



-
-
-

Wiskundig denken, juist ook voor zwakkere rekenaars

SLO • nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling

Panamaconferentie 2020
10 januari 2020

Anneke Noteboom (SLO)

slo

Uit het panamaboekje

- Wat bedoelen we met wiskundig denken?
- Hoe kun je rijke rekenvragen formuleren die het wiskundig denken stimuleren?
- Hoe gaan zwakkere rekenaars met succes om met wiskundige problemen? Wat is het effect hiervan op hun zelfvertrouwen en zelfverzekering?
- Hoe kunnen leraren hun lessen aanpassen om het wiskundig denken van zwakkere rekenaars rijker te maken?
- Hoe kunnen wij leraren verleiden en ondersteunen om juist ook zwakke rekenaars van wiskundige denkactiviteiten te laten leren?

- **Wat bracht jou ertoe hiervoor te kiezen?**
- **Welke aanvullende vragen en wensen heb je hierbij?**

Even een tussendoortje...



Wij hebben een feestje zaterdag!
In ons gezin zijn we dan precies 100 jaar!
Kom je ook?



Denk eens even mee, hoe kan ons gezin dan samengesteld zijn?

- Wat vind je meer en minder voor de hand liggen?
- Maar ik heb gehoord dat... (restricties of condities):
 - Ze hebben allemaal een oneven leeftijd!
 - Het oudste en jongste kind schelen meer dan 10 jaar!
 - Er zit een tweeling bij!
- Wat denk je waar kinderen mee komen en specifiek zwakkere rekenaars? Hoe gaan ze te werk?



Wij hebben een feestje zaterdag!
 In ons gezin zijn we dan precies 100 jaar!
 Kom je ook?



Hoe oud zijn we dan ieder?

Weet je meer mogelijkheden?

4 personen

$$4 \cdot 10 = 2 \cdot 20$$

$$10 + 9 + 39 + 38 =$$

$$19 + 77 = 95$$

$$11 + 11 + 39 + 39$$

$$22 + 78 = 100$$

1 PAPA

1 moeder

2 kinderen

1 baby (3 maanden oud)

40 en 46

en 4 en 10 en 0

papa en mama

een tweeling

en twee kinderen

die niet even oud zijn

en een hond

~~70~~ 70 20

2 11 5

grote ontkin



Mees, groep 5a

Keano, groep 6a

slo



Wij hebben een feestje zaterdag!
In ons gezin zijn we dan precies 100 jaar!
Kom je ook?



Hoe oud zijn we dan ieder?
Weet je meer mogelijkheden?

10 jaar 10 jaar 10 jaar 10 jaar 10 jaar 10 jaar 10 jaar 10 jaar 10 jaar 10 jaar	50 jaar 50 jaar	40 jaar 40 jaar 30 jaar 30 jaar 10 jaar 10 jaar 10 jaar 0 jaar 10 jaar 0 jaar
		papa + 4 kinderen 60 jaar 6 jaar 14 jaar 10 jaar 10 jaar 20

Lynn, groep 5b

Naam: Iman

Groep: 6



Wij hebben een feestje zaterdag!
In ons gezin zijn we dan precies 100 jaar!
Kom je ook?



Wat heb je geleerd van deze opdracht?

Optellen om een gezin 100 jaar bij elkaar maken,
na gedacht aan de leeftijden Bijv; mama 20 en papa 20 en kind 20?

50 30 20

papa + mama
een tweeling
en een baby

~~20 20~~ ~~20 20~~ 20 20
20 20 20 20 0

10 10 10 20 10
0
40

1. Wat bedoelen we met wiskundig denken?

Probleemoplossen:

Een reken-wiskundig probleem is een opgave waarvoor de leerling geen standaard aanpak paraat heeft en dus niet direct weet hoe hij of zij te werk moet gaan (Van Zanten).

- Construct
- De kern en de essentie van wiskundig denken is het oplossen van de belangrijkste problemen (Drijvers, 2015; Mason et al., 2009; Schoenfeld, 1984)
- Omvat rekenwiskundig probleemoplossen, modelleren, kritisch denken en creatief denken (Drijvers, 2015; Van Zanten, 2017)
- Wiskundig denken is bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt gebruiken om een probleem aan te pakken (Drijvers, 2015)
- Probleemoplossen, Logisch en kritisch denken en redeneren binnen de wiskundige context

Even een tussendoortje...



Wij hebben een feestje!
In ons gezin zijn vier kinderen.
Kom je ook?

Denk eens even mee, want...

- Wat vind je leuk aan dit soort problemen?
 - Maar ik heb gehoord dat dit moeilijk is!
 - Ze hebben allemaal een oneven leeftijd!
 - Het oudste en jongste kind schelen meer dan 10 jaar!
 - Er zit een tweeling bij!
 - Wat denk je waar kinderen mee komen en specifiek zwakkere rekenaars? Hoe gaan ze te werk?
- Wat leren kinderen bij het oplossen van dit soort problemen?
 - Wat levert het stellen van restricties op?
 - Lukt dit wiskundig denken uit?

Wat bedoelen we met wiskundig denken?

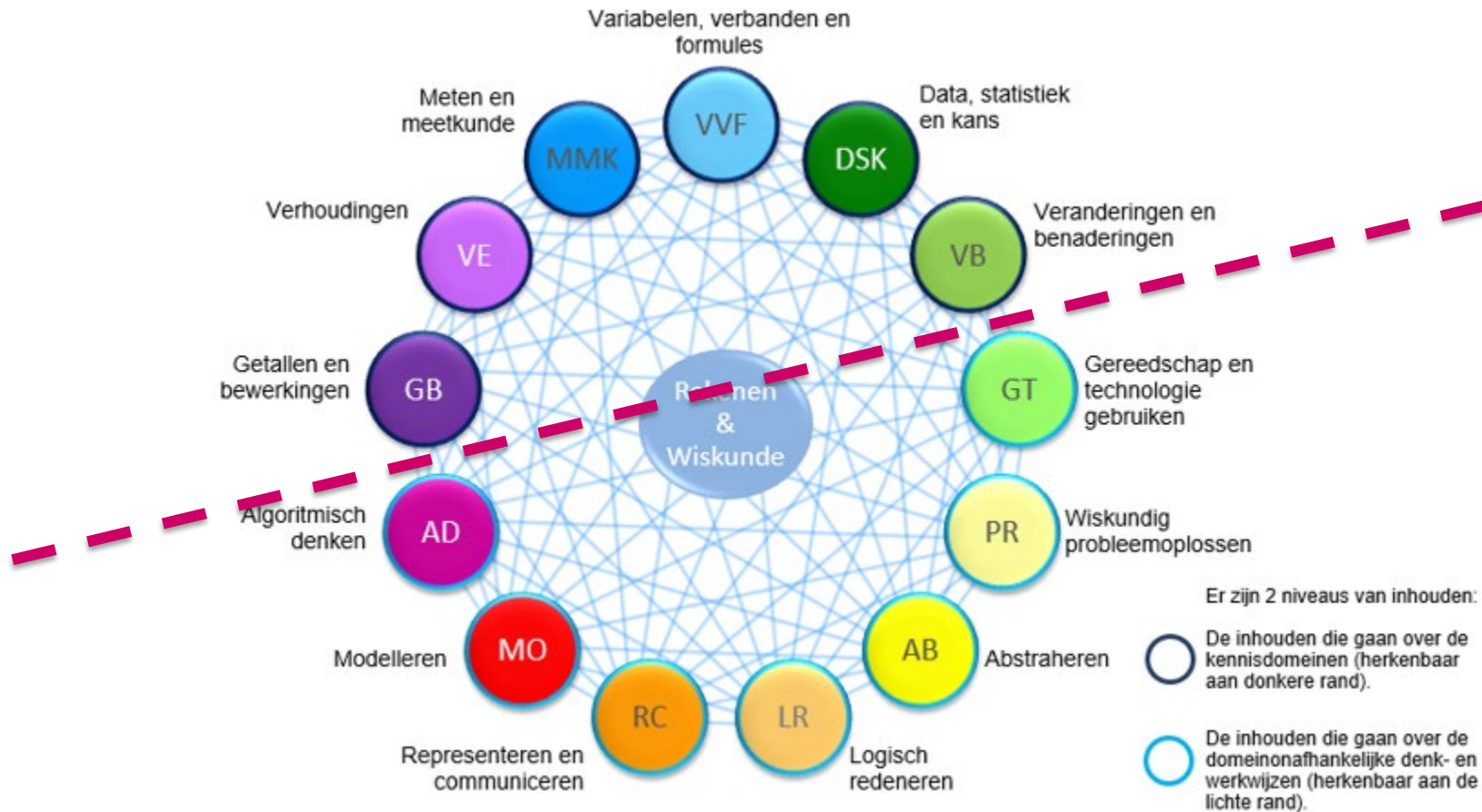
- Voor po: vooral probleemoplossen, kritisch denken en redeneren, creatief denken
- Wiskundig denken:
 - Als doel
Hoe leer je wiskundig denken, hoe word je een betere probleemoplosser, wanneer is een probleem moeilijker, hoe kun je kinderen verder helpen?
 - Als middel
Hoe kun je wiskundig denken benutten om beter te worden in rekenen-wiskunde (verdiepen van inzicht, zien van verbanden/relaties, wiskundige eigenschappen en hierover redeneren; wiskunde toepassen)

Wiskundig denken als doel en als middel

↑ van lagere moeilijkheid naar hogere moeilijkheid ↑ op inhoud:	hogere moeilijkheid	A3	B3	C3
	gemiddelde moeilijkheid	A2	B2	C2
	lagere moeilijkheid	A1	B1	C1
		niet complex recht-toe	(minder) Complex	meer complex
		→ van niet complex naar meer complex →		

Wat betekent dit voor zwakkere rekenaars?

Je doelen als uitgangspunt, de basis voor de invalshoek



2. Hoe kun je rijke rekenvragen formuleren die het wiskundig denken en de reken-wiskundige bekwaamheid stimuleren (*wiskundig denken als middel*)?

Rijke rekenvragen...

- Zetten leerlingen aan het denken
- Lokken nadenken, onderzoeken, verkennen, experimenteren, combineren, redeneren, creatief denken, out of the box denken, denken in samenhang uit
- Vergroten en verdiepen inzicht, kennis, rekenvaardigheden en conceptuele vaardigheden
- Zetten leerlingen aan tot actief leren (en samen leren)
- Lokken gedrag uit bij leerlingen waardoor je ziet 'waar ze staan' (informatie over het leren). Niet alleen product, ook proces.

Welke aanvullingen hebben jullie?

Samengevat

Vier hoofdkenmerken van rijke rekenvragen:

- ze vragen niet alleen het inzetten van kennis en procedurele vaardigheden, maar ook conceptuele vaardigheden, ze doen een beroep op inzicht, probleemoplossen, kritisch denken, creatief denken en redeneren;
- leerlingen leren tijdens het oplossingsproces;
- het oplossingsproces van de leerling geeft de leraar inzicht in wat de leerling begrijpt, weet, kan en hoe hij denkt en redeneert;
- er kunnen meer acceptabele antwoorden zijn.

Schape en kippen



1. Er zijn 6 schape en 4 kippen, hoeveel poten?
2. Er zijn 40 poten, hoeveel schape en hoeveel kippen?
3. Er zijn 74 poten, samen zie ik 21 dieren
4. Kunnen alle getallen voor het aantal poten?
 - Bedenk zelf...
 - Leg uit hoe dat zit...
 - Kan het ook anders?

Er zijn 6 schape en 4 kippen.
Hoeveel poten zijn dat samen?
Leg uit hoe je rekt.

$$6 \times 4 \text{ en } 4 \times 2 = 32$$

schape = 4 poten

kip = 2 poten

Er zijn 40 poten. Hoeveel schapen en hoeveel kippen kunnen dat zijn?
 Bedenk minimaal 3 mogelijkheden. Leg uit hoe je het doet. Je mag tekenen.

10 schapen en 0 kippen
 5 schapen en 10 kippen
 20 kippen en 0 schapen

$$10 \times 4 = 40$$

$$20 \times 2 = 40$$

$$5 \times 4 = 20 \text{ en } 10 \times 2 = 20 \text{ samen}$$



$$10 \text{ schapen } 0 \text{ kippen} \quad 10 \times 4 = 40$$

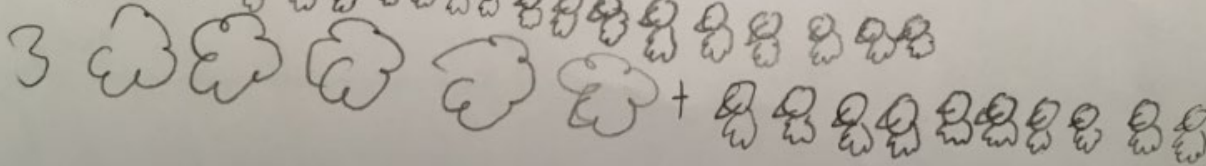
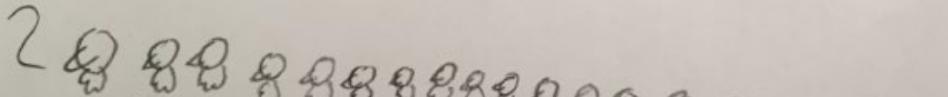
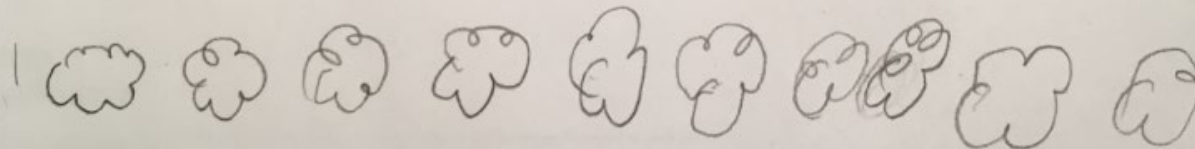
$$20 \text{ kippen } 0 \text{ schapen} \quad 20 \times 2 = 40$$

$$5 \text{ schapen } 10 \text{ kippen} \quad 5 \times 4 = 20$$

$$10 \times 2 = 20$$

$$20 + 20 = 40$$

 = schape  = kip



Ik zie 74 poten, en in totaal zie ik precies 21 dieren.
Hoeveel schapen en/of hoeveel kippen?
Bedenk minimaal 3 mogelijkheden. Leg uit hoe je het doet.

$$21 + \dots = 74$$

$$74 - \dots = 21$$

$$74 : 21$$

1. 8 schapen en een kip 40

2. 7 schapen en 3 kippen

3. 5 schapen en 5 kippen

1. ik kwam erachter, $5 \times 8 = 40$ $2 \times 2 = 80 -$

$4 - 4 + 2 = 74$ en toen werkte ik omlaag
(2-3)

Zijn dit rijke rekenvragen?

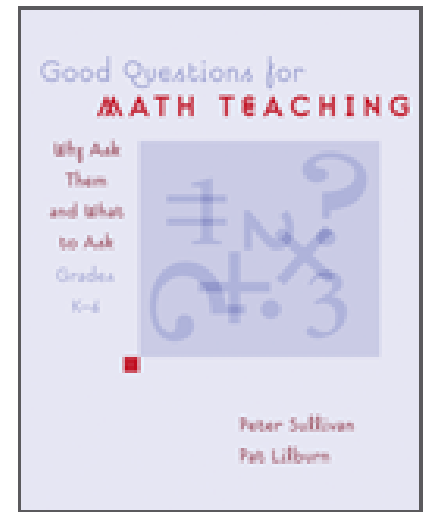


1. Er zijn 6 schapen en 4 kippen, hoeveel poten?
2. Er zijn 40 poten, hoeveel schapen en hoeveel kippen?
3. Er zijn 74 poten, samen zie ik 21 dieren
4. Kunnen alle getallen voor het aantal poten?
 - Bedenk zelf...
 - Leg uit hoe dat zit...
 - Kan het ook anders?

hoofdkenmerken:

- ze vragen niet alleen het inzetten van kennis en procedurele vaardigheden, maar ook conceptuele vaardigheden, ze doen een beroep op inzicht, probleemoplossen, kritisch denken, creatief denken en redeneren;
- leerlingen leren veel tijdens het oplossingsproces;
- het oplossingsproces van de leerling geeft de leraar inzicht in wat de leerling begrijpt, weet, kan en hoe hij denkt en redeneert;
- er kunnen meer acceptabele antwoorden zijn.

Rijke rekenvragen voor het reken-wiskunde onderwijs



(P. Sullivan/P.Lilburn)

Twee aanpakken:

Aanpak 1: Van achteren naar voren werken

Aanpak 2: Aanpassen van de standaardvraag

Aanpak 1: Van achteren naar voren werken

Deze methode bestaat uit vier stappen:

- Stap 1: Formuleer het leerdoel of de leerdoelen.
- Stap 2: Bedenk een gesloten vraag hierbij en noteer het antwoord op deze vraag.
- Stap 3: Ontwerp nu een rijke rekenvraag waarbij het antwoord uit stap 2 een van de mogelijke antwoorden is.
- Stap 4: Formuleer vervolgvragen die inzicht, kennis, vaardigheden en het denken en redeneren kunnen vergroten en verdiepen.

Aanpak 1: Van achteren naar voren werken

Deze methode bestaat uit vier stappen:

Stap 1: Formuleer het leerdoel of de leerdoelen.

Rekenen met bankbiljetten (5, 10, 20, 50) en munten van 1 en 2 euro.

Aanpak 1: Van achteren naar voren werken

Stap 2: Bedenk een gesloten vraag hierbij en noteer het antwoord op deze vraag.



Jop koopt Regenwormen.

Jop betaalt:



Hoeveel euro kost het spel?

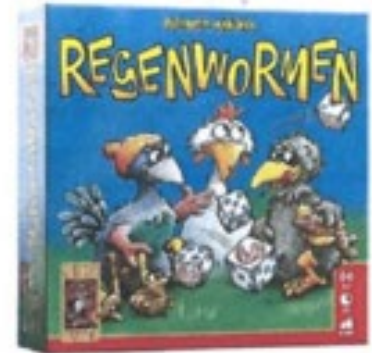
15 euro

Aanpak 1: Van achteren naar voren werken

Deze methode bestaat uit vier stappen:

Stap 3: Ontwerp nu een rijke rekenvraag waarbij het antwoord uit stap 2 een van de mogelijke antwoorden is.

Het spel Regenwormen kost 15 euro.
Hoe kun je dat betalen met briefjes en munten?
Weet je meer manieren?



Aanpak 1: Van achteren naar voren werken

Deze methode bestaat uit vier stappen:

Stap 4: Formuleer vervolgvragen die inzicht, kennis, vaardigheden en het denken en redeneren kunnen vergroten en verdiepen.



slo

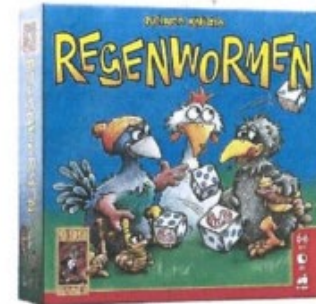
lynn

zw gr 5

Het spel Regenwormen kost 15 euro.

Hoe kun je dat betalen met briefjes en munten?

Weet je meer manieren?



<p>10</p> <p>1 1 1 2</p>	<p>10</p> <p>5</p>	<p>5</p> <p>5</p> <p>5</p>
<p>4</p> <p>10</p> <p>2 2 1</p>	<p>4 1</p> <p>5 5</p> <p>2 2 1</p>	<p>4 2</p> <p>5 5</p> <p>1 1 1 1</p>

Hugo

2^o groep 5

Het spel Regenwormen kost 15 euro.
Hoe kun je dat betalen met briefjes en munten?



Weet je meer manieren?

Het spel Levensweg kost 35 euro.
Hoe kun je dat betalen met briefjes en munten?



Weet je meer manieren?

Het spel Regenwormen kost 15 euro.
Hoe kun je dat betalen met briefjes en munten?



Weet je meer manieren?

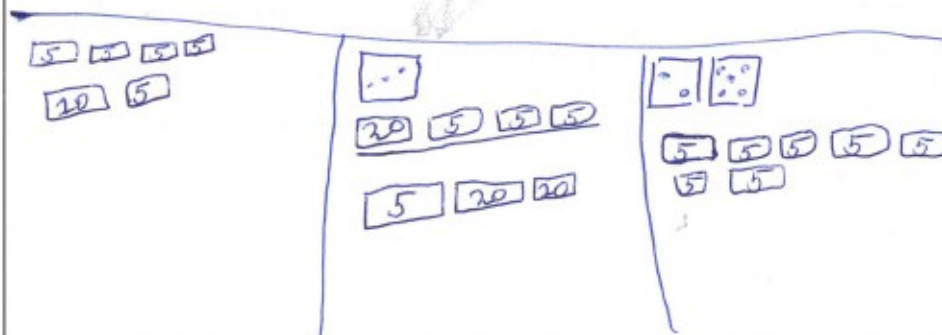
veel denken

ik heb geleerd combinatie maken
bijvoorbeeld 20 euro samen met andere getallen

Het spel Levensweg kost 35 euro.
Hoe kun je dat betalen met briefjes en munten?



Weet je meer manieren?



Naam: Kehinde gem Groep: 5

We geven zaterdag een feestje!
Onze kinderen zijn dan ~~samen~~ precies tien jaar.
Kom je ook?



Hoe oud zijn die kinderen dan ieder?
Weet je meer mogelijkheden?

$$\begin{array}{r} 6 \\ - 1 \\ \hline 5 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ - 1 \\ \hline 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ - 2 \\ \hline 1 \end{array} = 10$$

$$5 + 5$$

$$1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 - 2 = 10$$



Naam: Anna Groep: ^{gem} ~~4~~ groep 5

We geven zaterdag een feestje!
Onze kinderen zijn dan samen precies tien jaar.
Kom je ook?



Hoe oud zijn die kinderen dan ieder?
Weet je meer mogelijkheden?

$$10 - 6 = 4 - 1 = \underline{\underline{3}} - \del{3} = 0$$
$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{1} = \underline{\underline{4}} + \textcircled{2} = \underline{\underline{6}} = 10$$
$$1 + 2 + 1 = 4 + 2 + 4 = 10$$

Naam: Kenzo Groep: 5

We geven zaterdag een feestje!
Onze kinderen zijn dan samen precies
tien jaar.
Kom je ook?



Hoe oud zijn die kinderen dan ieder?
Weet je meer mogelijkheden?

Handwritten notes showing possible ages for children:

5	5	3	2	5
9	1	4	0	0
8	2	4	4	1
7	3	4	1	1
6	4			

onze kinderen zijn
samen 12 jaar
- één tweeling
- baby van 0

(1 2 2 0 0 2 0)

0

$2 + 2 + 3 + 4 + 1 + 1$

$2 + 2 + 3 + 4 + 1 + 1$

Wat heb je geleerd van deze opdracht?

Onze kinderen zijn samen 31... jaar

$$8 + 8 + 6 + 4 + 4 = 31$$

Naam: Stevie

Groep: 5

We geven zaterdag een feestje!
Onze kinderen zijn dan samen precies
tien jaar.
Kom je ook?



Hoe oud zijn die kinderen dan ieder?
Weet je meer mogelijkheden?

(5) (5)
(9) (1)

(5) (5) (2)
(3) (2) (5)
(9) (1) (3) (2)
(2) (1) (1) (3) (2) (1)
(1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1) (1)

10 kind

onze kinderen zijn
samen 12
• twee kinderen
zijn ouder dan 4
(3) + 2 + 3 + 2 + 1 + 1
en ik heb 3 kinderen
(1) + (1) (3) + (3) + (2) + (1) + (1)

(38) (28) (38) (8) (6)
52

Naam: Benthe 2W Groep: 6

We geven zaterdag een feestje!
Onze kinderen zijn dan (samen) precies
tien jaar.
Kom je ook?



Hoe oud zijn die kinderen dan ieder?
Weet je meer mogelijkheden?

één tweeling
samen 3 kinderen

2 kinderen 2 jaar
het andere kind is 6 jaar

er zijn 4 kinderen.
geén tweeling

1, 4, 2, 3

er zijn 5 kinderen
~~en~~ één tweeling

5 5 😊

😊😊😊😊😊
3 1 1 0 5

ER ZIJN 20 JAAR KINDEREN
SAMEN één tweeling

10 jaar + 10 jaar

1 baby van 0

Hugo's 5 Da uocha silvon



$$5 + 5 = 10$$

$$6 + 4 = 10$$

$$3 + 2 = 5 + 3 + 2 = 10$$

= - - -

$$3 + 2 + 3 + 2 = 10$$

$$4 + 1 + 3 + 3 = 10 \times$$

$$\begin{array}{c} 4 \\ | \\ \text{stick figure} \end{array} + \begin{array}{c} 1 \\ | \\ \text{stick figure} \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \text{stick figure} \end{array} + \begin{array}{c} 3 \\ | \\ \text{stick figure} \end{array} = 10$$

Thuis.

3 kinderen

$$3 + 3 + 3 + 3 = ? / 2$$

$$1 + 1 + 1 = ?$$

lynn

eenige is vijf jaar en die andere ook

eenige is 8 jaar en die andere is 2

maar, zegt mama, ik heb 3 kinderen.

eenige is 5 en die andere is 2 en die andere is 3 jaar

eenige is 8 en die andere is 1 en die andere is ook 1

eenige is 4 en die andere is 3 en die is 3

$$0 + 8 + 2$$

lynn, Groep 5

slo

Aanpak 2: Van achteren naar voren werken

Deze methode bestaat uit vier stappen:

- Stap 1: Formuleer het leerdoel of de leerdoelen.
- Stap 2: Denk aan een standaard (meestal gesloten) vraag.
- Stap 3: Gebruik deze standaard vraag om er een rijke vraag van te maken.
- Stap 4: Formuleer vervolgvragen die inzicht, kennis, vaardigheden en het denken en redeneren kunnen vergroten en verdiepen.

Aanpak 2: Van achteren naar voren werken

Deze methode bestaat uit vier stappen:

- Stap 1: Formuleer het leerdoel of de leerdoelen.
- Stap 2: Denk aan een standaard (meestal gesloten) vraag.
- Stap 3: Gebruik deze standaard vraag om er een rijke vraag van te maken.
- Stap 4: Formuleer vervolgvragen die inzicht, kennis, vaardigheden en het denken en redeneren kunnen vergroten en verdiepen.

slo

Doosjes met getallen

01234
56789

getallen
1 t/m 50

getallen
51 t/m 100

even
getallen
2 t/m 100

oneven
getallen
1 t/m 99

slo

Wat wil je dat ze leren?

1 Reken handig.

$2 \times 49 =$	$2 \times 99 =$	$8 \times 28 =$
$3 \times 29 =$	$4 \times 97 =$	$5 \times 79 =$
$4 \times 19 =$	$3 \times 98 =$	$3 \times 88 =$
$2 \times 39 =$	$5 \times 96 =$	$4 \times 69 =$
$2 \times 29 =$	$3 \times 99 =$	$7 \times 59 =$

↑ van lagere moeilijkheid naar hogere moeilijkheid op inhoud: ↑	hogere moeilijkheid	A3	B3	C3
	gemiddelde moeilijkheid	A2	B2	C2
	lagere moeilijkheid	A1	B1	C1
		niet complex recht-toe	minder complex	meer complex
		→ van niet complex naar meer complex →		

- Goed antwoord?
- Uitleg hoe ze rekenen?
- De beoogde strategie toepassen?
- De beoogde strategie ook uitleggen?

Wiskundig denken als doel en als middel

↑ van lagere moeilijkheid naar hogere moeilijkheid ↑ op inhoud:	hogere moeilijkheid	A3	B3	C3
	gemiddelde moeilijkheid	A2	B2	C2
	lagere moeilijkheid	A1	B1	C1
		niet complex recht-toe	minder complex	meer complex
		→ van niet complex naar meer complex →		

Focus je op zwakkere rekenaars?

Zelf aan de slag

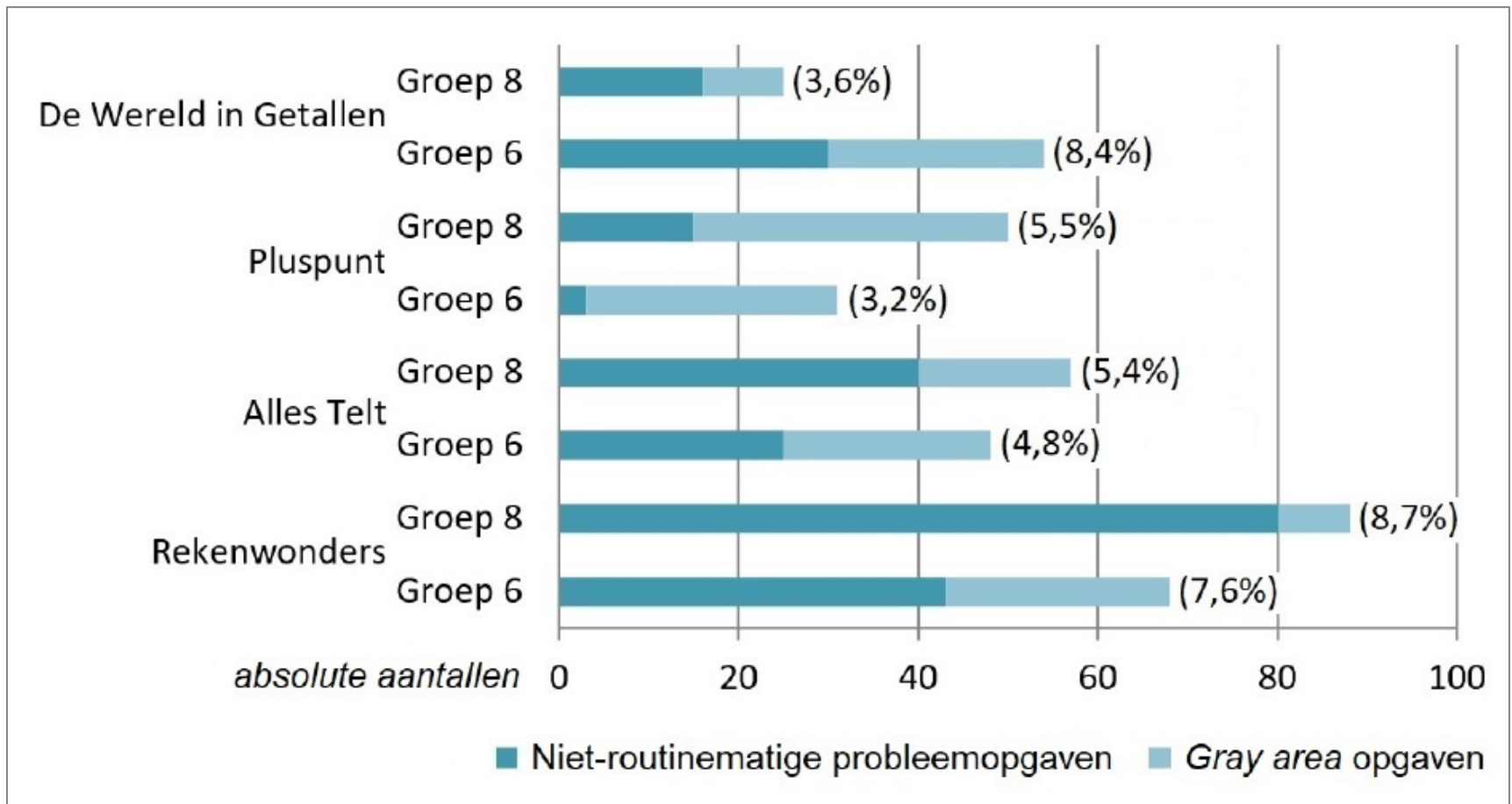
- Optie 1
 - Bedenk rijke rekenvragen aan de hand van aanpak 1 of 2
 - Richt je op zwakkere rekenaars
 - Bespreek samen wat je denkt dat het zwakkere rekenaars (en de leerkracht) kan opleveren
- Optie 2
 - Bekijk een rekenmethode van een bepaald leerjaar
 - Maak de opgaven rijker, richt je op de zwakkere rekenaars
 - Bespreek samen wat je denkt dat het zwakkere rekenaars (en de leerkracht) kan opleveren

Focus je op zwakkere rekenaars?

Wat zijn je ervaringen

Houd je wel zoveel mogelijk aan het leerdoel

Probleemoplossen in methodes



Wiskundig denken en zwakkere rekenaars

- Er moet een basis zijn van kennis en vaardigheden
- Laat de context mee sturen bij de oplossingen
→ kinderen gaan vanzelf abstraheren
- Het gaat niet (vooral) om het rekenwerk maar (vooral) om het denkwerk (zie model)
- Het gaat niet om de goede antwoorden maar om de denkprocessen en leren (veel is goed)
- Denkprocessen gebruiken om vervolgvragen te stellen (FE)
- Eigen producties gebruiken om inzicht te krijgen (FE)
- Niet na afloop maar ook bij ontwikkelen van begrip
- Stimuleert, motiveert, ondersteunt en geeft zelfvertrouwen

5. Hoe kunnen wij leraren verleiden en ondersteunen om juist ook zwakke rekenaars van wiskundige denkactiviteiten te laten leren?

- Voorbeelden geven met leerlingenwerk
- Verschillen tussen standaard vragen en rijke vragen laten zien (zowel de vragen als de antwoorden)
- Bestaande (kleine) sprekende voorbeelden laten uitproberen (verjaardag, schapen en kippen, bol.com, geld)
Eigen leerlingenwerk laten analyseren en koppelen aan leerproces
- Leerkrachten rijke vragen zelf laten bedenken (twee aanpakken), ook bij de methode
- Benadrukken van het belang van probleemoplossen, denken en redeneren
-

Terugblik en afsluiting

Uit het panamaboekje

- Wat bedoelen we met wiskundig denken?
- Hoe kun je rijke rekenvragen formuleren die het wiskundig denken stimuleren?
- Hoe gaan zwakkere rekenaars om met deze vragen en wat is het effect hiervan op hun begrip, rekenvaardigheid, motivatie en zelfvertrouwen?
- Hoe kunnen leraren kleine dingen in hun methode of lessen aanpassen om het wiskundig denken en leren van zwakkere rekenaars rijker te maken?
- Hoe kunnen wij leraren verleiden en ondersteunen om juist ook zwakke rekenaars van wiskundige denkactiviteiten te laten leren?

slo

- Wat bracht jou ertoe hiervoor te kiezen?
- Welke aanvullende vragen en wensen heb je hierbij?

- Nog vragen?
- Wensen?
- Wat kun je hiermee?
- Wat kun/wil je ontvangen?

Publicatie?

slo