

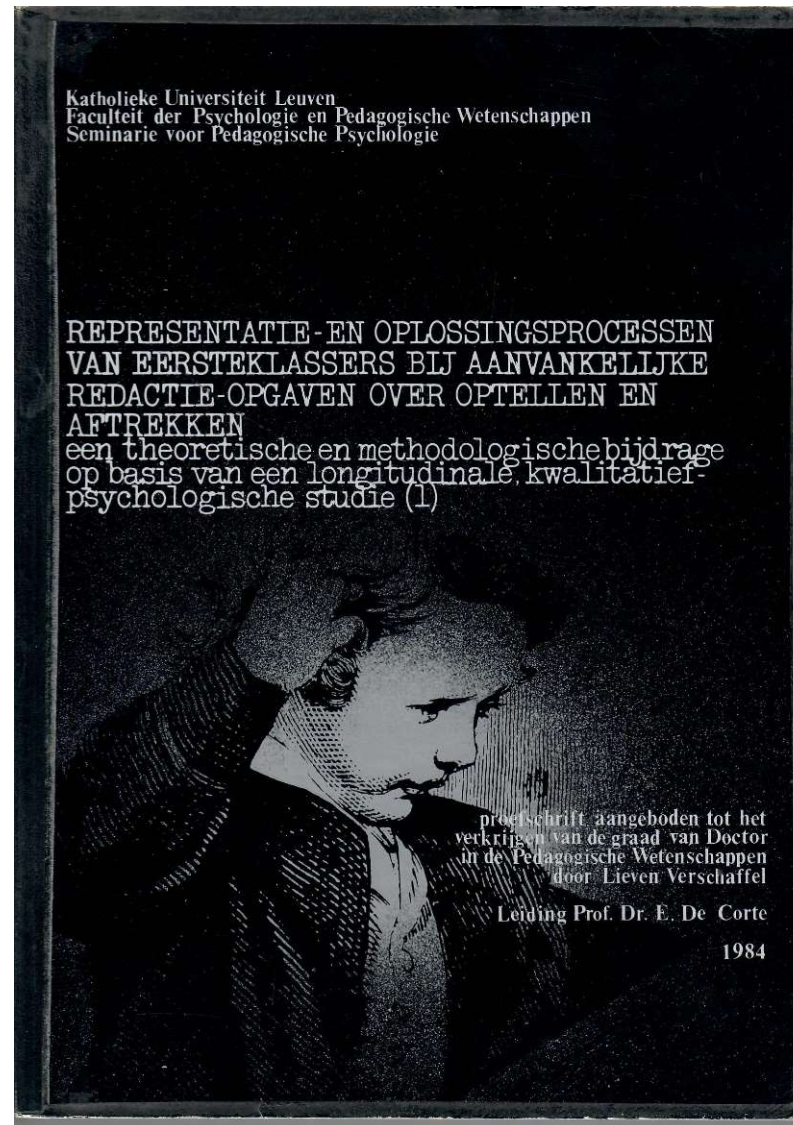
40 jaar vraagstukkenonderzoek: wat hebben we geleerd?

40ste Panamaconferentie

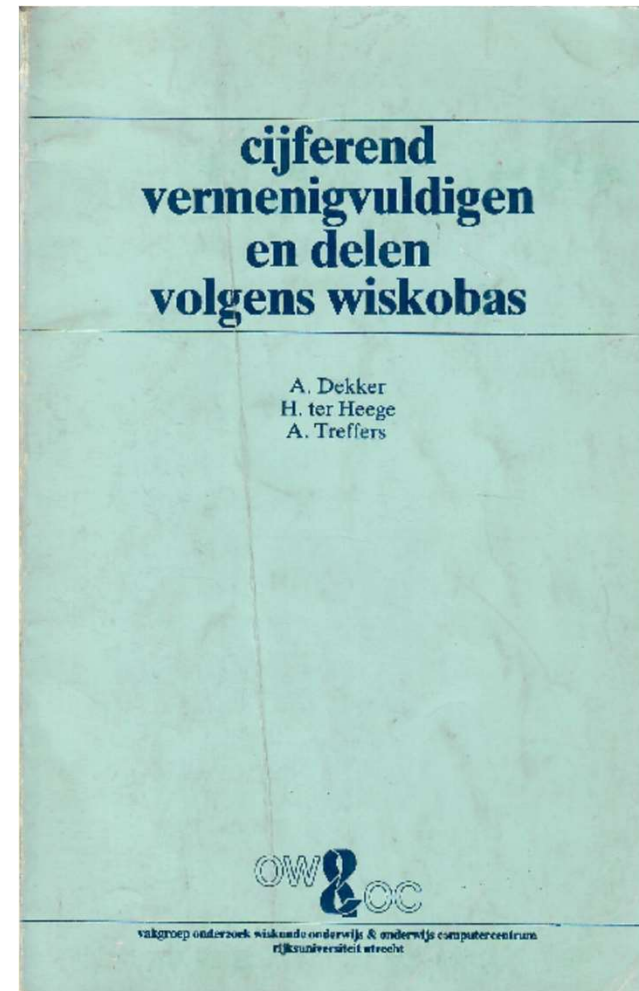
30 juni 2022

Lieven Verschaffel
KU Leuven, België

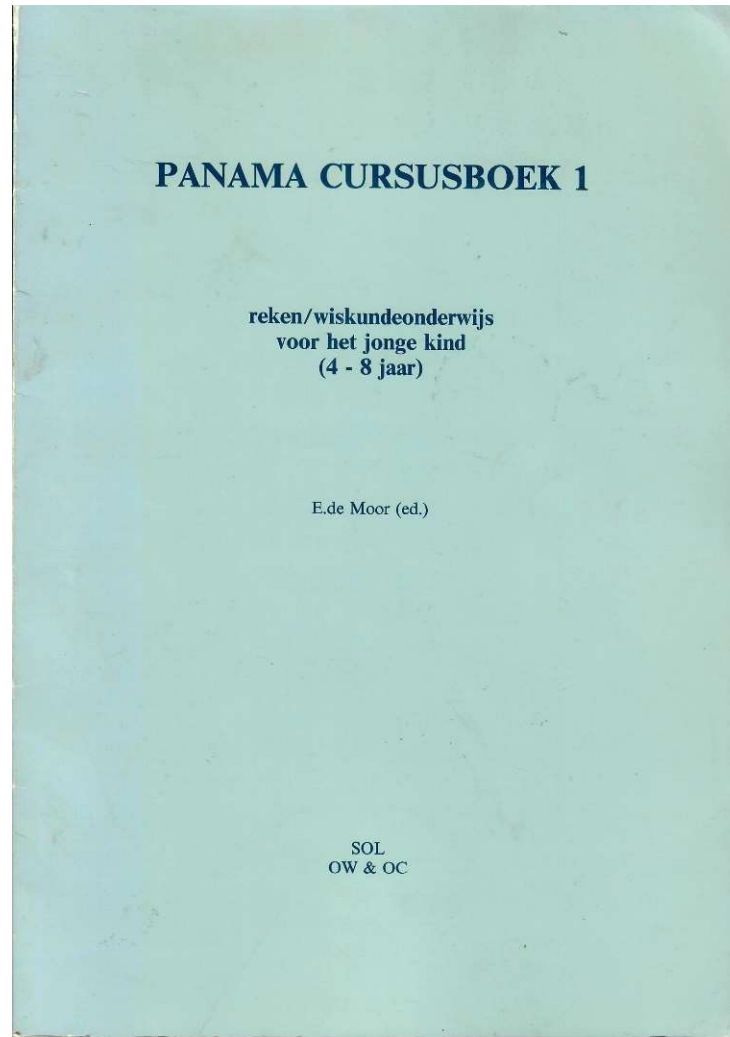
Proefschrift (1984)



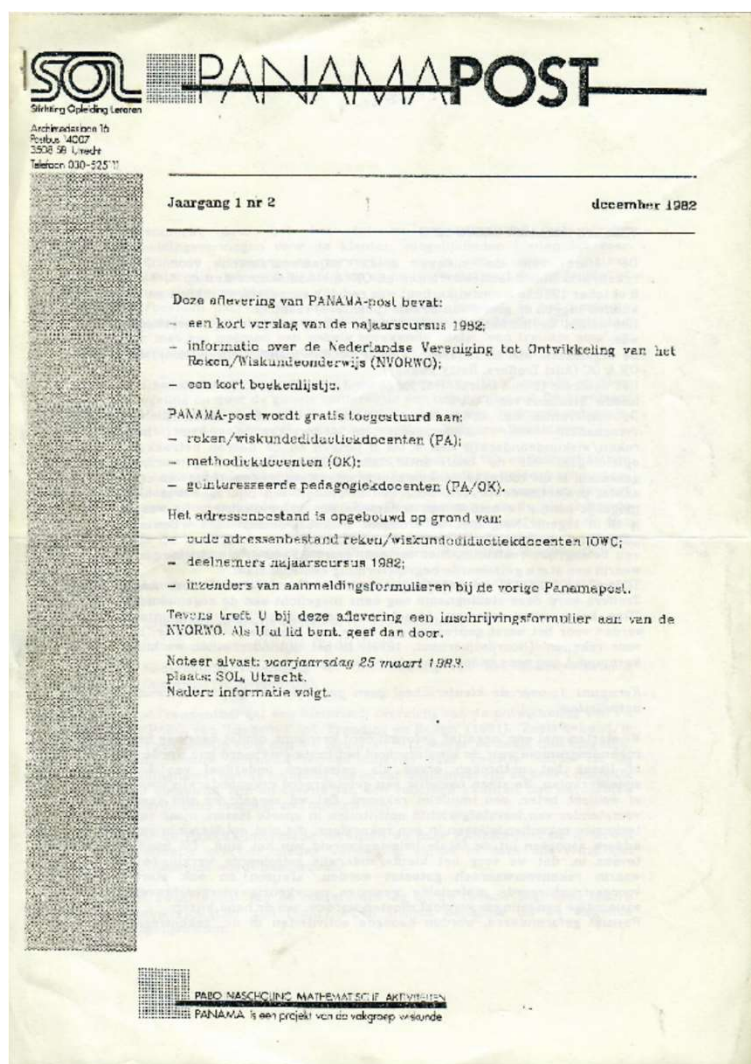
Onderzoek Wiskundeonderwijs reeks



Eerste Panama cursusboek



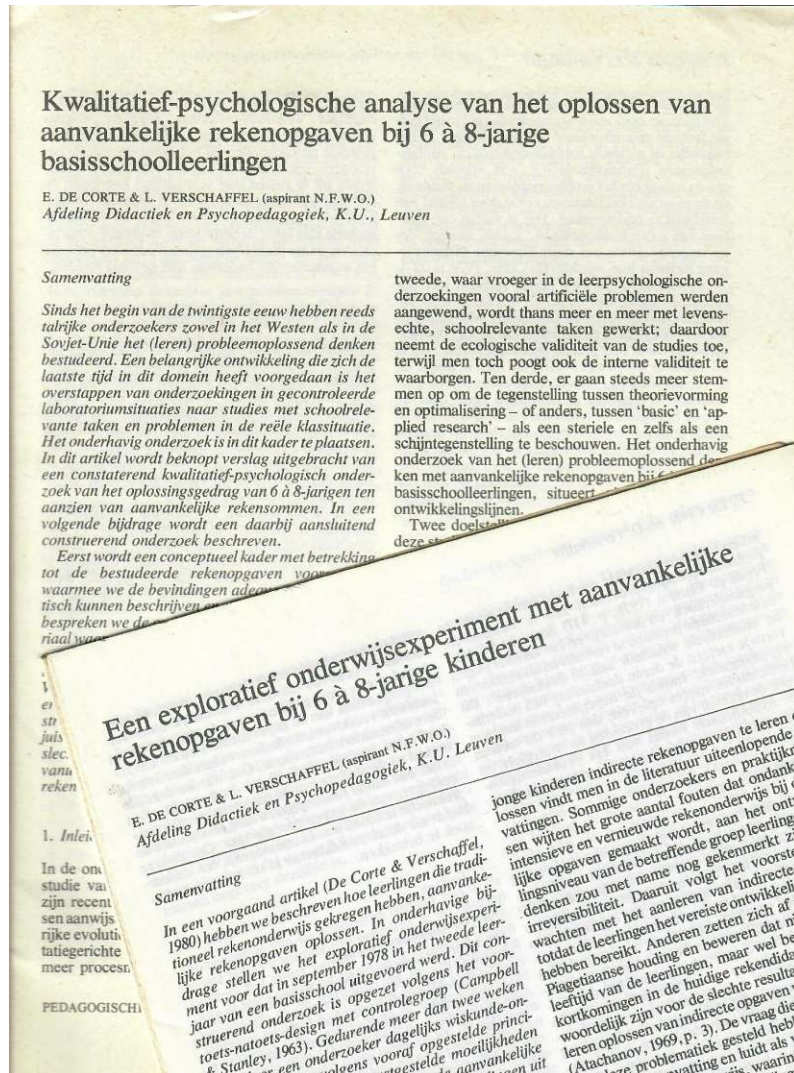
Eerste PanamaPost en Willem Bartjens



Logo van de NVORWO



Eerste artikelen in PS (1980)



Promotie (1984)



Promotie (1984)



Inhoud

- 10 thema's uit het vraagstukkenonderzoek
- Een vraagstuk (of vraagstukkenpaar) als startpunt
- Een conclusie op het eind

Opgave 1

Verdeel 100 broden over 10 mannen, waaronder een bootsman, een voorman en een portier, die een dubbele portie krijgen. Hoeveel broden krijgt elkeen?

Rhind-papyrus (Egypte, ± 1650 v.C.)

Verdeel 100 broden over 10 mannen, waaronder een bootsman, een voorman en een portier, die een dubbele portie krijgen. Hoeveel broden krijgt elkeen?

(Chace, 1979)



Shuruppak (Mesopotamië, ±3000 v.C.)

Gegeven een graanschuur van gerst. Als één man 7 sila graan als rantsoen krijgt, hoeveel mannen kunnen daar dan een rantsoen van krijgen?

(1 graanschuur = 2400 gur; 1 gur = 480 sila)

(Robson, 2007)



Alcuin van York: Propositiones ad acuendos juvenes (781 n.C.)

Een hond jaagt op een konijn, dat een voorsprong heeft van 50 voet. De hond springt 9 voet elke keer dat het konijn er 7 springt. In hoeveel sprongen haalt de hond het konijn in?

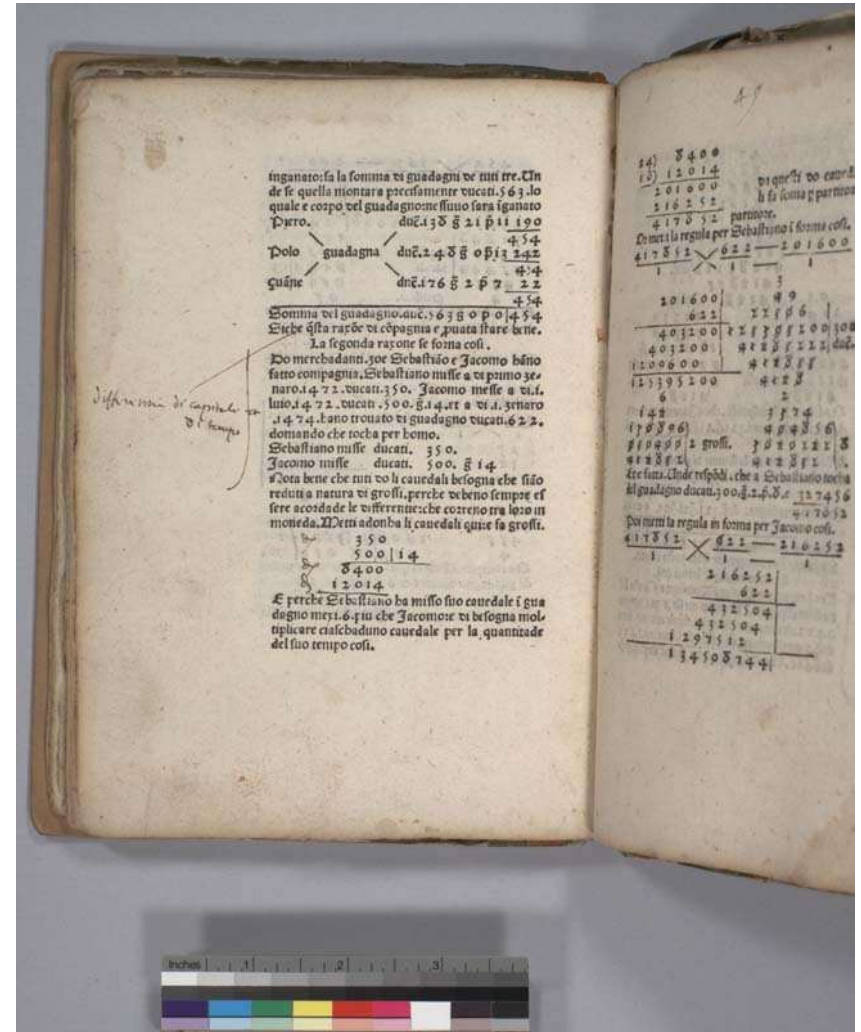
(Hadley & Singmaster, 1992)



Arte dell' Abbaco (1478 n.C.)

Twee handelaren, Sebastiano en Giacomo, gingen een samenwerking aan. Bij de start van de samenwerking, op 1 januari 1472, bracht Sebastiano 350 dukaten in; terwijl Giacomo 500 dukaten inbracht op 1 juli 1472. Op 1 januari 1474 stellen ze vast dat ze 622 dukaten hebben gewonnen. Welk aandeel in de winst krijgt elkeen?

(Gerofsky, 1999)



Père Girard (18^{de} eeuw)

Een vader had de gewoonte om elke avond naar de herberg te gaan en liet zijn gezin vaak zonder brood thuis. Gedurende de vier jaar dat hij dit leven leidde, gaf hij het eerste jaar 197 frank uit, het tweede 204 frank, het derde 212 frank en het vierde 129 frank. Hoeveel zou deze ongelukkige vader hebben bespaard als hij niet de smaak der drank te pakken had gehad?

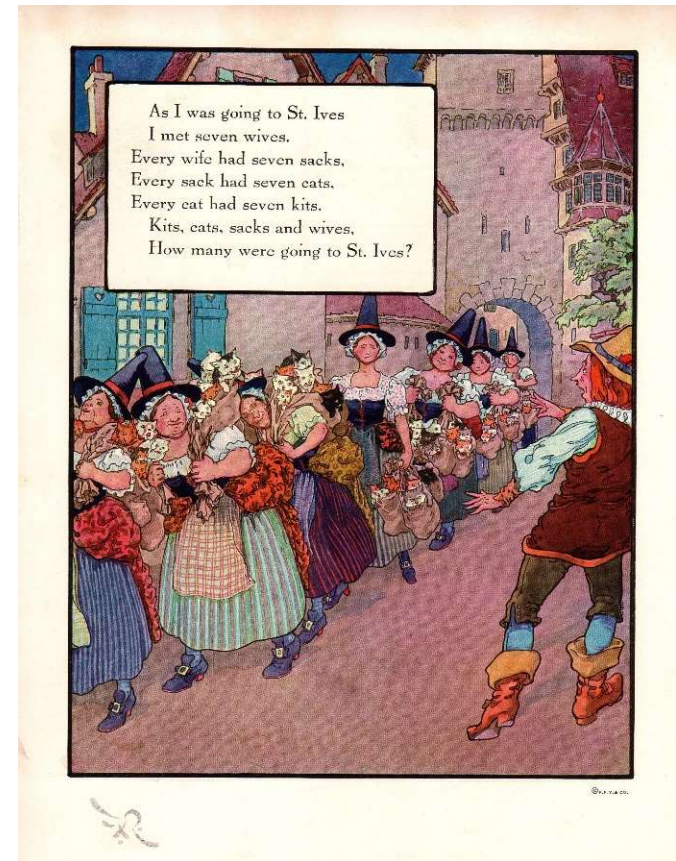
(Père Girard, Switzerland, 18th century)



As I was going to St Ives (1779)

Toen ik naar St. Ives ging,
ontmoette ik een man met
zeven vrouwen. Elke vrouw
had zeven zakken, elke zak
had zeven katten. Elke kat had
zeven kits. Kits, katten,
zakken, vrouwen, hoeveel
gaan er samen naar St. Ives?

(Gillings, 1972)



Streefland (1983)

Drie pannekoeken worden verdeeld onder vier kinderen.
Hoeveel krijgt ieder?



Uit een recente Nederlandse rekenmethode (2012)

2 Hoe vaak heeft de pont gevaren?



Gisteren zijn er 1258 mensen overgevoerd.
Per keer konden er 18 mensen mee.

Conclusie 1

- Bevindingen
 - Vraagstukken bestaan al heel lang, ... en zullen wellicht nog lang blijven bestaan
 - Grote overeenkomst tussen vraagstukken, onafhankelijk van tijd en plaats
 - Vraagstukken vervullen verschillende functies
 - De geleerde wiskundige kennis en vaardigheden leren toepassen in het echte leven (= toepassingsfunctie)
 - Morele opvoeding geven
 - Het intellect van de leerlingen meten en/of stimuleren
 - Het wiskundeonderwijs aantrekkelijker maken
 - Als vertrekpunt gebruiken voor het aanleren van een nieuw wiskundig begrip of vaardigheid

Conclusie 1 (vervolg)

- Implicaties
 - Denk als methodenschrijver of leraars goed na over wat je precies wil bereiken met een vraagstuk
 - Maar durf je ook af te vragen of vraagstukken anno 2022 nog steeds de beste manier zijn om dit doel te bereiken
 - Historische voorbeelden van vraagstukken kunnen hoe dan ook een interessante rol (blijven) spelen in het huidige wiskundeonderwijs

Opgave 2

Ibrahim heeft 3 druiven en Wendy heeft er 8. Hoeveel druiven heeft Ibrahim minder?

Verdeel 45 snoepjes over 3 kinderen. Hoeveel snoepjes voor elk kind?

Opgave 2

Ibrahim heeft 3 druiven en Wendy heeft er 8. Hoeveel druiven heeft Ibrahim minder?

$$8 - 3 = ?$$

Verdeel 45 snoepjes over 3 kinderen. Hoeveel snoepjes voor elk kind?

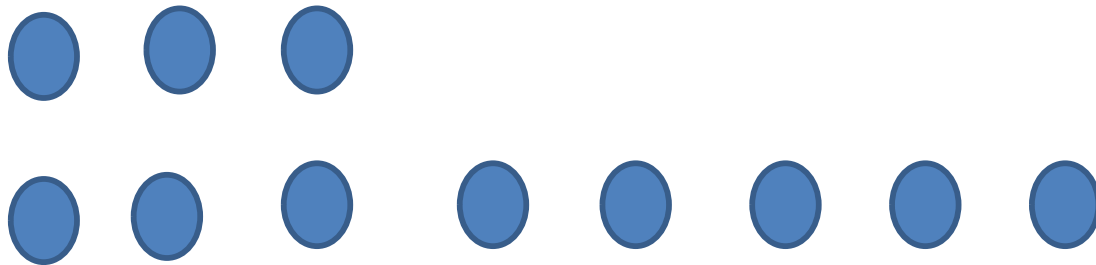
$$45 : 3 = ?$$

Thomas' informele oplossingswijze voor het aftrekvraagstuk $8 - 3 = ?$



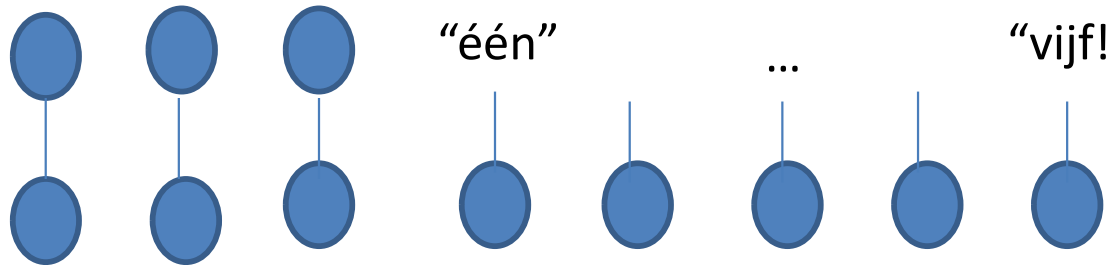
Ibrahim heeft 3 druiven en Wendy heeft er 8. Hoeveel druiven heeft Ibrahim minder?

Thomas' informele oplossingswijze
voor het aftrekvraagstuk $8 - 3 = ?$



Ibrahim heeft 3 druiven en Wendy heeft 8
druiven. Hoeveel druiven heeft Wendy minder?

Thomas' informele oplossingswijze voor het aftrekvraagstuk $8 - 3 = ?$



Ibrahim heeft 3 druiven en Wendy heeft er 8.
Hoeveel druiven heeft Ibrahim minder?

Martha's informele oplossingswijze voor het delingsvraagstuk $45 : 3 = ?$

Verdeel 45 snoepjes over 3 kinderen. Hoeveel snoepjes voor elk kind?

Martha's informele oplossingswijze voor het delingsvraagstuk $45 : 3 = ?$

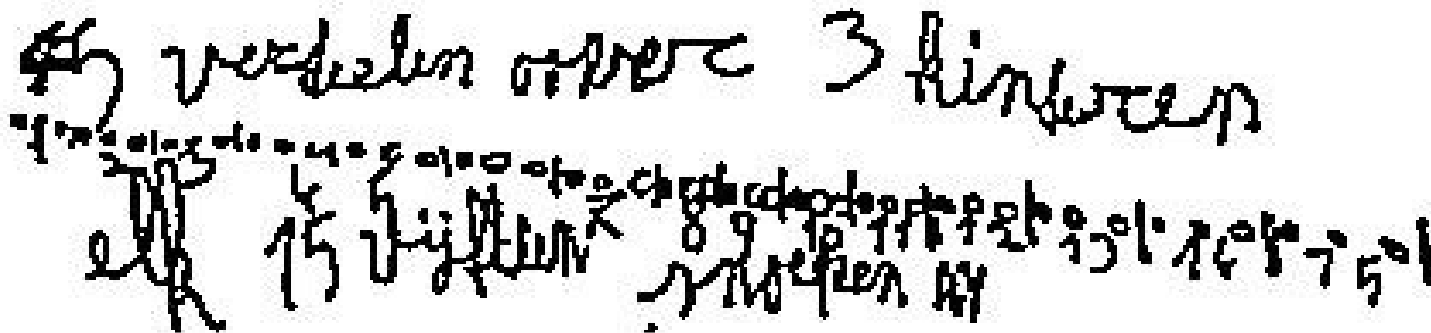
Verdeel 45 snoepjes over 3 kinderen. Hoeveel
snoepjes voor elk kind?

45 snoepjes over 3 kinderen
15 snoepjes voor elk kind

Martha 6 november
1993

Martha's informele oplossingswijze voor het delingsvraagstuk $45 : 3 = ?$

Verdeel 45 snoepjes over 3 kinderen. Hoeveel
snoepjes voor elk kind?



"Eén"



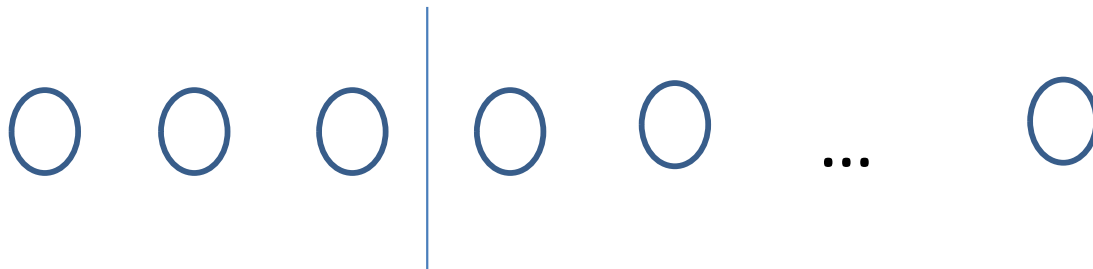
"Vijf-en-veertig"



Martha's informele oplossingswijze voor het delingsvraagstuk $45 : 3 = ?$

Verdeel 45 snoepjes over 3 kinderen. Hoeveel snoepjes voor elk kind?

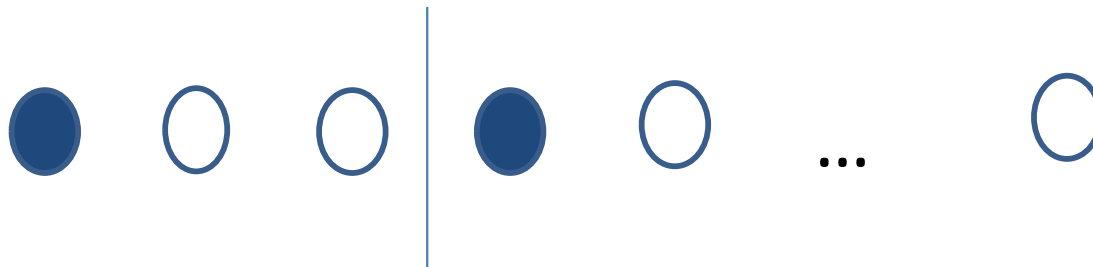
45 snoepjes over 3 kinderen
15 snoepjes voor elk kind



Martha's informele oplossingswijze voor het delingsvraagstuk $45 : 3 = ?$

Verdeel 45 snoepjes over 3 kinderen. Hoeveel snoepjes voor elk kind?

45 snoepjes over 3 kinderen
15 snoepjes voor elk kind



Martha's informele oplossingswijze voor het delingsvraagstuk $45 : 3 = ?$

Verdeel 45 snoepjes over 3 kinderen. Hoeveel
snoepjes voor elk kind?

“één”



“twee”



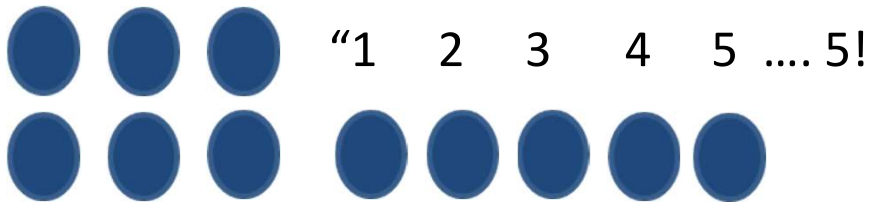
...

“vijftien”



Informele vs. formele oplossingswijzen

Opgave: Ibrahim heeft 3 druiven en Wendy heeft 8 druiven.
Hoeveel druiven heeft Ibrahim minder?

Oplossing: 

Foute symbolische notities:

- $3 + 8 = 5$
- $3 - 8 = 5$
- $3 + 3 + 5 = 5$
- $3 \dots 8 = 5$
- $3 \text{ minder } 8 = 5$

Thomas' informele oplossingswijzen voor 3 aftrekvraagstukjes

Ibrahim heeft 3 snoepjes en Wendy heeft er 8. Hoeveel snoepjes heeft Ibrahim minder?

“Matching” (= paren)

Wendy had 8 snoepjes. Zij gaf er 3 aan Ibrahim. Hoeveel snoepjes heeft Wendy nu nog?

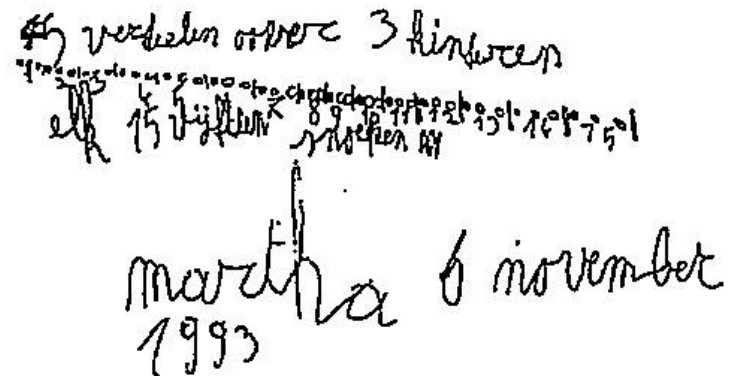
“Take away” (= wegnemen)

Wendy had 3 snoepjes. Zij kreeg er nog wat bij van Ibrahim. Nu heeft zij er 8. Hoeveel snoepjes heeft Wendy er bij gekregen?

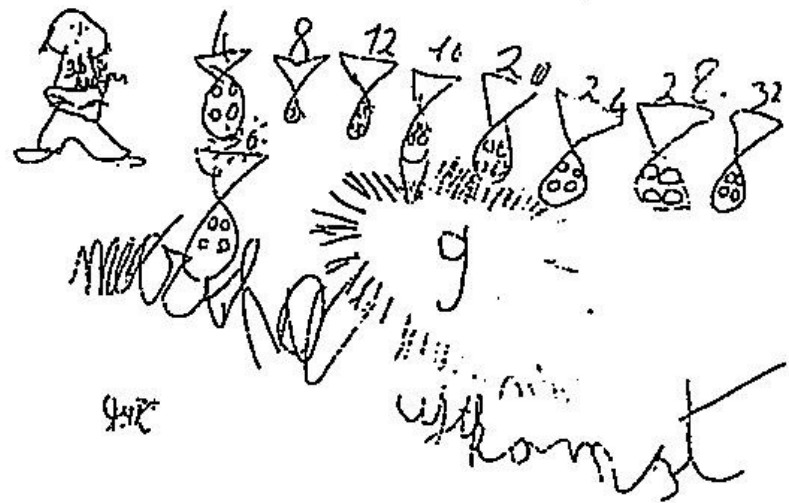
“Add on” (= aanvullen)

Martha's oplossingswijzen voor 2 delingsvraagstukken

Verdeel 45 snoepjes over 3 kinderen. Hoeveel snoepjes voor elk kind? (= *verdelings deling*)



36 snoepjes moeten in zakjes van 4 gestoken worden. Hoeveel van die zakjes kunnen er gemaakt worden? (= *verhoudings deling*)



Conclusie 2

- Bevindingen
 - Voor zij formeel onderwijs hebben gekregen in de wiskundige basisbewerkingen, kunnen kinderen al vraagstukjes oplossen
 - Zij maken daarvoor gebruik van informele oplossingsstrategieën
 - Die informele oplossingsstrategieën sluiten nauw aan bij de betekenisstructuur van de opgave
 - Het koppelen van die informele oplossingswijzen aan een formeel-wiskundige notatie is het “orgelpunt” van een lang leerproces

Conclusie 2

Implicaties

- Toon belangstelling en waardering voor informele oplossingsstrategieën van kinderen
- Vraagstukken kunnen ook worden ingezet bij de *vorming* van nieuwe wiskundige begrippen en operaties
- Hou als methodenschrijver of leraar rekening met de verschillende modelsituaties voor de basisbewerkingen en hun specifieke wiskundige kenmerken en mogelijkheden

Opgave 3

Er zijn 8 vogels en 5 wormen. Hoeveel meer vogels dan wormen zijn er?

Er zijn 8 vogels en 5 wormen. Hoeveel vogels hebben geen worm?

Studie van Hudson (1983) bij 5-7-jarigen

Er zijn 8 vogels en 5 wormen.
Hoeveel **meer** vogels **dan**
wormen zijn er?

64% correct

Er zijn 8 vogels en 5 wormen.
Hoeveel vogels **hebben geen**
worm?

100% correct

Studie van De Corte, Verschaffel & De Win (1984) bij 6-8 jarigen

Tom en An hebben 9 noten.
Tom heeft 3 noten. Hoeveel
noten heeft An?

56% correct

Tom en An hebben in totaal 9
noten. 3 **van deze** noten zijn
van Tom. **De andere zijn van**
An. Hoeveel noten heeft An?

70% correct

Studie van Coquin-Viennot en Moreau (2003) bij 11-12 jarigen

- Vraagstuk

Voor een prijsuitreiking voorziet de bloemist voor elke winnaar 5 rozen en 7 tulpen. Hoeveel bloemen heeft de bloemist nodig als er 14 winnaars zijn?

- Twee strategieën

- Expansie: $(14 \times 5) + (14 \times 7)$

- Factorizatie: $14 (5 + 7)$

Studie van Coquin-Viennot en Moreau (2003) bij 11-12 jarigen

Vraagstuk

% factorizatie strategieën

Voor een prijsuitreiking voorziet de bloemist voor elke winnaar 5 rozen en 7 tulpen. Hoeveel bloemen zijn er nodig als er 14 winnaars zijn?

44 %

Voor een prijsuitreiking voorziet de bloemist voor elke winnaar **een boeket bestaande uit** 5 rozen en 7 tulpen. Hoeveel bloemen zijn er nodig als er 14 winnaars zijn?

67 %

Conclusie 3

Bevindingen

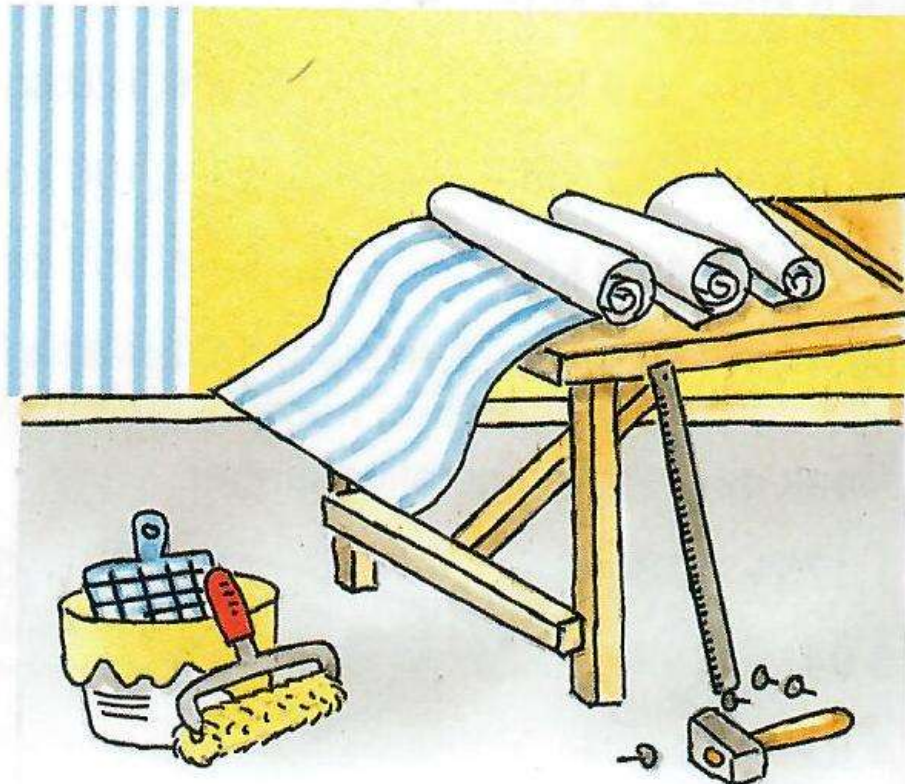
- Herformuleringen hebben grote invloed op de moeilijkheidsgraad van een vraagstuk, het type fouten en het soort van oplossingsstrategieën

Implicaties

- Benut als methodenschrijver, toetsontwikkelaar of leraar de beschikbare kennis over hoe (her)formuleringen de prestaties van leerlingen beïnvloeden, en waarom
- Het is niet altijd nodig, of zelfs wenselijk, om de eenvoudigste formulering te hanteren

Opgave 4

- e Een rol behang is 0,50 meter breed en 10 meter lang. De hoogte van mijn kamer is 2,44 meter. Ik moet 9,50 meter muur behangen. Hoeveel rollen behang heb ik nodig?



Opgave 4

- e Een rol behang is 0,50 meter breed en 10 meter lang. De hoogte van mijn kamer is 2,44 meter. Ik moet 9,50 meter muur behangen.
Hoeveel rollen behang heb ik nodig?



?

Opgave 4

- e Een rol behang is 0,50 meter breed en 10 meter lang. De hoogte van mijn kamer is 2,44 meter. Ik moet 9,50 meter muur behangen. Hoeveel rollen behang heb ik nodig?



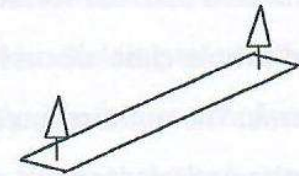
Soorten illustraties met voorbeeld

(Elia & Phillippou, 2004)

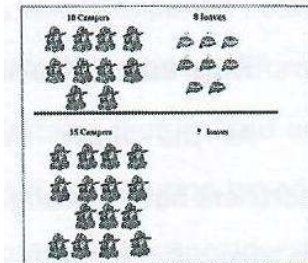
Decoratief: De juf maakt groepjes van 5 en telkens 3 meisjes. Als er 25 kinderen in haar klas zitten, hoeveel meisjes en jongens telt haar klas?



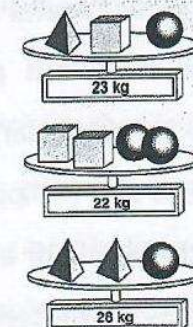
Representationeel: Een man plantte een boom aan elk van de twee uiteinden van een recht pad. Daarna plantte hij om de 2 m een boom langs het pad. De lengte van het pad is 10 m. Hoeveel bomen zijn er in het totaal geplant?



Structureel: Afgelopen week kampeerden 10 mensen op de camping. Voor 10 mensen hield men dagelijks 8 broden beschikbaar in de winkel. Deze week zijn er 15 mensen op de camping. Hoeveel broden houdt men per dag best beschikbaar?



Informatief: Vind de gewichten van de drie items: een tetraëder, een bol en een kubus.



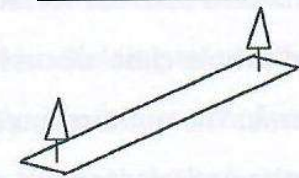
Soorten illustraties met voorbeeld

(Elia & Phillippou, 2004)

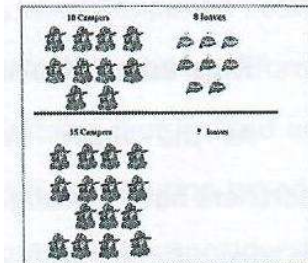
Decoratieve: geen invloed



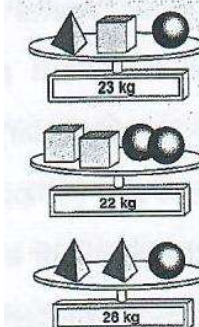
Representatieve: soms voordeel



Organisatorische: meestal voordeel



Informatieve: zelden voordeel



Studie van Hoogland, de Koning, Bakker, Pepin, & Gravemeijer (2018)

- Vraag
 - Leiden realistisch afgebeelde vraagstukken tot betere prestaties dan tekstueel aangeboden vraagstukken
- Methode
 - 30.000 10- tot 20-jarige studenten
 - 20 paren opgaven: 10 in tekst-versie en 10 in afbeelding-versie
- Resultaat
 - Afbeelding-versie leidt tot hogere score op afbeelding-versie, maar zeer klein effect (Cohen's $d = 0,09$)
 - Geen invloed van geslacht, SES, rekenvaardigheidsniveau op de grootte van het effect

Voorbeelden van itemparen uit Hoogland e.a. (2018)

1A

Apples are sold in bags of 2.5 kilograms.
You weigh one apple and find it weighs 157 grams.

About how many apples are there in the bag?
 apples



1B



About how many apples are there in the bag?
 apples

6A

For a picnic you found a recipe for wraps.
The recipe gives the ingredients for 5 persons: 2 packs of wraps, 250 grams of cream cheese, 1 sachet of garden herbs, 300 grams of fricandeau, green lettuce, pepper and salt to taste

How much cream cheese do you need for 12 persons?
 grams



6B

How much cream cheese do you need for 12 persons?
 grams

11A

The bathroom has two windows.
They are both 0,90 m in width and 1,35 m in height.
You want to double glaze these windows.
Double glazing costs € 148,- per m²

What is the cost of double glazing these windows?
€



11B

Double glazing
€ 148,-
per m²

What is the cost of double glazing these windows?
€

Studie van Hoogland, de Koning, Bakker, Pepin, & Gravemeijer (2018)

- Vraag
 - Leiden realistisch afgebeelde vraagstukken tot betere prestaties dan tekstueel aangeboden vraagstukken
- Methode
 - 30.000 10- tot 20-jarige studenten
 - 20 paren opgaven: 10 in tekst-versie en 10 in afbeelding-versie
- Resultaat
 - Afbeelding-versie leidt tot hogere score dan de tekst-versie, maar effect is erg klein (Cohen's $d = 0,09$)
 - Geen invloed van geslacht, SES, rekenvaardigheidsniveau op de grootte van het effect

Conclusie 4

- Bevindingen
 - Afbeeldingen kunnen een gunstige invloed hebben op de prestaties op vraagstukken, maar het effect hangt van veel factoren af
- Implicaties
 - Denk als methodenschrijver of toetsontwikkelaar grondig na over het soort afbeeldingen dat je gebruikt en hoe je de afbeelding precies vorm geeft
 - De relatie tekst-afbeelding kan aanleiding geven tot leerrijke klasgesprekken

Opgabe 5

Ann heeft 55 snoepjes nodig. Een snoepje kost 0,75 euro.
Hoeveel moet ze betalen?

$$55 \times 0,75 \qquad 55 + 0,75 \qquad 55 - 0,75 \qquad 55 : 0,75$$

Kreeft kost 55 euro per kilogram. Hoeveel kost een kreeft van 0,75 kilogram?

$$55 \times 0,75 \qquad 55 + 0,75 \qquad 55 - 0,75 \qquad 55 : 0,75$$

Opgabe 5

Ann heeft 55 snoepjes nodig. Een snoepje kost 0,75 euro.
Hoeveel moet ze betalen?

$55 \times 0,75$	$55 + 0,75$	$55 - 0,75$	$55 : 0,75$
------------------	-------------	-------------	-------------

Kreeft kost 55 euro per kilogram. Hoeveel kost een kreeft van 0,75 kilogram?

$55 \times 0,75$	$55 + 0,75$	$55 - 0,75$	$55 : 0,75$
------------------	-------------	-------------	-------------

Studie van De Corte, Verschaffel & Van Coillie (1988) bij 11-12-jarigen

Ann heeft 55 snoepjes nodig. Een snoepje kost 0,75 euro. Hoeveel moet ze betalen? 98 %

$55 \times 0,75$ $55 + 0,75$ $55 - 0,75$ $55 : 0,75$

Kreeft kost 55 euro per kilogram. Hoeveel kost een kreeft van 0,75 kilogram? 32 %

$55 \times 0,75$ $55 + 0,75$ $55 - 0,75$ $55 : 0,75$

Studie van De Corte, Verschaffel & Van Coillie (1988) bij 11-12-jarigen

Vermenigvuldigtal

Ann heeft 55 snoepjes nodig. Een snoepje kost 0,75 euro. Hoeveel moet ze betalen?

$55 \times 0,75$ $55 + 0,75$ $55 - 0,75$ $55 : 0,75$

Vermenigvuldiger

Kreeft kost 55 euro per kilogram. Hoeveel kost een kreeft van 0,75 kilogram?

$55 \times 0,75$ $55 + 0,75$ $55 - 0,75$ $55 : 0,75$

Fischbein e.a. (1985)



Journal for Research in Mathematics Education
1985, Vol. 16, No. 1, 3–17

3

THE ROLE OF IMPLICIT MODELS IN SOLVING VERBAL PROBLEMS IN MULTIPLICATION AND DIVISION

EFRAIM FISCHBEIN, *Tel-Aviv University*

MARIA DERI, *University of Pisa*

MARIA SAINATI NELLO, *University of Pisa*

MARIA SCIOLIS MARINO, *University of Pisa*

Beperkingen van het “gelijke groepen” model

- De vermenigvuldiger moet een geheel getal zijn
- Het resultaat van de vermenigvuldiging moet groter zijn dan het vermenigvuldigtal

Studie van De Corte, Verschaffel & Van Coillie (1988) bij 11-12-jarigen

Vermenigvuldigtal

Ann heeft 55 snoepjes nodig. Een snoepje kost 0,75 euro. Hoeveel moet ze betalen?

$55 \times 0,75$ $55 + 0,75$ $55 - 0,75$ $55 : 0,75$

Beperkingen

1. De vermenigvuldiger moet een geheel getal zijn ✓
2. Het resultaat moet groter zijn dan het vermenigvuldigtal ✓

Studie van De Corte, Verschaffel & Van Coillie (1988) bij 11-12-jarigen

Beperkingen

1. De vermenigvuldiger moet een geheel getal zijn ✗
2. Het resultaat moet groter zijn dan het vermenigvuldigtal ✗

Kreeft kost 55 euro per kilogram. Hoeveel kost een kreeft van 0,75 kilogram?

Vermenigvul-
diger

$55 \times 0,75$ $55 + 0,75$ $55 - 0,75$ $55 : 0,75$

Impliciete modellen van andere bewerkingen

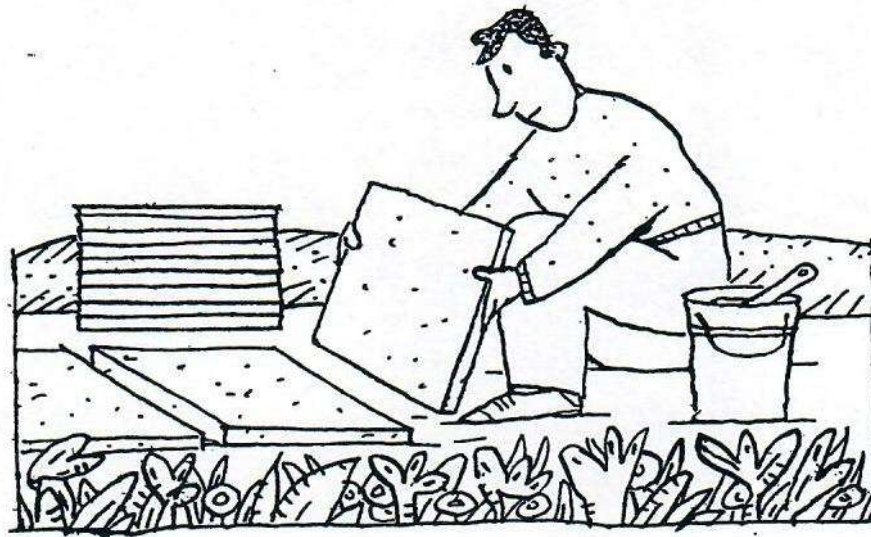
- Aftrekken als “wegnemen”
- Delen als “eerlijk verdelen”

Conclusie 5

- Bevindingen
 - Belang van impliciete modellen van bewerkingen voor het oplossen van vraagstukken
 - Deze impliciete modellen zijn oefenen hun invloed intuïtief uit en zijn zeer weerbarstig
- Implicaties
 - Probeer via instructie de negatieve invloed van deze impliciete modellen proberen te voorkomen
 - door ze aan te vullen met andere modellen
 - door leerlingen bewust te maken van hun bestaan en hen zo te helpen die negatieve invloed te controleren

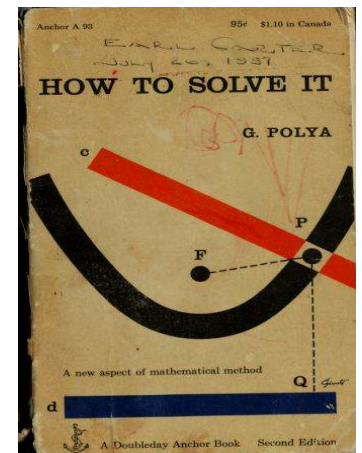
Opgave 6

Rondom een vierkantig bloemperk met een zijde van 10 m legt vader een pad aan. Het pad bestaat uit één rij vierkante tegels met een zijde van een halve meter. Hoeveel tegels heeft vader nodig?



Heuristieken: voorbeelden

- Maak een schets van de probleemsituatie
- Maak een schema, een tabel met de gegevens
- Onderscheid relevante van irrelevante gegevens
- Splits het probleem op in deelproblemen
- Denk aan een verwant probleem
- Werk omgekeerd
- Vereenvoudig de getallen in het probleem
- ...



Heuristieken: definitie en bevindingen

(Schoenfeld, 1982, 1991)

- Heuristiek = verstandige aanpakstrategie om het complicerende element uit een probleem te halen, evenwel zonder garantie voor succes
- Sterke en zwakke probleemoplossers van vraagstukken verschillen m.b.t. de kwantiteit en kwaliteit van hun heuristiekgebruik

Studie van De Bock, Verschaffel, & Janssens (1998)

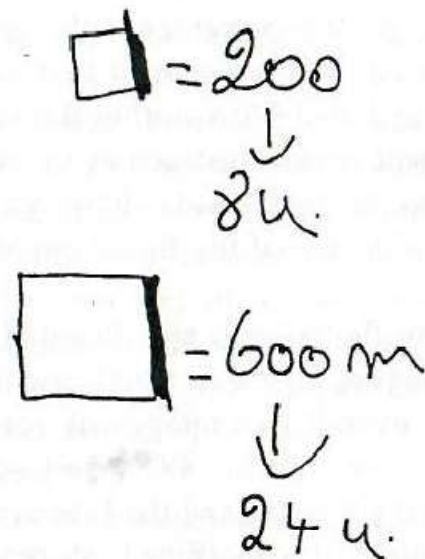
- Opgave:
 - Boer Carl heeft ongeveer 8 uur nodig om een vierkant stuk land met een zijde van 200 m te bemesten. Hoeveel uur zou hij ongeveer nodig hebben om een vierkant stuk land met een zijde van 600 m te bemesten?
- Bevindingen:
 - Zeer slechte prestaties: 95 % van de 12-13 jarigen antwoordden $8 \times 3 = 24$ uur (i.p.v. $8 \times 9 = 72$ uur)
 - Beduidend meer juiste antwoorden bij leerlingen die een tekening maakten
 - Het succes van de toepassing van de “make-a-drawing” heuristiek was afhankelijk van de kwaliteit van de tekening

Efficiënte en inefficiënte tekeningen

(De Bock e.a., 1998)

Boer Carl heeft ongeveer 8 uur nodig om een vierkant stuk land met een zijde van 200 m te bemesten. Hoeveel uur zou hij ongeveer nodig hebben om een vierkant stuk land met een zijde van 600 m te bemesten?

Inefficiënte tekening



Efficiënte tekening

A hand-drawn diagram illustrating an efficient method. It shows a 3x3 grid of squares. The top row contains 8, 16, and 24. The middle row contains 32, 40, and 48. The bottom row contains 56, 64, and 72.

8	16	24
32	40	48
56	64	72

Studie van Boonen, van Wesel, Jolles, van der Schoot (2014)

Doel: de invloed van het soort van gemaakte tekening op het oplossen van vraagstukken bij groep 8 leerlingen

Methode:

- 128 groep 8 leerlingen
- individueel interview
- 14 probleem-vraagstukken
- Analyse van antwoorden + zelfgemaakte externe representaties

Voorbeeldopgave met soorten tekeningen

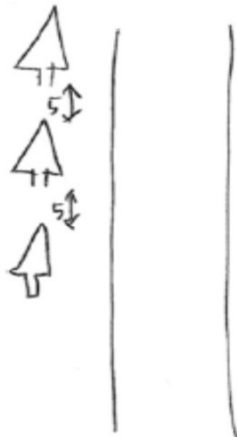
(Boonen e.a., 2014)

Opgave: Aan elk van de twee uiteinden van een recht pad plantte een man een boom en vervolgens plantte hij elke 5 m langs het pad een andere boom. De lengte van het pad is 15 meter. Hoeveel bomen zijn er geplant?

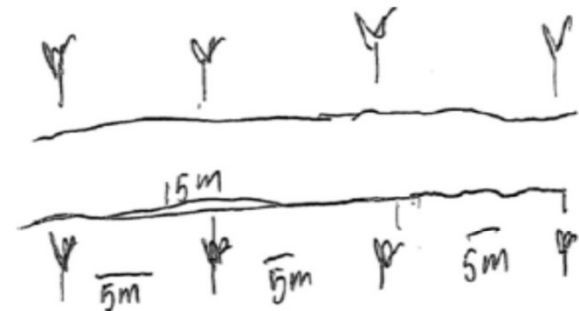
Pictoriële
representatie



Inadequate visueel-
schematische
representatie



Adequate visueel-
schematische
representatie



Resultaten (Boonen e.a., 2014)

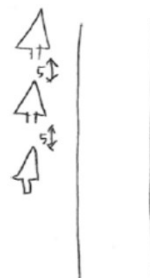
- Een leerling die een adequate tekening maakte had 6 keer meer kans op een juist antwoord dan een leerling die geen tekening maakte
- Een leerling die een picturale representatie of een inadequate visueel-schematische representatie maakte had minder kans op een juist antwoord dan een leerling die geen visuele weergave maakte

Geen representatie

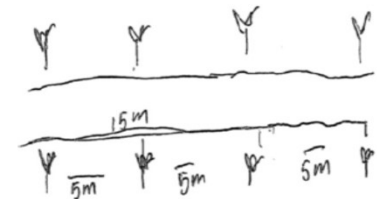
Pictoriële representatie



Inadequate visueel-schematische representatie



Adequate visueel-schematische representatie



Conclusie 6

- Bevindingen
 - Heuristieken zijn nuttig...
 - Maar garanderen geen succes
- Implicaties
 - In eindtermen en wiskundemethoden moet er expliciete aandacht zijn voor heuristieken
 - Probeer het adequaat gebruik van heuristieken bij leerlingen op te merken, te waarderen en te stimuleren

Opgave 7

Een honkbalknuppel en bal kosten samen \$ 1,10.
De knuppel kost \$ 1,00 meer dan de bal. Hoeveel
kost de bal? _____ cent

Frederick's (2005) Cognitive Reflection Test

1. Een honkbalknuppel en bal kosten samen \$ 1,10. De knuppel kost \$ 1,00 meer dan de bal. Hoeveel kost de bal? _____ cent
2. Als het 5 machines 5 minuten kost om 5 producten te maken, hoe lang zouden 100 machines er dan over doen om 100 van die producten te maken? _____ minuten
3. In een vijver is er een partij waterlelies. Elke dag verdubbelt deze partij in omvang. Als het 48 dagen duurt voordat de partij de hele vijver bedekt, hoe lang zou het dan duren alvorens de helft met waterlelies is bedekt? _____ dagen

Juiste antwoorden: opgave 1: 5 cent, opgave 2: 5 minuten, opgave 3: 47 dagen

Reflectie / metacognitie

- Het vermogen om overhaaste, oppervlakkige aanpakstrategieën (bijvoorbeeld: “meer” = optellen; “multiplication makes bigger”, ...) te inhiberen
- Het vermogen om het eigen probleemoplossingsproces proces te reguleren
 - Wat is mijn plan?
 - Heb ik vooruitgang geboekt door deze stap te zetten?
 - Is mijn uitkomst redelijk?
 - Wat heb ik geleerd van het oplossen van dit vraagstuk?

Onderzoekresultaten

- Leerlingen die beter zijn in het onderdrukken van irrelevante of foute antwoordtendenzen presteren beter op vraagstukken dan leerlingen met zwakke inhibitievaardigheid (Lee e.a., 2009; Passolunghi e.a., 1999; Passolunghi & Siegel, 2001)
- Leerlingen die metacognitieve vaardigheden toepassen, presteren beter op (complexe) vraagstukken dan leerlingen die dat niet of minder doen (Nelissen, 1987; Lester & Garofalo, 1982; Yulianto, 2020; Lai e.a., 2015)

Conclusie 7

- Bevindingen
 - Goede en zwakke oplosers van vraagstukken verschillen in hun vermogen om oppervlakkige aanpakstrategieën te inhiberen en hun eigen denkproces te reguleren
- Implicaties
 - In eindtermen en wiskundemethoden moet er expliciete aandacht zijn voor de ontwikkeling van metacognitie
 - Tracht metacognitieve processen in de vraagstukkenles op te merken, te waarderen en te stimuleren

Opgave 8

Een man wil een touw spannen tussen twee palen van 12 m, maar hij heeft enkel stukken touw van 1,5 m lang. Hoeveel van deze stukken moet hij aan elkaar knopen om de palen met elkaar te verbinden?

Opgave 8

Een man wil een touw spannen tussen twee palen van 12 m, maar hij heeft enkel stukken touw van 1,5 m lang. Hoeveel van deze stukken moet hij aan elkaar knopen om de palen met elkaar te verbinden?

Niet-realistische reactie (NR)

Realistische reactie (RR)

Opgave 8

Een man wil een touw spannen tussen twee palen van 12 m, maar hij heeft enkel stukken touw van 1,5 m lang. Hoeveel van deze stukken moet hij aan elkaar knopen om de palen met elkaar te verbinden?

Niet-realistische reactie (NR)

“ $12 : 1,5 = 8$; de man heeft 8
stukken touw nodig”

Realistische reactie (RR)

Opgave 8

Een man wil een touw spannen tussen twee palen van 12 m, maar hij heeft enkel stukken touw van 1,5 m lang. Hoeveel van deze stukken moet hij aan elkaar knopen om de palen met elkaar te verbinden?

Niet-realistische reactie (NR)

“ $12 : 1,5 = 8$; de man heeft 8 stukken touw nodig”

Realistische reactie (RR)

“ $12 : 1,5 = 8$; maar dat zal niet genoeg zijn; er is meer nodig om al die knopen te leggen”

“Ik kan dit vraagstuk niet beantwoorden, omdat men niet zegt hoeveel touw er nodig is om een knoop te leggen”

Andere voorbeelden van P-items

(Verschaffel e.a., 1994)

- **Planken:** Steven wil een kast maken. Hij heeft 4 planken van elk 2,5 m gekocht. Hoeveel planken van 1 m kan hij uit deze planken zagen?
- **School:** Bie woont op 17 km afstand van de school en Alice op 8 km. Hoe ver wonen Bie en Alice van elkaar?

% NRs op de 3 P-items (Verschaffel e.a., 1994)

P-item	NR	% NRs
Een man wil een touw spannen tussen twee palen van 12 m, maar hij heeft enkel stukken touw van 1,5 m lang. Hoeveel van deze stukken moet hij aan elkaar knopen?	$12 : 1,5 = 8$	100
Steven wil een kast maken. Hij heeft 4 planken van elk 2,5 m gekocht. Hoeveel planken van 1 m kan hij uit deze planken zagen?	$2,5 \times 4 = 10 \text{ m}$	86
Bie woont op 17 km afstand van de school en Alice op 8 km. Hoe ver wonen Bie en Alice van elkaar?	$17 + 8 = 25 \text{ km}$	95

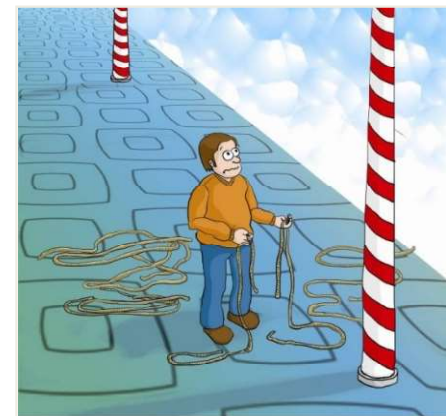
% NRs in replicatiestudies

Verschaffel et al. (1994)	Flanders	83%
Hidalgo & Gaulin (1997)	Venezuela	88%
Reusser & Stebler (1997)	Switzerland	81%
Yoshida et al. (1997)	Japan	85%
Renkl (1999)	Germany	80%
Csikos (2003)	Hungary	85%
Chacko (2000)	Zimbabwe	>95%
Cnudde et al. (2001)	Chili	>90%
Wu Hongjian (2001)	UK en China	89%

Effect van experimentele manipulaties

- Geen positief effect van het waarschuwen van leerlingen aan het begin van de toets (Yoshida, Verschaffel, & De Corte, 1997)
- Geen positief effect van het toevoegen van illustraties aan de vraagstukken (Dewolf, Van Dooren, Ev Cimen, & Verschaffel, 2017)

Aandacht!
Deze toets bevat
vraagstukken die
moeilijk of helemaal
niet op te lossen zijn
omdat....



Beïnvloedende factoren in klascultuur en -praktijk (Verschaffel e.a., 2000)

- De aard van de vraagstukken waarmee leerlingen dagelijks worden geconfronteerd in hun wiskundelessen en -toetsen
- De manier waarop deze vraagstukken door de leraar worden opgevat en didactisch aangepakt worden in de wiskundelessen

Conclusie 8

- Bevindingen
 - Voor veel leerlingen is het oplossen van vraagstukken een kunstmatig, puzzelachtig spel dat ver verwijderd is van hun dagelijkse leefwereld
 - De neiging tot niet-realistisch modeleren is niet resultaat van expliciet onderwijs, maar van een impliciet “enculturatie”-proces
- Implicaties
 - Onderken de neiging tot niet-realistisch modeleren bij leerlingen
 - Tracht via de keuze en presentatie van vraagstukken en de aanpak van het onderwijs errond deze neiging te voorkomen of af te zwakken

Opgave 9



Hell's library (Gary Larson)

McLeod (1982): wiskundige affecten

- Emoties (gevoelens)
- Attituden (houdingen)
- Beliefs (opvattingen)

Negatieve emoties en houdingen jegens vraagstukken

- Vele kinderen hebben negatieve gevoelens (vb. angst) en houdingen (vb. nutteloos, saai) tegenover vraagstukken
- Vraagstukken worden vaak als het meest gehate onderdeel van het wiskundecurriculum bestempeld
- Deze negatieve gevoelens en houdingen hangen samen met slechte prestaties op vraagstukken

Ramirez e.a. (2013). Math anxiety, working memory, and math Achievement in early elementary school. *Journal of Cognition and Development*, 14(2), 187-202.

Schadelijke opvattingen over vraagstukken

- Als je de oplossing op een vraagstuk niet meteen weet, heeft het weinig zin daar lang naar te zoeken
- Zelf de oplossing vinden op een vraagstuk, is iets wat enkel voor de wiskundige bollebozen is weggelegd
- Elk vraagstuk heeft één enkel correct antwoord
- Dat antwoord bestaat altijd uit een precies getal
- De tekst bevat alle nodige informatie; je mag geen info gebruiken die niet vermeld staat
- Bij het oplossen van een vraagstuk dien je je ervaringskennis over de probleemsituatie te negeren

Uitleg van leerlingen na het geven van een NR op een P-item (Reusser & Stebler, 1997)

“Ik voelde wel dat er iets vreemds aan de hand was met dit vraagstuk, maar ik heb toch maar een getal opgeschreven. Een vraagstuk moet toch een getal als uitkomst hebben, nietwaar?”



“Ik weet wel dat je touwen moet knopen, maar ik zou er nooit aan denken om die kennis te gebruiken wanneer ik een vraagstuk oplos. Bij vraagstukken gaat het daar immers niet om. Je moet gewoon op zoek gaan naar de som die in het vraagstuk zit en die moet je dan juist uitrekenen. Dat is je taak en niets anders!”

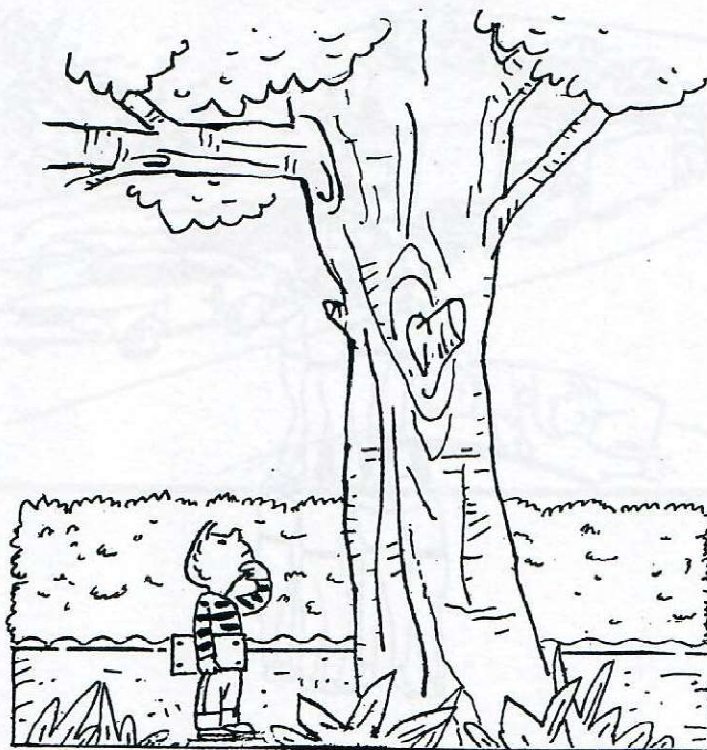


Conclusie 9

- Bevindingen
 - Of leerlingen een vraagstuk kan oplossen en hoe zij dat doen, hangt sterk samen met hun affecten
- Implicaties
 - Goed vraagstukkenonderwijs heeft niet enkel oog voor de (meta)cognitieve kant van het leerproces, maar ook voor de affectieve kant

Opgave 10

Wim wil een schommel maken aan een tak van een dikke, oude boom achterin de tuin. Deze tak hangt 5 meter boven de grond. Wim heeft al een geschikte houten plank gezaagd die als zitje van de schommel dienst kan doen. Nu staat Wim in de doe-het-zelfwinkel om touw te kopen. Hoeveel meter touw zou Wim best kopen voor deze schommel?

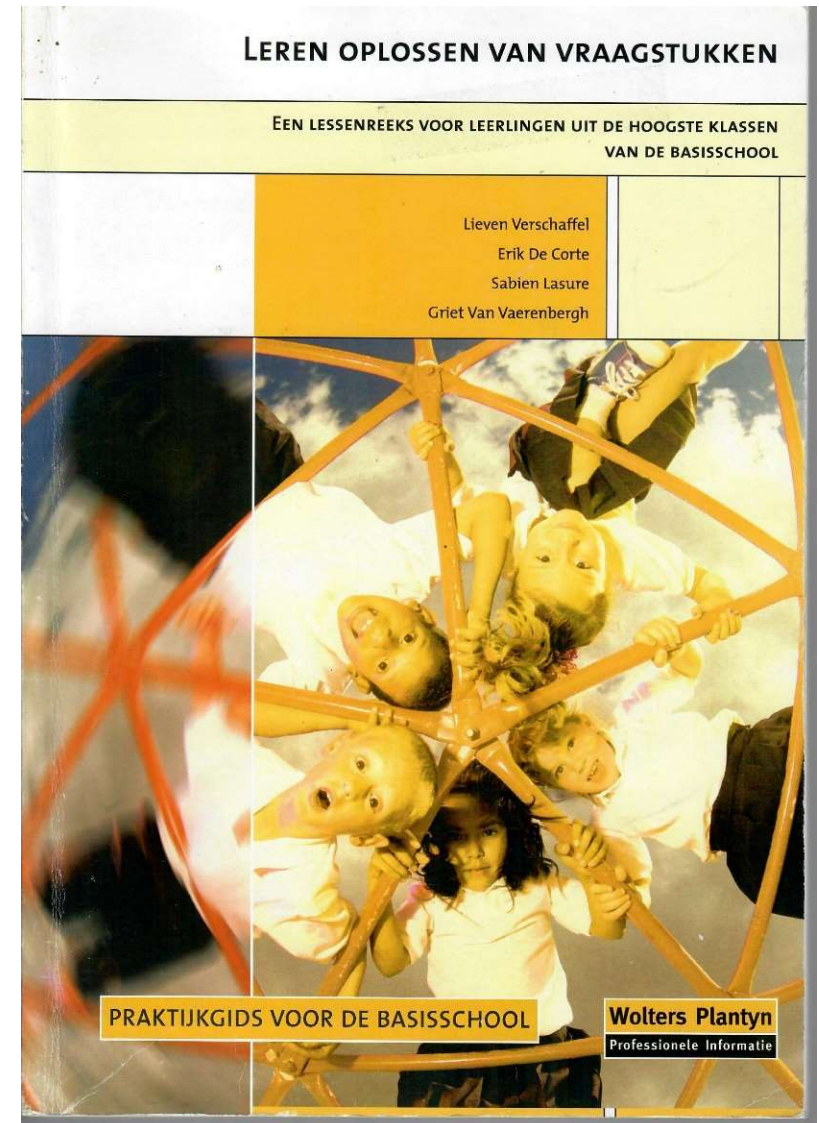


Opgave 10

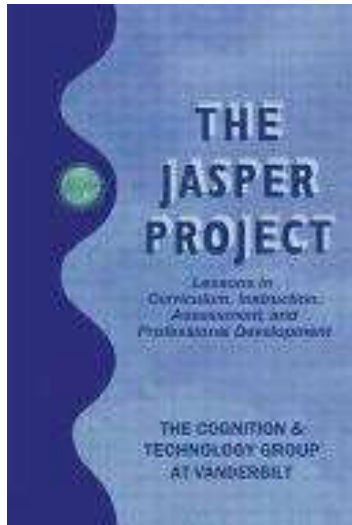
Wim wil een schommel maken aan een tak van een dikke, oude boom achterin de tuin. Deze tak hangt 5 meter boven de grond. Wim heeft al een geschikte houten plank gezaagd die als zitje van de schommel dienst kan doen. Nu staat Wim in de doe-het-zelfwinkel om touw te kopen. Hoeveel meter touw zou Wim best kopen voor deze schommel?



In een Spaans dorpje bestaat de traditie dat elk jaar op 1 augustus de jonge mannen uit het dorp die tussen 20 en 30 jaar zijn een piramide bouwen door op elkaars schouders te gaan staan zoals op de tekening hieronder. Hoe hoog wordt die piramide ongeveer als de piramide 4 man hoog is?



De “Jasper series” van de C&TG te Vanderbilt (1992)



The Jasper Series



Complex Trip Planning
[Journey to Cedar Creek](#)
[Rescue at Boone's Meadow](#)
[Get Out the Vote](#)



Statistics and Business Plans
[The Big Splash](#)
[Bridging the Gap](#)
[A Capital Idea](#)



Geometry
[Blueprint for Success](#)
[The Right Angle](#)
[The Great Circle Race](#)



Algebra
[Working Smart](#)
[Kim's Comet](#)
[The General is Missing](#)

Each classroom disc continues 4 key options:

Menu options

Adventure Video

▶ **ADVENTURE VIDEO:** This video is the original Jasper story and challenge. The adventure may be played with subtitles in either English or Spanish.

▶ **MAP SEARCH TOOL:** This tool provides a visual way to select the scenes from the adventure making it easy to revisit the video during problem solving.

▶ **DIALOGUE SEARCH TOOL:** Use keywords listed in the adventure to return to that scene.

▶ **ANALOGOUS PROBLEMS:** This section takes the original Jasper story problem and alters it in various ways to create new problems. The analogs provide additional experience with problems similar to those solved during the adventure and extend learning into related topics.

Pijlers van de leeromgevingen

- Realistische en uitdagende taken
- Krachtige onderwijsleeractiviteiten
- Een veilig en positief klasklimaat

Onderzoekresultaten

- Het is mogelijk om bij basisschoolleerlingen de vaardigheid in het authentisch wiskundig modelleren te bevorderen evenals de bijhorende affecten
- Ook bij jonge en rekenzwakke leerlingen
- De leer- en transfereffecten zijn meestal niet spectaculair
- En vereisen zware en langdurige inspanningen

Conclusie 10

- Bevindingen
 - Basisschoolleerlingen kunnen leren wiskundig modeleren, maar enkel mits grote en langdurige inspanningen kunnen (beperkte) resultaten worden bereikt
- Implicaties
 - Leren wiskundig modelleren verdient een (ere)plaats in de basisschool
 - Om te leren wiskundig modeleren volstaan klassieke vraagstukkenlessen zeker niet
 - Dit vergt grote inspanningen van de leraar, i.t.v. motivatie, wiskundige en wiskundedidactische competentie (CK en PCK), klasmanagementvaardigheden... (Niss, 2001)

Einde

contact: lieven.verschaffel@kuleuven.be