordachte' voorbeelden en non-voorbeelden kunnen leiden tot...



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040

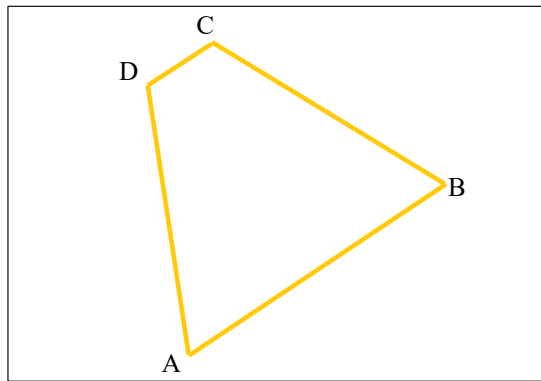


Utrecht University



rijksuniversiteit
groningen

...misconcepties!

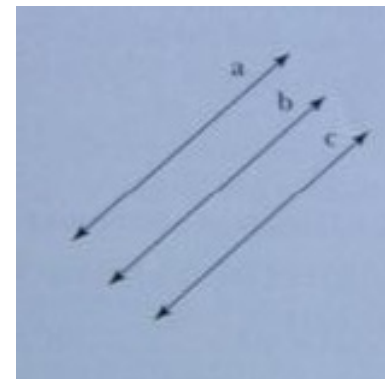


Welke lijnstukken zijn evenwijdig aan elkaar?

Leerling: AD en BC

kenmerkende eigenschap voor de leerling van evenwijdigheid:

de lijnen zijn even lang

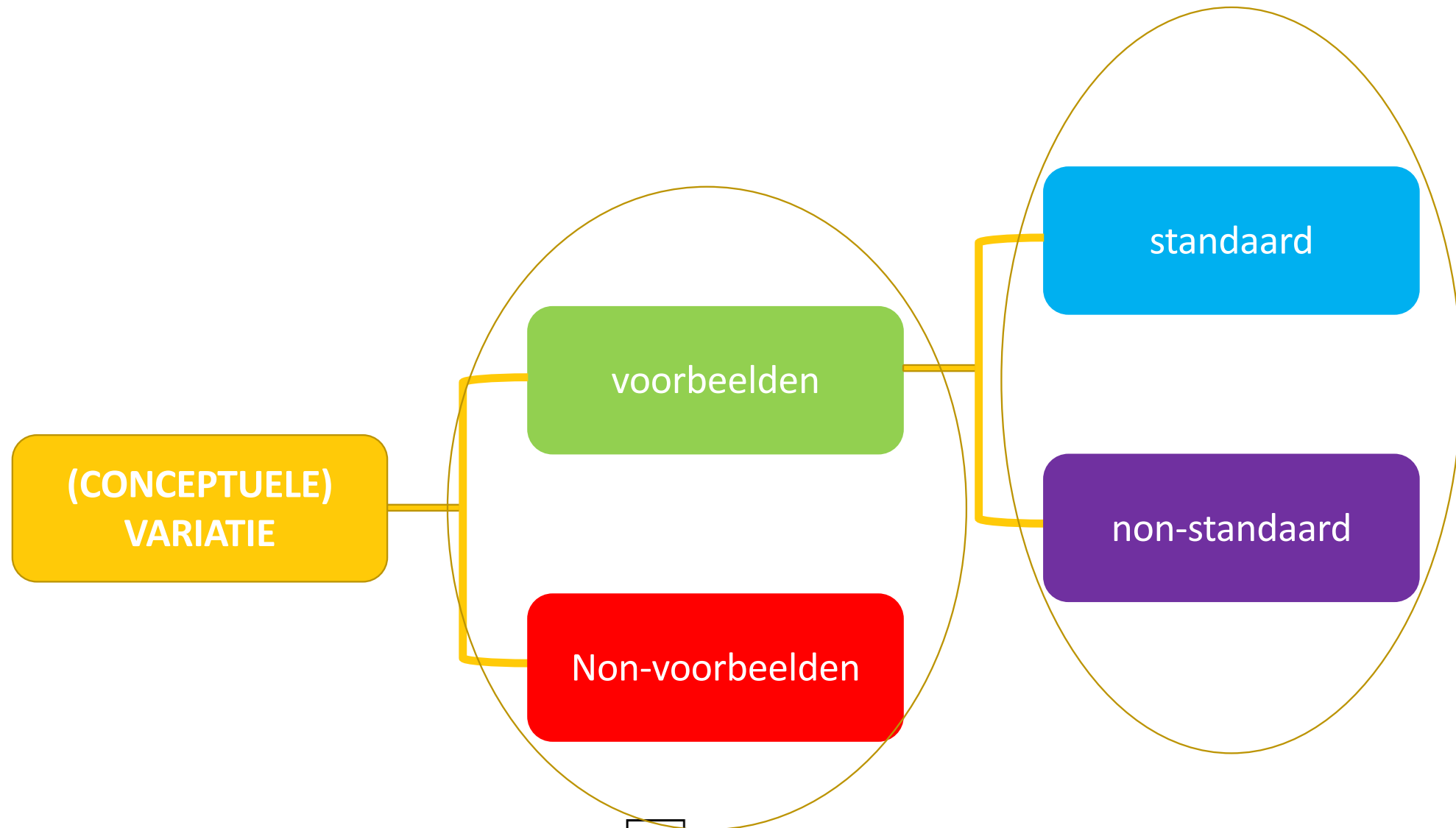


Is lijn a evenwijdig aan lijn c?

Leerling: nee, want b zit er tussen

kenmerkende eigenschap voor de leerling van evenwijdigheid:

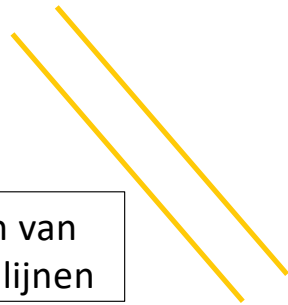
het aantal lijnen is 2



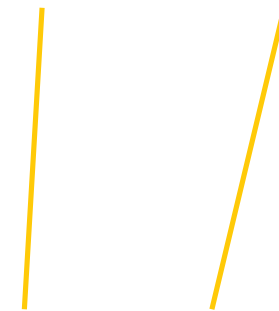
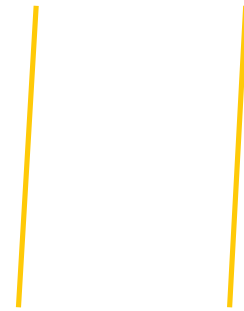
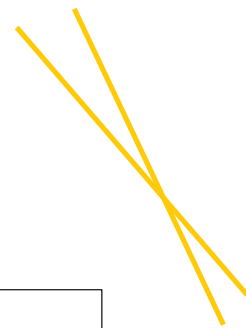
CONTRAST

Voorbeelden & non-voorbeelden

Voorbeelden van
evenwijdige lijnen



Voorbeelden van
niet-evenwijdige lijnen

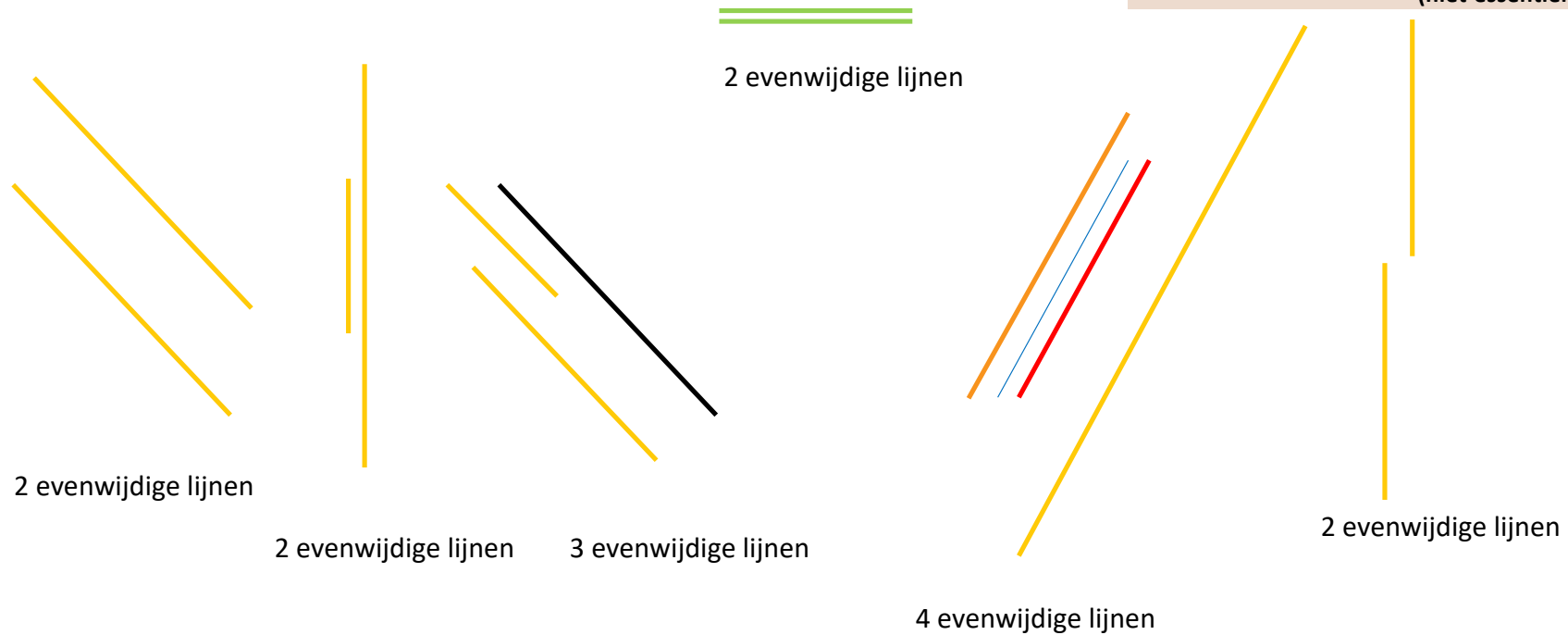


invariant	variant
kleur, richting, aantal, dikte, lengte	afstand tussen de lijnen (essentieel kenmerk)

GENERALISATIE

Standaard & non-standaard voorbeelden


invariant	variant
afstand tussen de lijnen (essentieel kenmerk)	kleur, richting, aantal, dikte, lengte (niet-essentiële kenmerken)



Variatietheorie bij onderwijzen en leren

"zo begrijp ik het Object of Learning (OL)"

onderscheiden van kenmerkende eigenschappen



nieuwe manieren om naar het OL te kijken



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



university of
applied sciences



rijksuniversiteit
 groningen

Sleutelvragen

- Wat weten leerlingen over het OL? Hoe begrijpen ze het? en hoe verschillen ze daar onderling in?
- Hoe begrijpen de leraren-in-opleiding het OL eigenlijk zelf?
- Wat **moeten** de leerlingen er eigenlijk van weten, van kunnen, van begrijpen? (Denk aan de kenmerkende eigenschappen!)
- Hoe helpt de leraar hen daarbij?



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



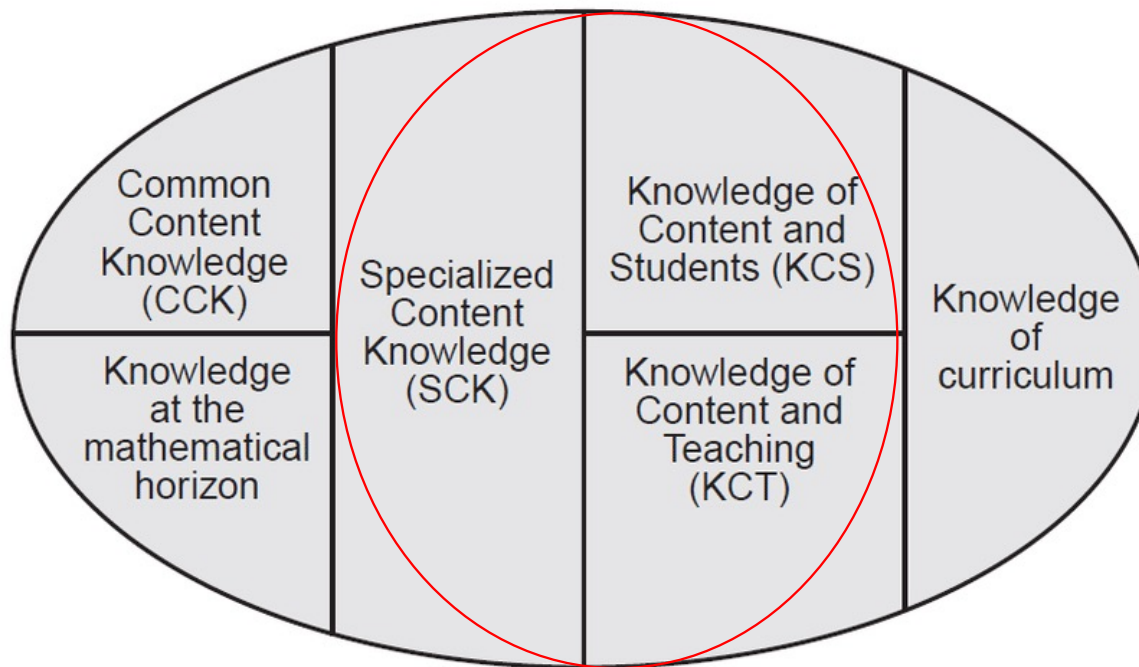
Utrecht University



rijksuniversiteit
 groningen

Mathematical knowledge for teaching

Subject Matter Knowledge | Pedagogical Content Knowledge



(Ball, Thames & Phelps, 2008)



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University

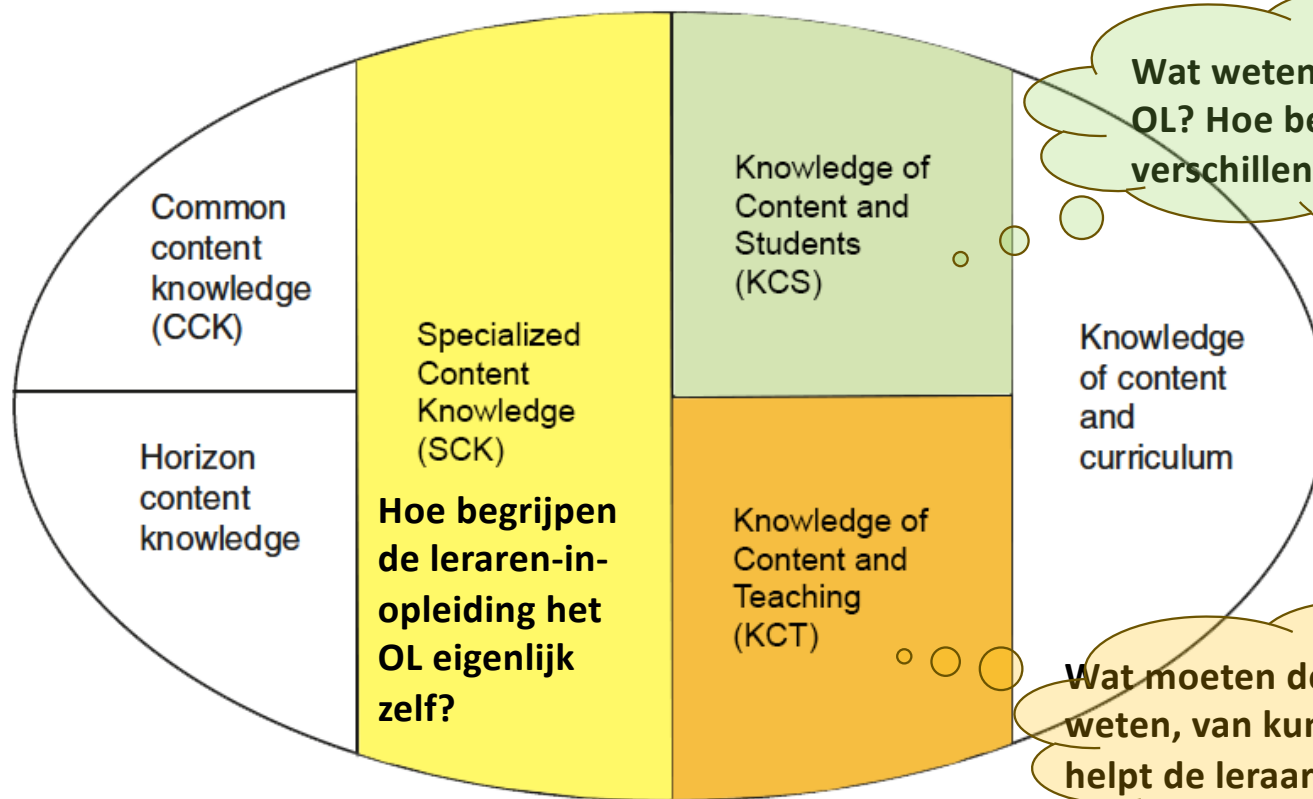


rijksuniversiteit
 groningen

Domains of Mathematical Knowledge for Teaching

SUBJECT MATTER KNOWLEDGE

PEDAGOGICAL CONTENT KNOWLEDGE



Cyclus van Learning Study

.... verbonden met model van Mathematical Knowledge for Teaching



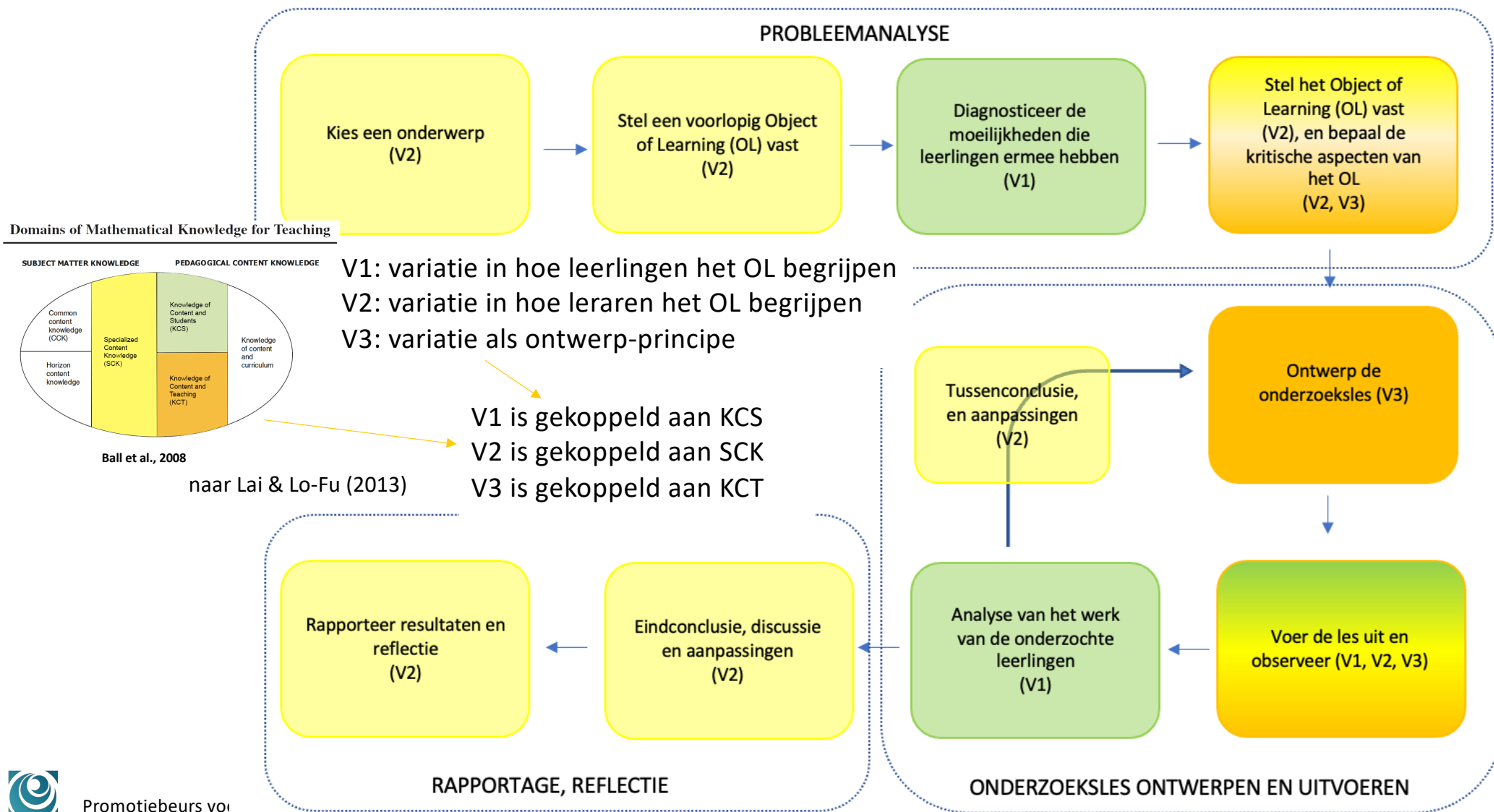
Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
groningen



Onderzoeksvraag ('overall')

Hoe kan een Learning Study de vakkennis en vakdidactische kennis van studentleraren wiskunde in de vorm van SCK, KCS en KCT bevorderen?

Onderzoeksvraag 1ste deelstudie (2021/2022)

Aan welke criteria moet de LgS voldoen opdat het de ontwikkeling van SCK, KCS en KCT bij studentleraren wiskunde bevordert?



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
 groningen

Context

- 4^{de} jaars voltijd-studenten, onderdeel van de studie: het 'praktijkonderzoek' dat ze moeten uitvoeren in de stageschool.
- NHLStenden Hogeschool heeft voor een *Didactisch Ontwerponderzoek* gekozen dat de studenten moeten uitvoeren; in de leeruitkomst ligt de focus op leerprocessen van leerlingen.
- 2021/2022: twee groepjes studenten voeren een Learning Study uit



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
 groningen

PROBLEEMANALYSE

Kies een
onderwerp

Stel een
voorlopig
Object of
Learning (OL)
vast

Diagnosticeer
de
moeilijkheden
die leerlingen
ermee
hebben

Stel het
Object of
Learning (OL)
vast, en
bepaal de
essentiële
kenmerken
van het OL

vorm een
groepje, op
basis van
klassen die
je lesgeeft

ga onderwerpen (uit de
algebra) bij langs en maak
samen een concept-map

maak een
voorlopige
keuze

ontwerp
een pre-
test

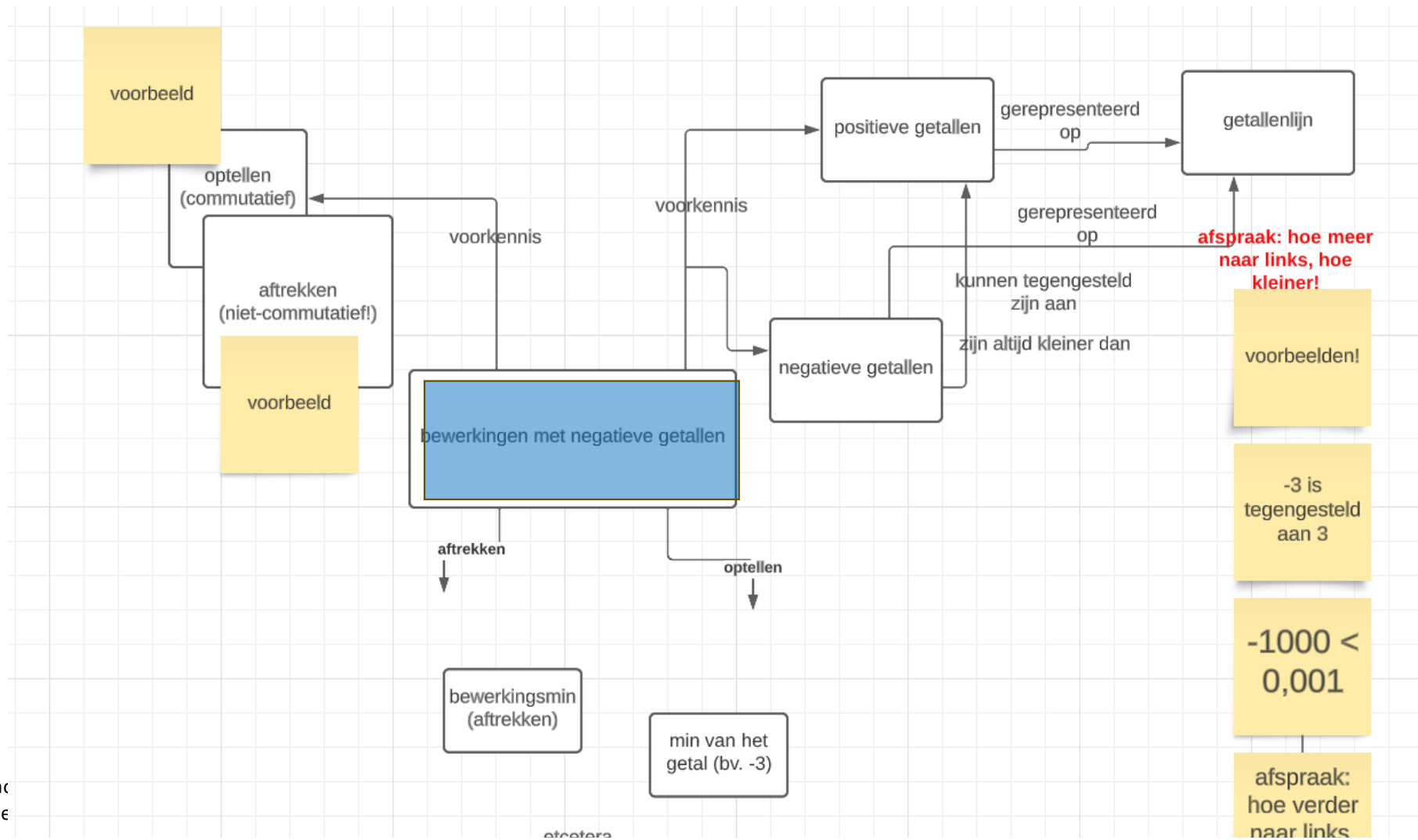
voer de
pre-test uit

analyseer
de pre-test

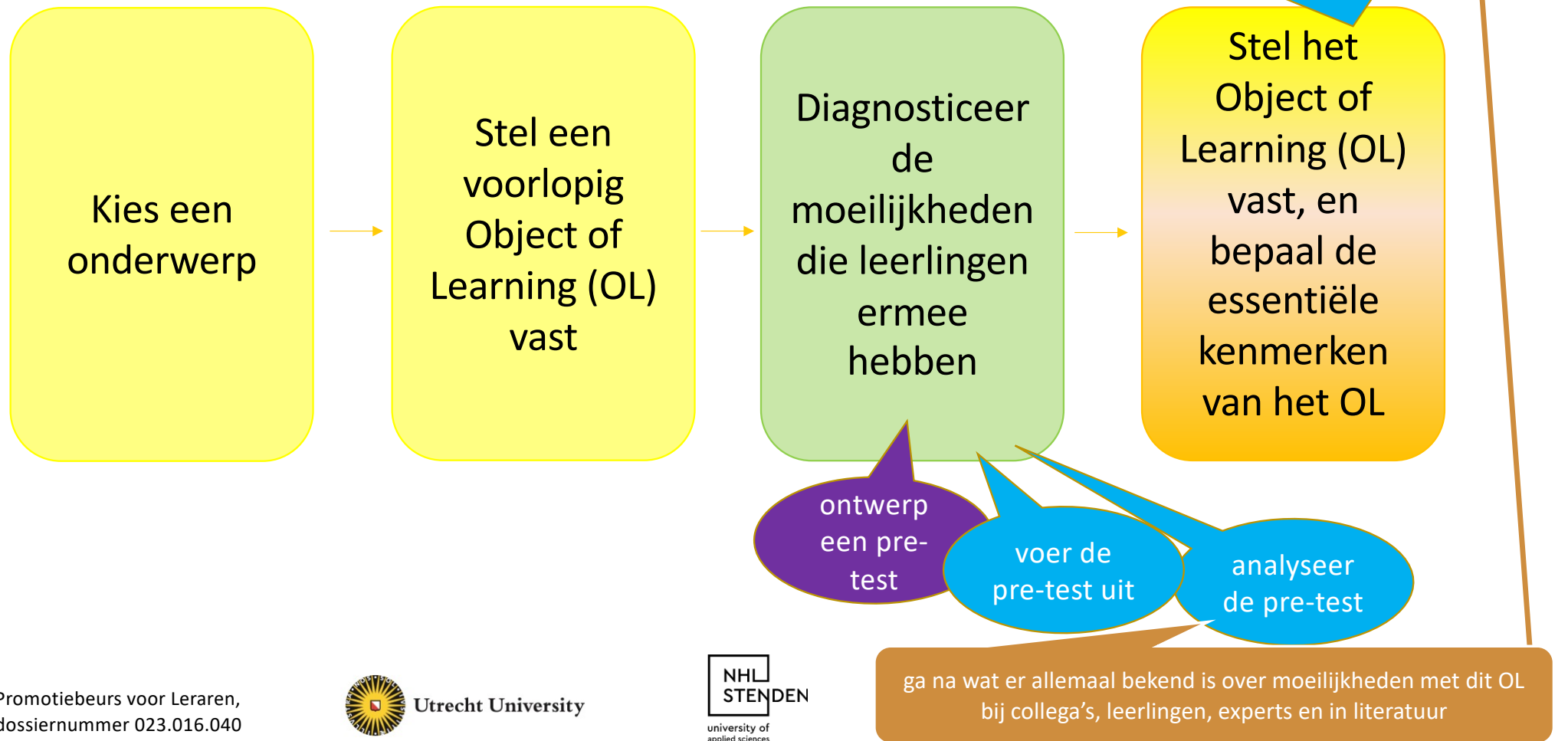
besluit op grond van de analyse
wat het OL wordt, ga na hoe het
in de schoolboeken staat,
bepaal de essentiële kenmerken

ga na wat er allemaal bekend is over moeilijkheden met dit OL
bij collega's, leerlingen, experts en in literatuur

deel van de concept-map



PROBLEEMANALYSE



Pre-test

studenten ontwerpen met behulp van hun concept-map een “pre-test” voor leerlingen waarin ze de leerlingen vragen laten beantwoorden over het OL,

met het doel om erachter te komen hoe en wat zij ervan begrijpen.

Dit kan door ze vragen op papier te laten beantwoorden, en/of ze hardop te laten denken.



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
groningen

voorlopig Object of Learning: het optellen en aftrekken van negatieve getallen...

de opbouw van het begrip “negatief getal”:

- 1) wat zijn negatieve getallen?
- 2) wat is tegengesteld?
- 3) wat is de volgorde? (getallenlijn!)

optellen en aftrekken:

- 1) wat is het? wat is het verschil tussen de min van het getal en de min van aftrekken?
- 2) wat is het verband ertussen? en het verschil? (commutativiteit!)

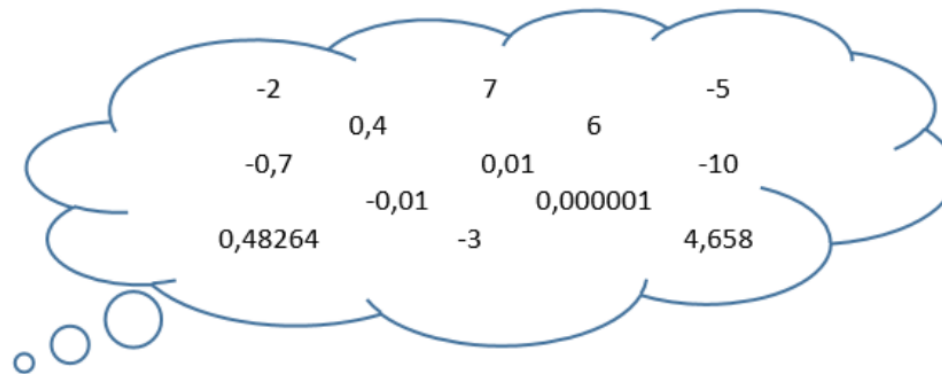


pre-test

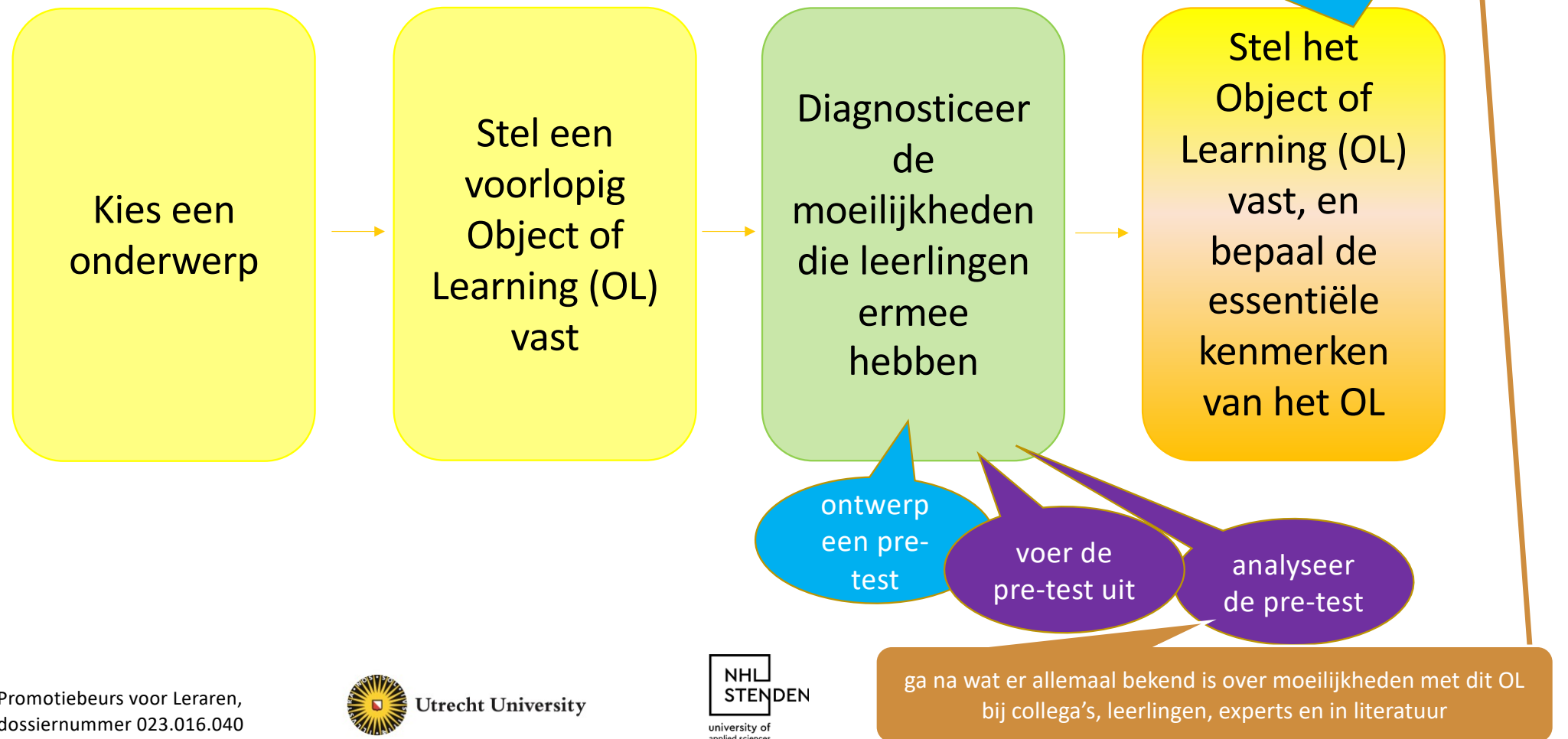
de opbouw van het begrip “negatief getal”:

- 1) wat zijn negatieve getallen?
- 2) wat is tegengesteld?
- 3) wat is de volgorde? (getallenlijn!)

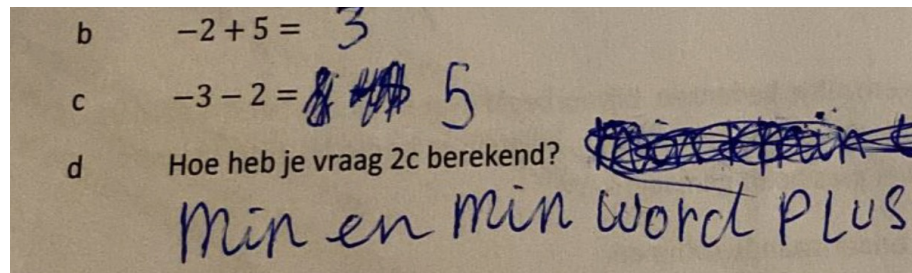
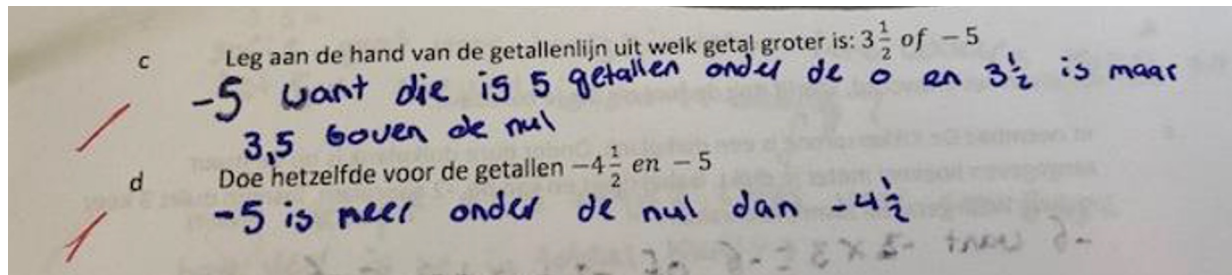
1. Hieronder zie je een wolkje met getallen.
 - a. Omcirkel alle negatieve getallen.
 - b. Geef het kleinste getal een kleur.

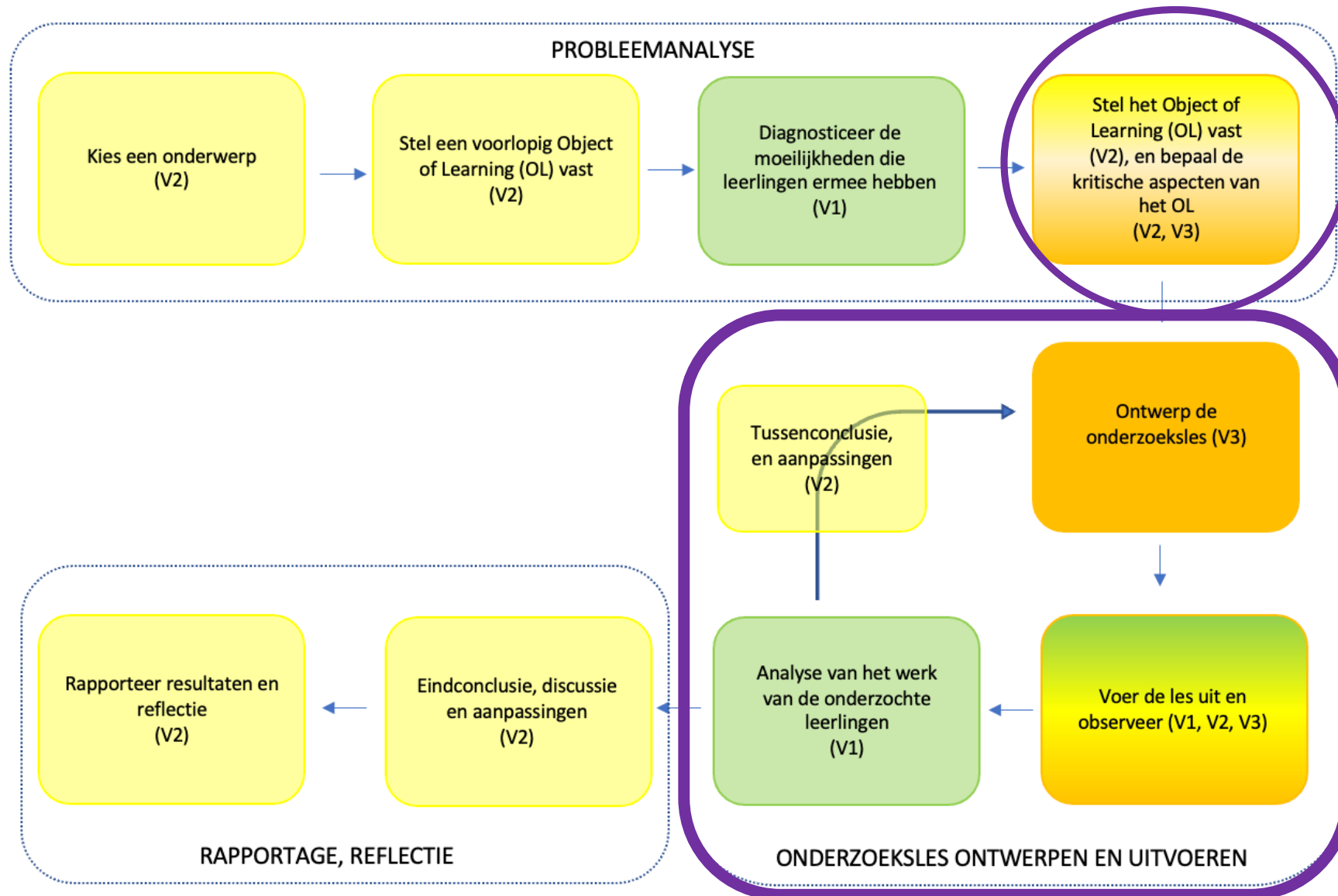


PROBLEEMANALYSE



Voorbeeld van antwoord uit de pre-test





ingrediënten van een opbouw van een uitleg optellen en aftrekken met negatieve getallen

Geef goed doordachte voorbeelden

$$-4 + 3$$

$$-4 - 3$$

$$3 + -4$$

$$3 - -4$$

ingrediënten van een opbouw van een uitleg

....zodat de focus ligt op het verschil tussen **proces** (optellen/aftrekken) en het getal ("**object**")

$$-4 + 3$$

$$-4 - 3$$

$$3 + -4$$

$$3 - -4$$



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht Univ



Utrecht University

university of
applied sciences



NHL
STENDEN

university of
applied sciences



rijksuniversiteit
 groningen

ingrediënten van een opbouw van een uitleg

....zodat de focus ligt op het verschil tussen **proces** (optellen/afrekken) en het getal (“**object**”)

$$-4 \text{ + } 3$$

$$3 \text{ + } -4$$

$$-4 \text{ - } 3$$

$$3 \text{ - } -4$$



ingrediënten van een opbouw van een uitleg

....zodat de focus ligt op het verschil tussen **proces** (optellen/afrekken) en het getal ("**object**")

$$-4 + 3$$

$$-4 - 3$$

$$3 + -4$$

$$3 - -4$$



ingrediënten van een opbouw van een uitleg

...focus vervolgens op het effect van het veranderen van het proces (of: bewerking) (aftrekken/optellen) terwijl de rest hetzelfde blijft...

$$\begin{array}{l} -4 + 3 = -1 \\ -4 - 3 = -7 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 + -4 = -1 \\ 3 - -4 = 7 \end{array}$$

zelfde getallen, zelfde volgorde,
andere bewerking, andere antwoorden

ingrediënten van een opbouw van een uitleg

...de volgende stap is om de aandacht te vestigen op de volgorde van de getallen, terwijl de bewerking hetzelfde blijft.

$-4 + 3 = -1$	$3 + -4 = -1$
$-4 - 3 = -7$	$3 - -4 = 7$

zelfde getallen, zelfde bewerking(+),
andere volgorde, **zelfde antwoord**

zelfde getallen, zelfde bewerking (-),
andere volgorde, **ander antwoord**

...vervolgens de focus op de samenhang tussen de bewerkingen...

$(-4 - 3 = ? \text{ dan } 3 + ? = -4)$

Resultaten

Kennis over lesgeven *relationeel/instrumenteel*

En ik heb dan zelf materiaal ontwikkeld waarbij ik ze dan vragen stel waarbij ik ze dan verschillende lijnen laat zien en dan vragen stel zoals, “Waarom hoort deze er dan bij? Waarom koppel je deze?” meer op het waarom, het weten waarom.

Kennis over lesgeven *variatietheorie*

Nou, dat heb ik dus een paar keer, uitgeprobeerd, zoals bijvoorbeeld, dat heb ik gedaan met die ruimte figuren. Daar heb ik ze toen zelf de kenmerken van de ruimtefiguur laten ontdekken, dus dat ze verschillende foto's maken van ruimtefiguren en dan zelf moeten ontdekken wat die kenmerken dan zijn.



Resultaten

Over zelf lesgeven:

Nou, ik probeer wel altijd in mijn lessen nu ook na te denken over die voorbeelden en non- voorbeelden. In de zin van dat ik kijk wat staat in het boek aan voorbeelden en zou ik zelf nog iets anders kunnen vinden of kunnen bedenken, wat daar niet tussen staat, waardoor het relationele begrip misschien groter zou kunnen worden. Maar dan moet ik wel eerlijk toegeven dat ik dat soms nog wel heel lastig vindt bij bepaalde onderwerpen.



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
groningen

Resultaten

Over zelf lesgeven en **kennis van het denken van leerlingen:**

“als je die fouten, zeg maar, je verwerkt de fouten die ze op de pre-test gemaakt hebben als non-voorbeelden, daar hebben wij wel echt in gemerkt dat ze niet diezelfde fouten maakten daardoor.”



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
groningen

Resultaten

kennis over het denken van de leerling

En toen hebben we het gehad over het relationele begrip en het instrumentele begrip en wat waar wij nu mee bezig waren, dat dat eigenlijk hun trucje was en toen ja, door ook zelf naar die antwoorden van die leerlingen te kijken (...) zagen we meteen, dit is niet wat wij willen bereiken. Ons doel wordt hier niet mee bereikt.”



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
 groningen

Resultaten

over eigen kennis *relationeel/instrumenteel*

“Dat stukje over relationele en instrumentele understanding. Daar was ik eerder nog niet van op de hoogte (..) Toen ben ik gaan kijken, hoe zit dat eigenlijk bij mij? ”



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
groningen

Conclusie

- met betrekking tot het onderwerp van de onderzoeksles levert de Learning Study kennis op op her gebied van lesgeven, het denken van leerlingen en ook soms op het gebied van de eigen kennis
- De link tussen gebruik van variatietheorie en stimuleren van relationeel begrip bij het lesgeven wordt niet altijd actief gelegd
- Variatietheorie blijft lastig gevonden worden...



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
groningen

References

- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
- Gu, L., Huang, R., & Marton, F. (2004). Teaching with variation: A Chinese way of promoting effective Mathematics learning. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai & S. Li (Eds.), *How Chinese learn Mathematics: Perspectives from insiders*. World Scientific Publishing
- Lai, M.Y. & Lo-Fu, Y.W.P. (2013). Incorporating learning study in a teacher education program in Hong Kong: a case study. *International Journal for Lesson & Learning Studies*, 2(1), 72–89.
- Skemp, R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic teacher*, 26(3), 9–15.



Promotiebeurs voor Leraren,
dossiernummer 023.016.040



Utrecht University



rijksuniversiteit
 groningen