

Algebraïsch redeneren in het basisonderwijs

Mara Otten

Universiteit Utrecht / iPabo Amsterdam-Alkmaar

Begeleiders:

Prof. Dr. Marja van den Heuvel Panhuizen (Universiteit Utrecht)

Dr. Michiel Veldhuis (Universiteit Utrecht)

Prof. Dr. Aiso Heinze (IPN Kiel)

Opzet parallellezing

Meenemen door mijn promotieonderzoek:

- Grotere onderzoeksproject Beyond Flatland
- Achtergrond van mijn onderzoek over algebraïsch redeneren op de basisschool
- 4 deelstudies
- Overkoepelende conclusies en aanbevelingen

Beyond Flatland Project

Doel: meer wiskundig redeneren op de basisschool introduceren
→ Stimuleren van de hogere-orde denkvaardigheden

We richten ons op groep 7

Drie **wiskundige domeinen:**

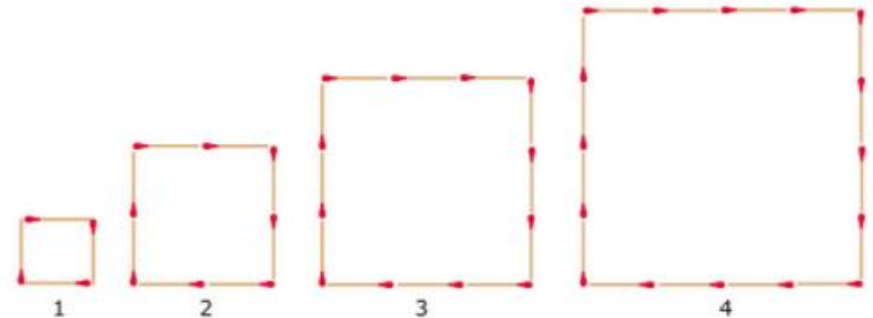
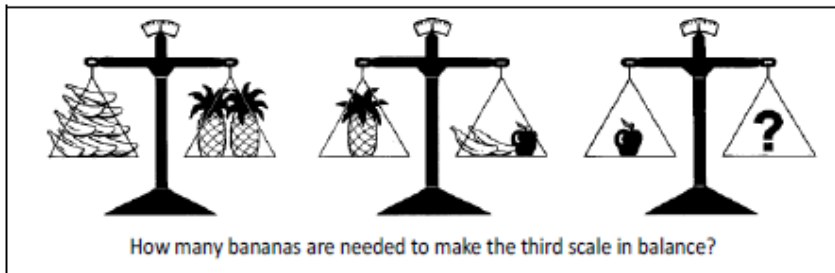
- Grafieken (modelleren van dynamische data)
- Kans
- Algebra

Algebraïsch redeneren

- Algebra-onderwijs start in Nederland op de middelbare school
- Gemiste kans: veel bewijs dat jonge kinderen in staat zijn om algebraïsch te redeneren (Blanton et al., 2015; Kaput et al., 2008; Van den Heuvel-Panhuizen et al., 2013)
 - vb. 10-jarigen die vergelijkingen als $2T + 7 = T + 20$ oplossen (Brizuela & Schliemann, 2004)
- Continue leerlijn (basis voor de formele algebra)
- Stimuleren van hogere-orde denkvaardigheden

Pre-algebra

- Pre-algebra (Engels: Early algebra, Carraher et al., 2008)
- Belangrijk: niet het eerder starten met formele algebra



~~$$\begin{aligned} 10Y &= 2X \\ X &= 2Y + Z \\ Z &= \dots Y? \end{aligned}$$~~

Promotieonderzoek

- **Doel:** inzicht krijgen in of, hoe en in hoeverre het algebraïsch redeneren van basisschoolleerlingen gestimuleerd kan worden
- Richten op het redeneren over informele lineaire vergelijkingen het ontwikkelen van strategieën om deze vergelijkingen op te lossen
- Lessenserie
- Balansmodel



Deelstudie 1

- Literatuurstudie naar het gebruik van het balansmodel:
 - Rationales
 - Verschijningsvormen
 - Situaties
 - Leeruitkomsten



1322 artikelen afkomstig uit 92 onderzoekstijdschriften

Deelstudie 1

- Resultaat: Overzicht van het gebruik van het balansmodel → zeer gevarieerd beeld
 - **Rationales**
 - Verschijningsvormen
 - Situaties
 - Leeruitkomsten

+ Concept **gelijkheid** en strategieën voor behouden van gelijkheid

+ Fysieke ervaringen

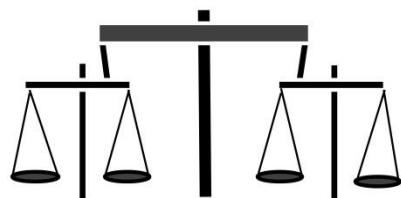
- Vergelijkingen met negatieve getallen en aftrekken

Deelstudie 1

- Resultaat: Overzicht van het gebruik van het balansmodel → zeer gevarieerd beeld
 - Rationales
 - **Verschijningsvormen**
 - Situaties
 - Leeruitkomsten



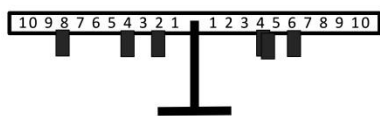
a. Fyfe et al. (2015)



c. Orlov (1971)

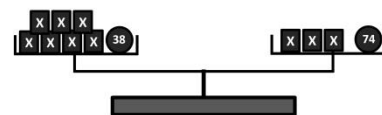


b. Austin & Vollrath (1989)

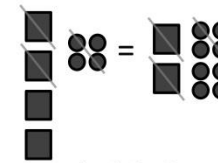


d. Perry et al. (1995)

Fysieke modellen (concreet)

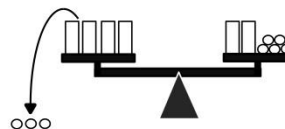


a. Vlassis (2002)

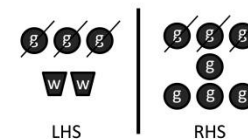


$$4x + 4 = 2x + 8$$

d. Rystedt et al. (2016)



b. Marschall & Andrews (2015)



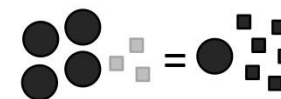
LHS

RHS

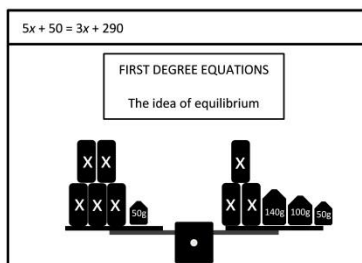
e. Boulton-Lewis et al. (1997)



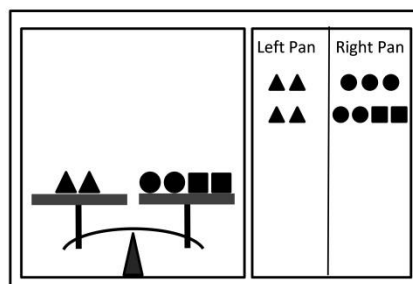
c. Warren & Cooper (2009)



f. Caglayan & Olive (2010)



a. Figueira-Sampaio et al. (2009)



b. Kaplan & Alon (2013)

Getekende modellen (op papier)

Virtuele modellen (digitaal)

Deelstudie 1

- Resultaat: Overzicht van het gebruik van het balansmodel → zeer gevarieerd beeld
 - Rationales
 - Verschijningsvormen
 - **Situaties**
 - Leeruitkomsten

- Leeftijden
- Ervaring met algebra
- Soorten vergelijkingen:
 $3 + 4 + 5 = \underline{\quad} + 5$
 $10x - 18 = 4x$

Deelstudie 1

- Resultaat: Overzicht van het gebruik van het balansmodel → zeer gevarieerd beeld
 - Rationales
 - Verschijningsvormen
 - Situaties
 - **Leeruitkomsten**

- Zeer uiteenlopend en grote verscheidenheid in studies
- (heel) voorzichtig enige trends af te leiden

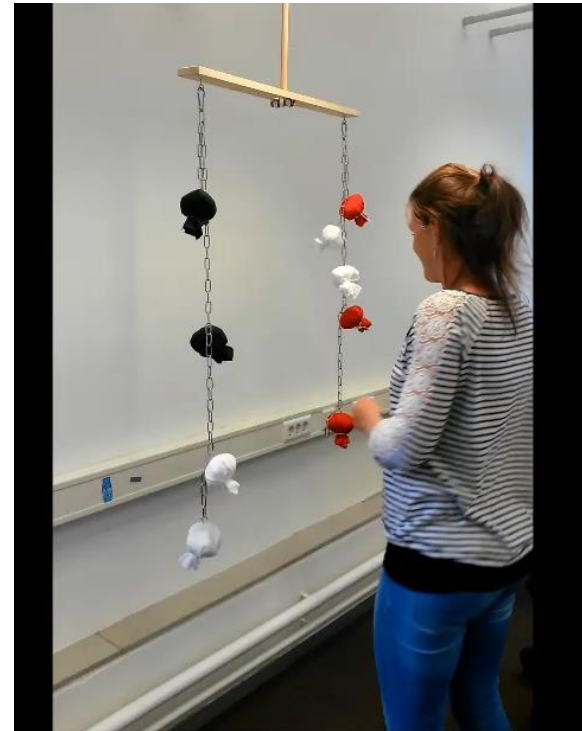
Deelstudie 1

Conclusies:

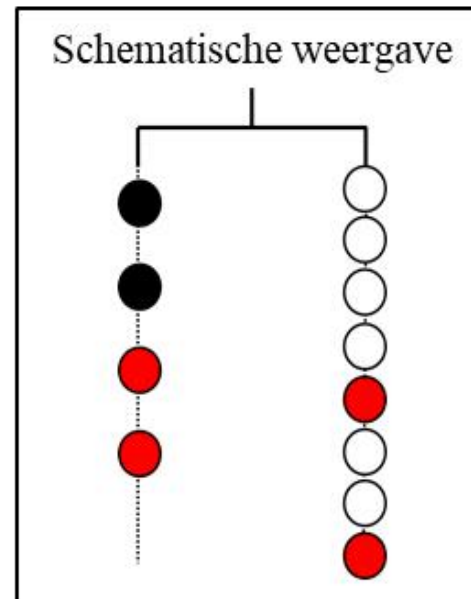
- Precieze kennis ontbreekt over welk type balansmodel in welke situatie leidt tot de beste leeruitkomsten
- Verder onderzoek is nodig om dit model optimaal in te kunnen zetten voor het leren oplossen van vergelijkingen

De lessenserie

- Doel promotieonderzoek: inzicht krijgen in of, hoe en in hoeverre het algebraïsch redeneren van basisschoolleerlingen gestimuleerd kan worden
- Lessenserie (6 lessen) over informele lineaire vergelijkingen het ontwikkelen van strategieën om deze vergelijkingen op te lossen
- Balansmodel stond centraal: hangmobiel



Lessenserie – lessen 1 en 2

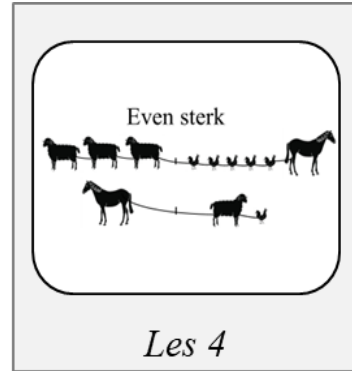
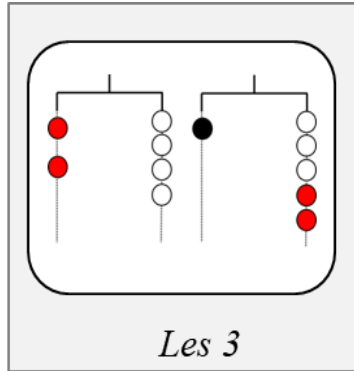


Embodied cognition

(Gallese & Lakoff, 2005;
Lakoff & Johnson, 1980;
Núñez et al., 1999; Wilson,
2002)

“Kan je ontdekken wat je allemaal kan doen, terwijl je zorgt dat de hangmobiel recht blijft?”

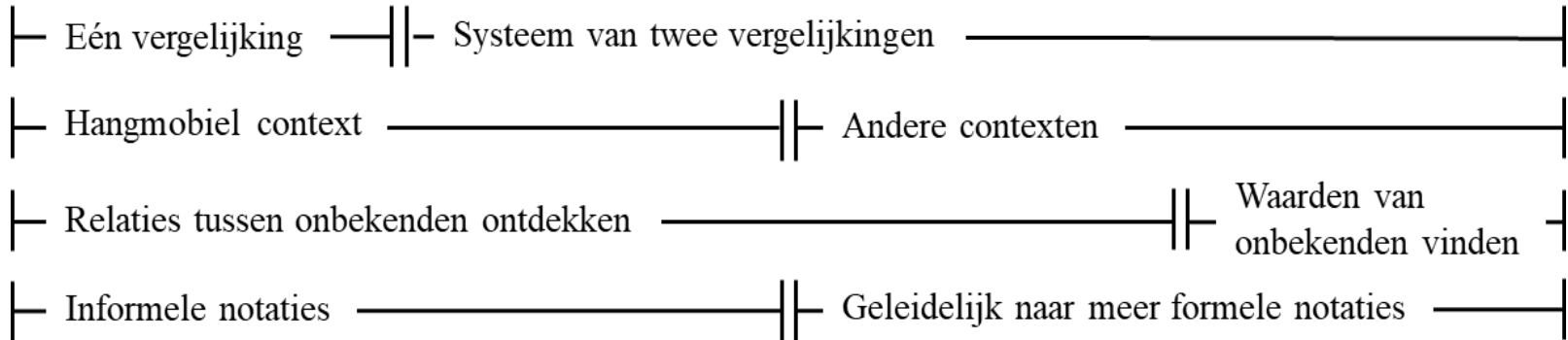
De lessenserie



$$2N+4W+N=36$$

$$2W=3N$$

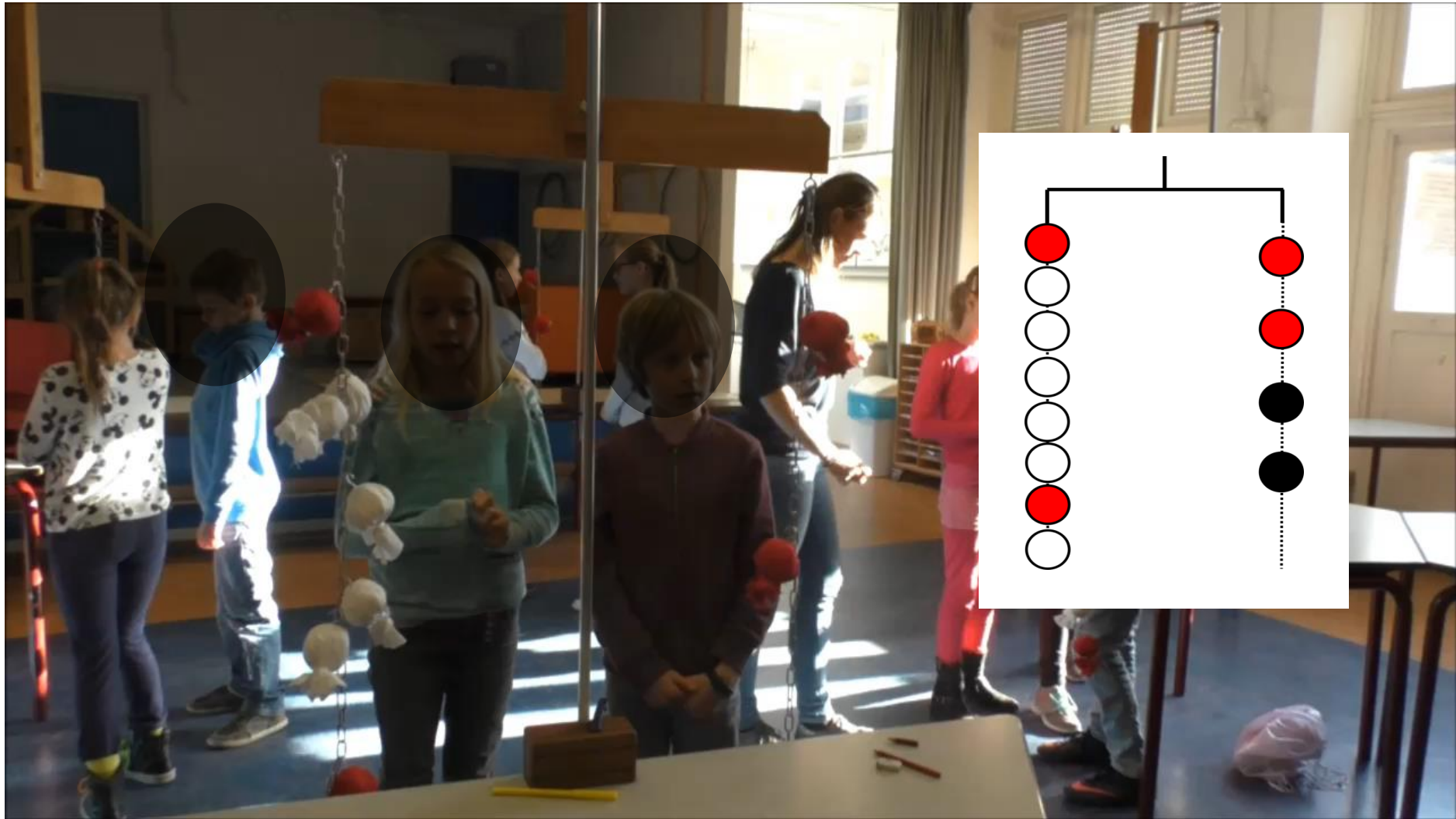
Lessen 5-6



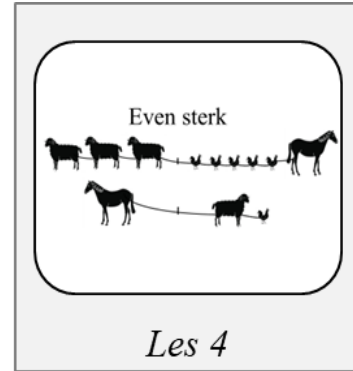
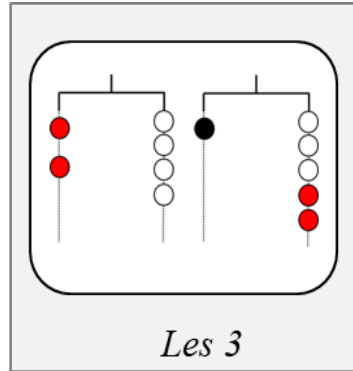
Deelstudie 2

- **Onderzoeksvraag:** Hoe ontwikkelt het algebraïsch redeneren van de leerlingen gedurende de lessenserie met het fysieke balansmodel?
- 65 leerlingen uit groep 7 zonder eerdere ervaring met algebra
- **Data:**
 - Toetsvraag afgenomen na het eind van elke les
 - Video en audio opnames van de lessen
 - Leerlingwerk van tijdens de lessen

Resultaten: Kees en Julia



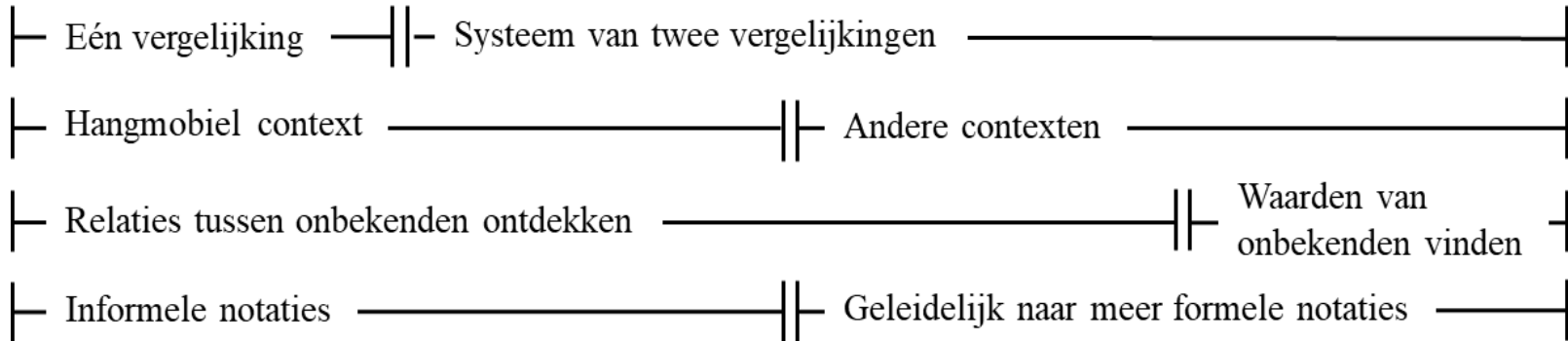
De lessenserie



$$2N+4W+N=36$$

$$2W=3N$$

Lessen 5-6



Resultaten: Julia (na afloop van les 6)

Substitutie van onbekenden door andere onbekenden

$M + 3L = 25$
 $2M = 4L$

$\begin{array}{l} \text{M} \\ \text{L} \\ \text{L} \\ \text{L} \\ \text{L} \end{array} \quad 25 : 5 = 5$
 $\begin{array}{l} \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \\ \text{m} \end{array}$
 $\begin{array}{l} \text{L} \\ \text{L} \\ \text{L} \\ \text{L} \\ \text{L} \end{array} = \begin{array}{l} \text{m} \\ \text{L} \\ \text{L} \\ \text{L} \\ \text{L} \end{array}$

$\begin{array}{l} \text{M} \\ \text{M} \\ \text{M} \end{array} \quad 25$
 $\begin{array}{l} \text{L} \\ \text{L} \\ \text{L} \end{array} = 5 \quad 25 - 5 = 20 : 2 = 10$

Isolatie

Substitutie van onbekenden door waarden

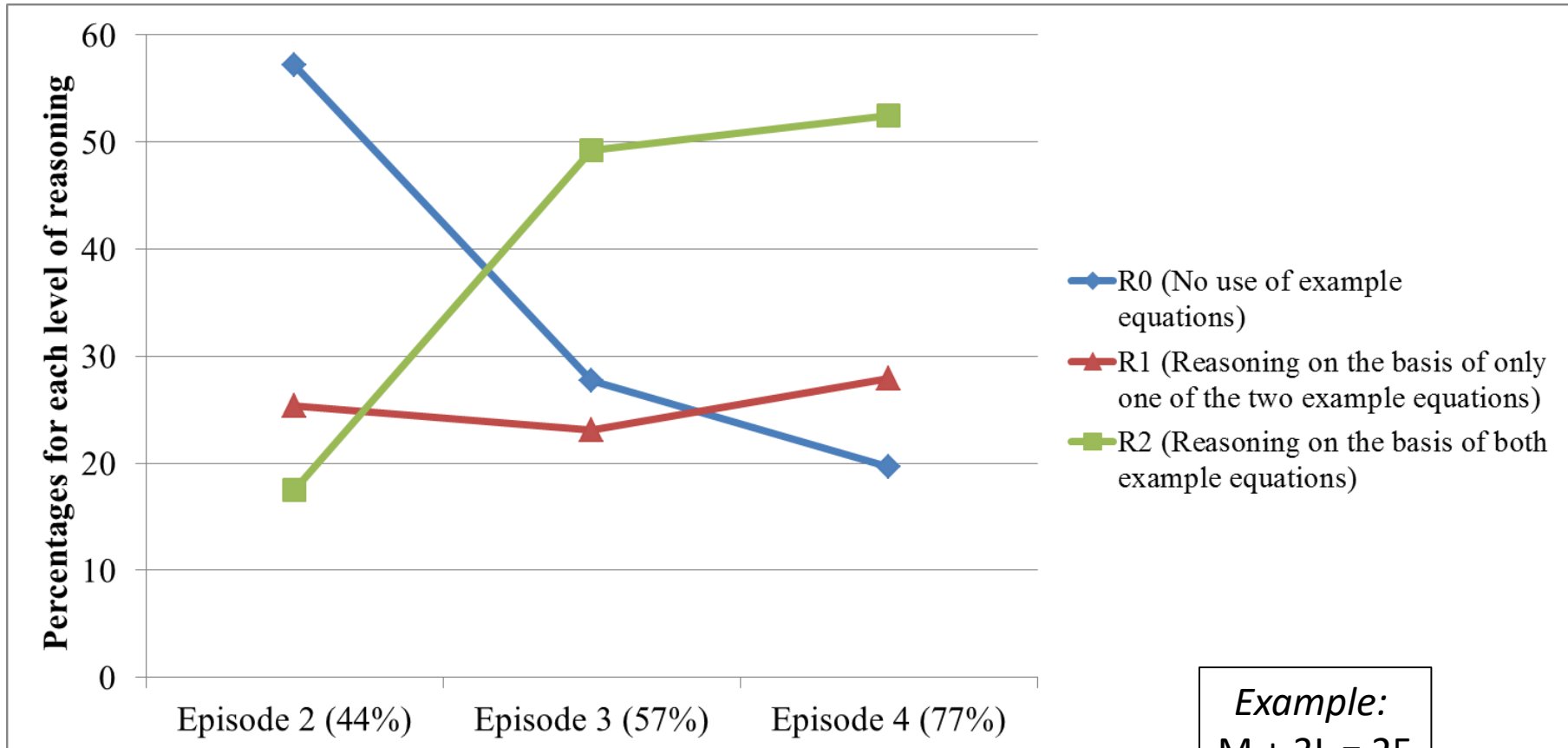
$M = 10 \quad L = 5$

Laat zien hoe je de antwoorden hebt gevonden!

Resultaten

- Aanwijzingen voor een relatie tussen de ervaringen met fysieke balansmodel en algebraïsch redeneren in andere contexten
 - Gebruik van het model
 - Gebruik strategieën
 - Beschrijving in termen van acties

Resultaten



Example:
 $M + 3L = 25$
 $2M = 4L$

Conclusie deelstudie 2

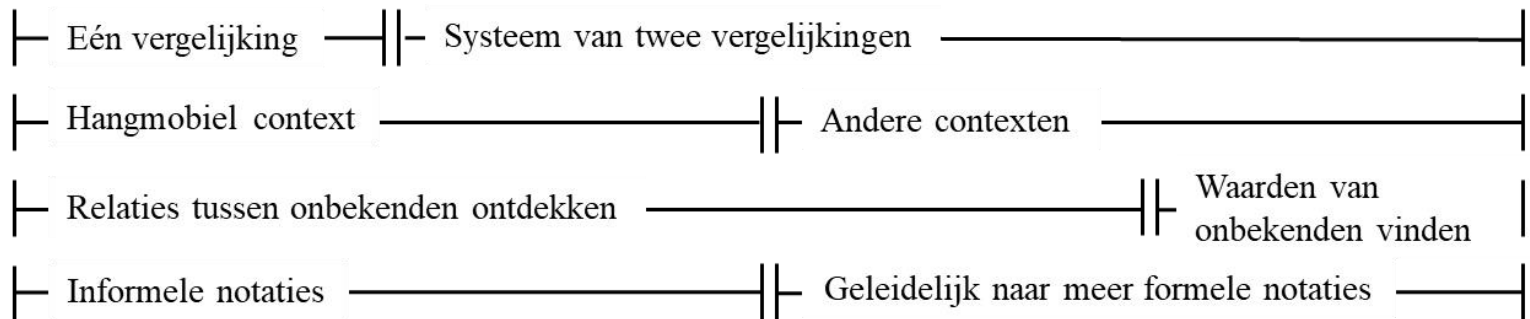
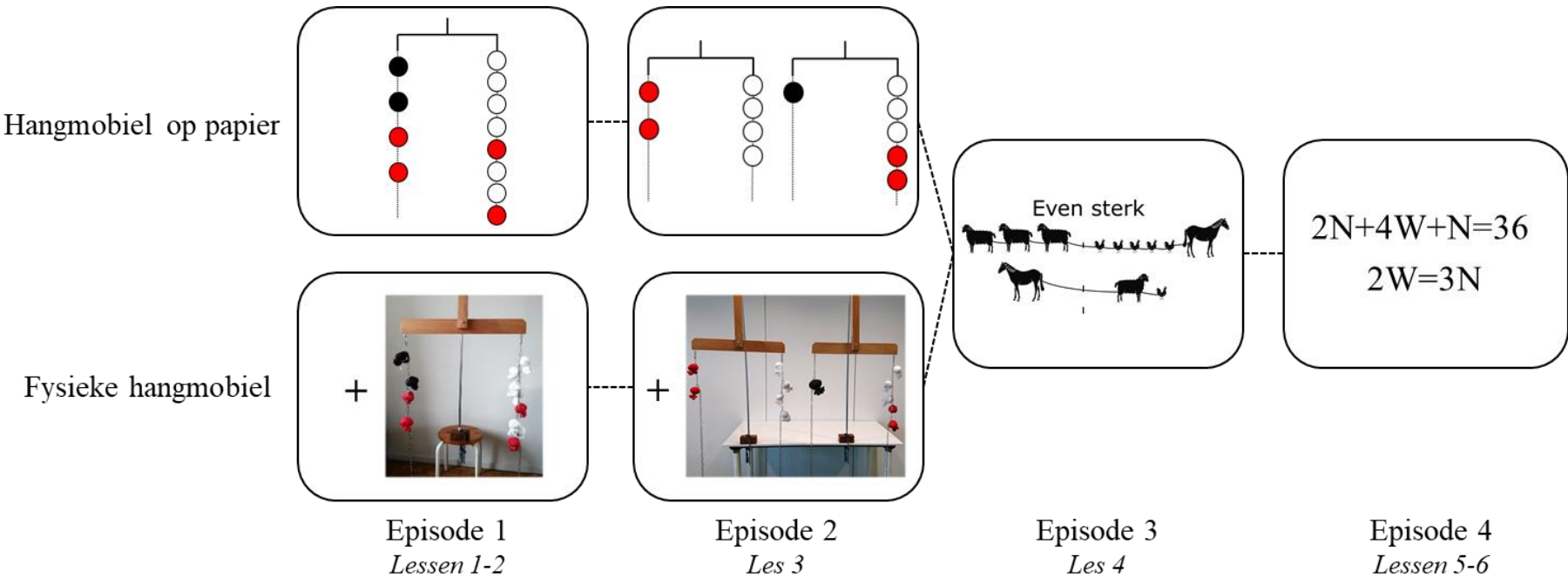
- De leeromgeving met het fysieke balansmodel blijkt een goede context voor het ontwikkelen van algebraïsch redeneren
- Algebraïsch redeneren ging vooruit gedurende de lessenserie
- Exacte aandeel van de ervaringen met het concrete model kan echter niet worden onderzocht

Deelstudie 3

- Onderzoeksvraag: Wat is het effect van het gebruik van verschillende representaties van het balansmodel?
- Theorie van embodied cognition (Gallese & Lakoff, 2005; Lakoff & Johnson, 1980; Núñez et al., 1999; Wilson, 2002)



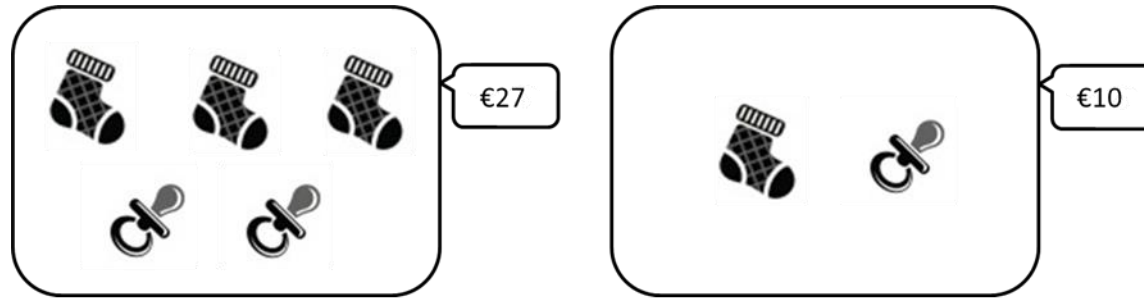
Quasi-experimenteel design



Onderzoeksdesign

	Cohort	Meting 1 Okt '16	Nov–Dec '16	Meting 2 Dec. '16	Feb–Maart '17	Meting 3 Maart '17	Mei-Juni '17	Meting 4 Juni '17
Balans model op papier (conditie 1)	1	M1	Lessenserie	M2		M3		M4
	2	M1		M2	Lessenserie	M3		M4
	3	M1		M2		M3	Lessenserie	M4
Fysiek balans model (conditie 2)	1	M1	Lessenserie	M2		M3		M4
	2	M1		M2	Lessenserie	M3		M4
	3	M1		M2		M3	Lessenserie	M4
Controle conditie	4	M1		M2		M3		M4

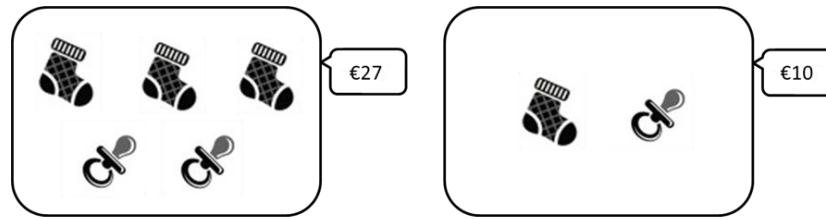
Gekeken naar de ontwikkeling in redeneren gedurende het schooljaar



12a. Vul in:



12b. Hoe weet je dit?



12a. Vul in:



12b. Hoe weet je dit?

Geen van de vergelijkingen gebruiken in redeneren [R0]

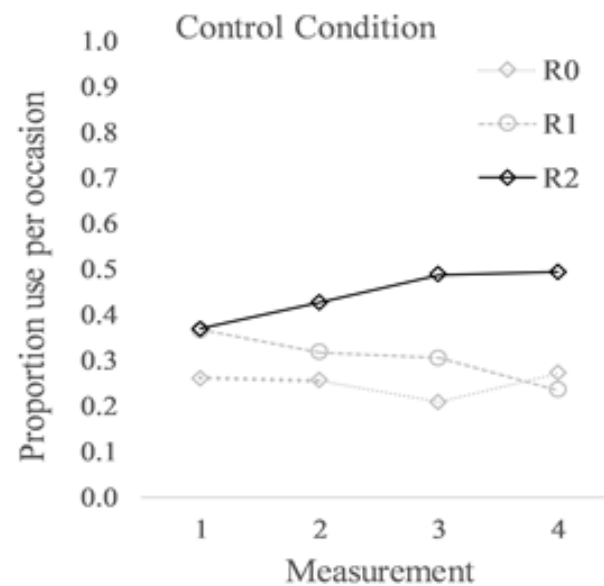
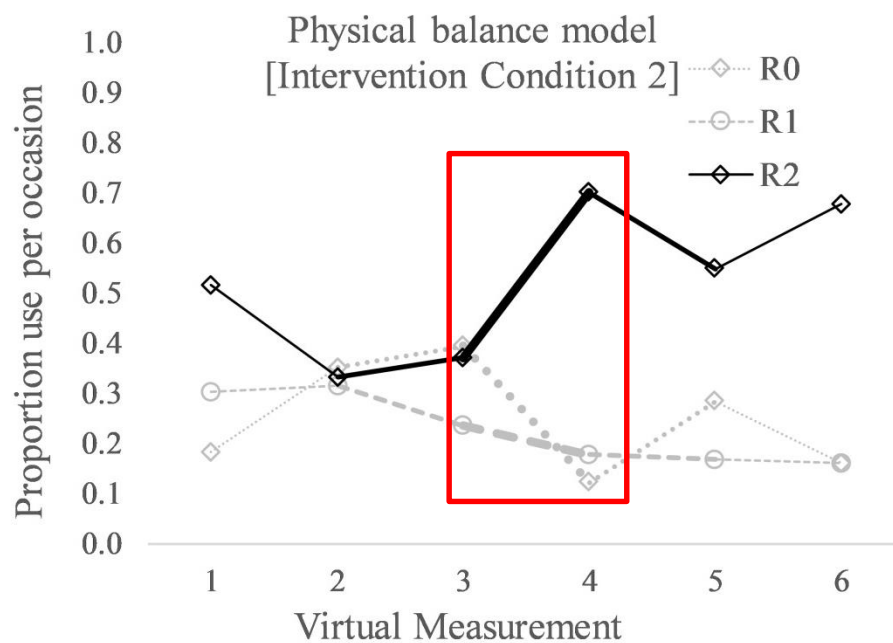
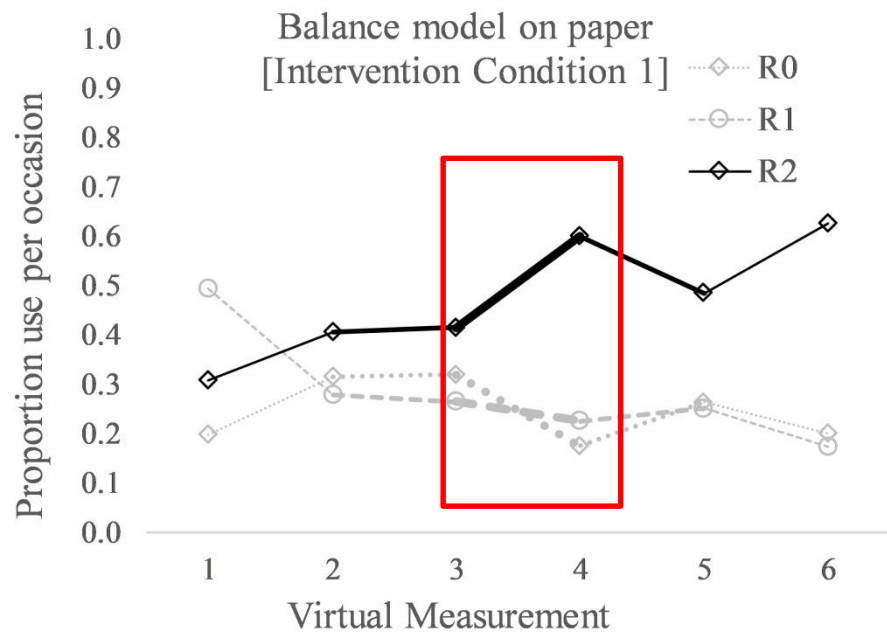
Redeneren op basis van één vergelijking [R1]

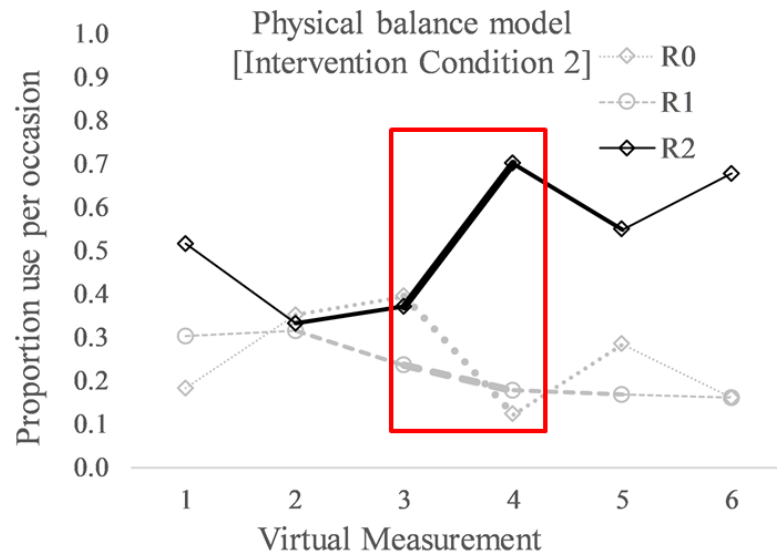
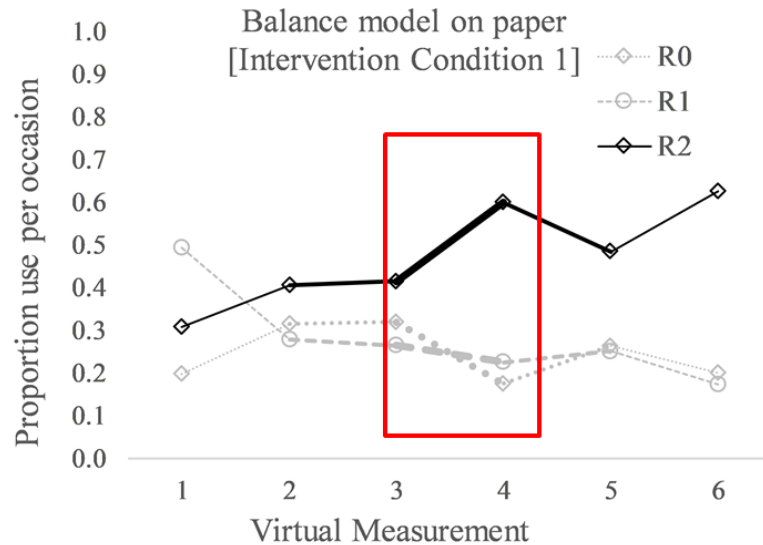
Redeneren op basis van allebei de vergelijkingen [R2]

Je moet gewoon makkelijk rekenen

Je neemt de helft. En dus is het $5+5 = 10$.

De tweede past in de eerste. Dan doe je $10 + 10 = 20$, en dan heb je bij deze nog een sokje over. Dus het sokje is 7. En dan is de speen 3





Resultaten (statistisch model)

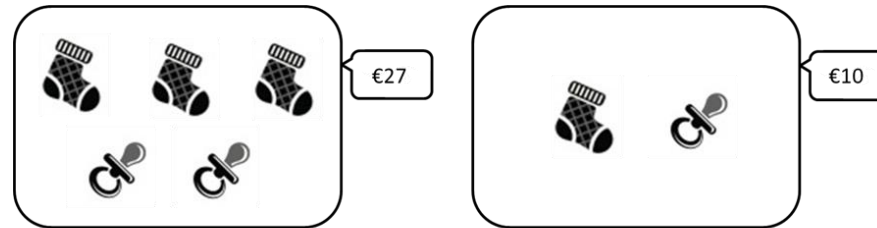
- Deelname aan de lessen leidde tot een hoger niveau van redeneren over systemen van twee informele lineaire vergelijkingen
- Verschil tussen de condities blijkt niet significant ($p = .136$)
- Kwalitatieve analyse: na werken met fysiek model:
 - vaker een representatie van het model (17% vs. 1%)
 - vaker geavanceerde algebraïsche strategieën zoals substitutie (60% vs. 40%)

Conclusies deelstudie 3

- Duidelijk effect van de lessen op het redeneren over vergelijkingen
- Meer onderzoek is nodig naar de mogelijke bijdrage van fysieke ervaringen

Deelstudie 4

- Redeneren over systemen van vergelijkingen vraagt om redeneren over de samenhang tussen bepaalde variabelen (redeneren over covariantie)



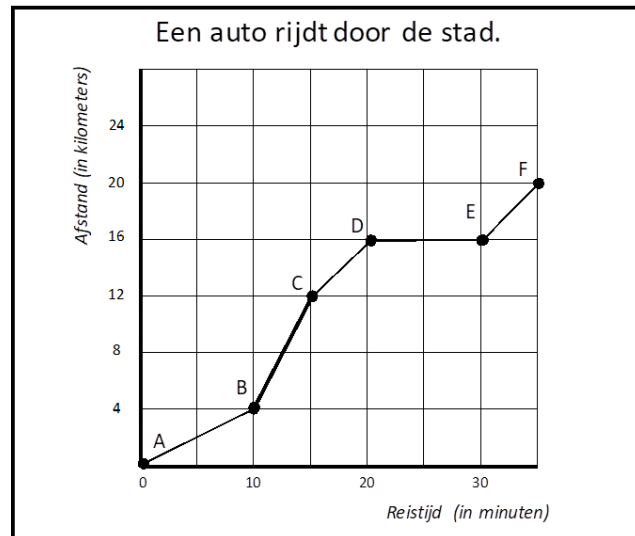
12a. Vul in:



12b. Hoe weet je dit?

Deelstudie 4

- Dit redeneren over covariantie is ook relevant binnen andere wiskundige domeinen, zoals grafieken van beweging (Leinhardt et al., 1990).



1a. Tussen welke punten gaat de auto het snelst?

1b. Hoe weet je dit?

Deelstudie 4

- Leidt het stimuleren van het redeneren over vergelijkingen mogelijk ook tot een verbetering in het redeneren over grafieken?

	Cohort	Meting 1 Okt '16	Nov–Dec '16	Meting 2 Dec. '16	Feb–Maart '17	Meting 3 Maart '17	Mei-Juni '17	Meting 4 Juni '17
Balans model op papier (conditie 1)	1	M1	Lessenserie	M2		M3		M4
	2	M1		M2	Lessenserie	M3		M4
	3	M1		M2		M3	Lessenserie	M4
Fysiek balans model (conditie 2)	1	M1	Lessenserie	M2		M3		M4
	2	M1		M2	Lessenserie	M3		M4
	3	M1		M2		M3	Lessenserie	M4
Controle conditie	4	M1		M2		M3		M4

Deelstudie 4

Conclusie:

- Deelname aan lessen over vergelijkingen leidt niet tot een verbetering in het grafisch redeneren
- Alleen verbetering in het algebraïsch redeneren, oftewel in de hogere-orde denkvaardigheden (HOV) gerelateerd aan vergelijkingen.
- De overdracht van HOV van het ene wiskundige domein naar een (gerelateerd) ander wiskundig domein lijkt dus niet vanzelfsprekend.

Conclusie

- Algebraïsch redeneren van leerlingen in het basisonderwijs stimuleren kan!
- Neem algebra op in het reken-wiskunde curriculum op de basisschool
- Leidt tot:
 - Doorlopende leerlijnen (curriculum.nu, 2019)
 - Stimuleren van wiskundige hogere-orde denkvaardigheden

Maar... wel een aantal uitdagingen!

1. Meer zicht nodig op hoe het redeneren het best gestimuleerd kan worden
2. Curriculum is al overvol → integreer!
3. Ondersteun de leerkrachten
4. Zorg dat dit soort activiteiten voor *alle* leerlingen zijn

Referenties gerelateerd aan proefschrift

- Deelstudie 1:** Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Veldhuis, M. (2019). The balance model for teaching linear equations: A systematic literature review. *International Journal of STEM Education*, 6(1), 30–51.
<https://doi.org/10.1186/s40594-019-0183-2>
- Deelstudie 2:** Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., & Heinze, A. (2019). Developing algebraic reasoning in primary school using a hanging mobile as a learning supportive tool / El desarrollo del razonamiento algebraico en educación primaria utilizando una balanza como herramienta de apoyo. *Journal for the Study of Education and Development / Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 615–663.
<https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1612137>
- Deelstudie 3:** Otten, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Boom, J., & Heinze, A. (2020). Are physical experiences with the balance model beneficial for students' algebraic reasoning? An evaluation of two learning environments for linear equations. *Education Sciences*, 10(6), 163. <https://doi.org/10.3390/educsci10060163>
- Deelstudie 4:** Otten, M., Duijzer, C., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Veldhuis, M., Boom, J., Doorman, M., & Leseman, P. (2020). Fifth grade students' reasoning on linear equations and graphing motion. In M. Otten, *Algebraic reasoning in primary school: A balancing act*. [Doctoral dissertation]. Utrecht University.
- Proefschrift:** Otten, M. (2020). Algebraic reasoning in primary school: A balancing act [doctoral dissertation]. Utrecht University <http://dspace.library.uu.nl/handle/1874/400332>

Overige referenties

- Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education*, 46(1), 39–87. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.46.1.0039>
- Brizuela, B., & Schliemann, A. (2004). Ten-year-old students solving linear equations. *For the Learning of Mathematics*, 24(2), 33–40.
- Carraher, D. W., Schliemann, A. D., & Schwartz, J. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 235–272). Lawrence Erlbaum Associates.
- Curriculum.nu (2019, oktober). Leergebied rekenen & wiskunde. Opgehaald van [https://www.curriculum.nu/voorstellen/rekenen-wiskunde/Gallese, V., & Lakoff, G. \(2005\). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 22\(3-4\), 455–479. <https://doi.org/10.1080/02643290442000310>](https://www.curriculum.nu/voorstellen/rekenen-wiskunde/Gallese,V.,&Lakoff,G.(2005).Thebrain'sconcepts:The roleofthesensory-motorsysteminconceptualknowledge.CognitiveNeuropsychology,22(3-4),455-479.https://doi.org/10.1080/02643290442000310)
- Gallese, V., & Lakoff, G. (2005). The brain's concepts: The role of the sensory-motor system in conceptual knowledge. *Cognitive Neuropsychology*, 22(3-4), 455–479. <https://doi.org/10.1080/02643290442000310>
- Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lakoff, G., & Johnson, M. (1980). Conceptual metaphor in everyday language. *The Journal of Philosophy*, 77(8), 453–486. <https://doi.org/10.2307/2025464>
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1–64. <https://doi.org/10.3102/00346543060001001>
- Núñez, R. E., Edwards, L. D., & Matos, J. F. (1999). Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 39(1–3), 45–65. <https://doi.org/10.1023/A:1003759711966>
- Van den Heuvel-Panhuizen, M., Kolovou, A., & Robitzsch, A. (2013). Primary school students' strategies in early algebra problem solving supported by an online game. *Educational Studies in Mathematics*, 84(3), 281–307. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9483-5>
- Wilson, M. (2002). Six views of embodied cognition. *Psychonomic Bulletin & Review*, 9(4), 625–636. <https://doi.org/10.3758/BF03196322>

Bedankt voor de aandacht!
Zijn er nog vragen?

Mara Otten
m.otten@ipabo.nl