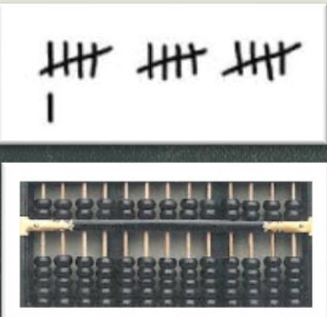


—	=	≡	ƴ	ʀ	ϕ	ʁ	ʂ	ʐ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	ο	ς	ς	ʝ	ι	ʝ	⊕	⊕
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ʐ	ʐ	ʐ	ʐ	ʐ	ʐ	ʐ	ʐ	ʐ
100	200	500	1000	4000	70000			

Hoe het is gekomen dat iedereen kan leren rekenen

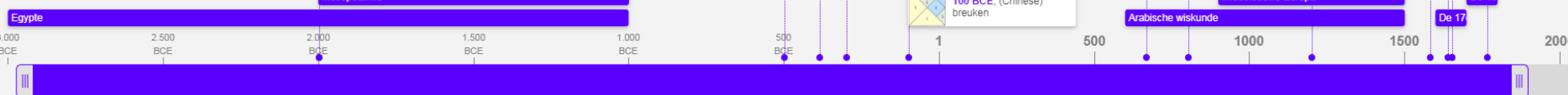
Gerard Boersma HAN Faculteit educatie



2.000 BCE, Het Egyptische getalsysteem

2.000 BCE, Sexagesimaal talstelsel

Mesopotamië



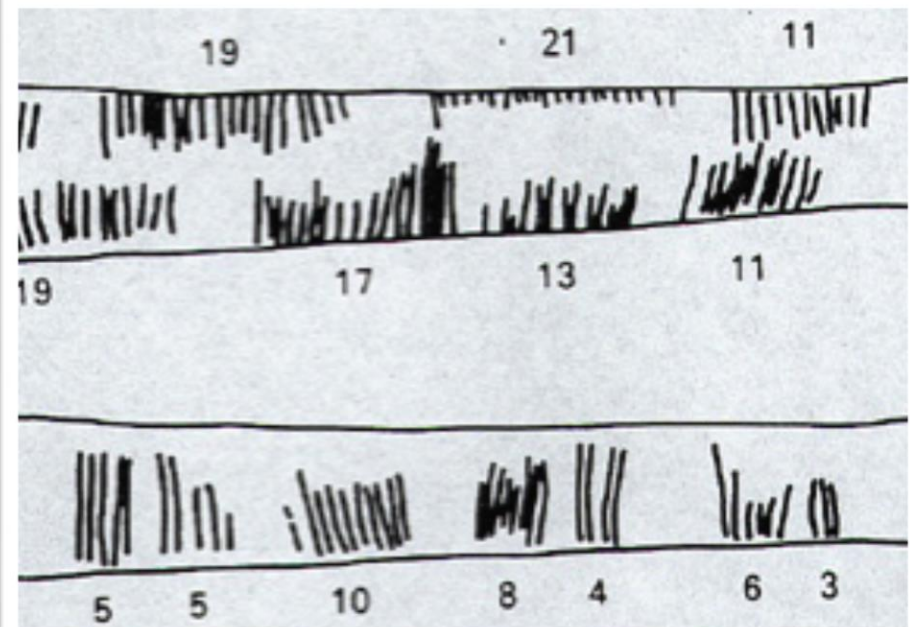
Waarom geschiedenis?

- Kennen van de geschiedenis van een wiskundig concept of techniek leidt tot een dieper begrip ervan.
- Leidt tot een positievere attitude ten opzichte van wiskunde: wiskunde is gewoon door mensen bedacht. In een bepaalde tijd en op een bepaalde plaats
- Sluit aan op natuurlijke nieuwsgierigheid van leerlingen.
- Bron voor lesactiviteiten.

Opzet werkcollege

- Inleiding
- Tellen
- Talstelsels en rekenen
 - Ontstaan
 - Egyptisch
 - Babylonisch
 - Romeins
 - Hindoe-Arabisch
- Afsluiting

Ishango bot, 22.000 BC



Lemombo bot (35.000 BC)

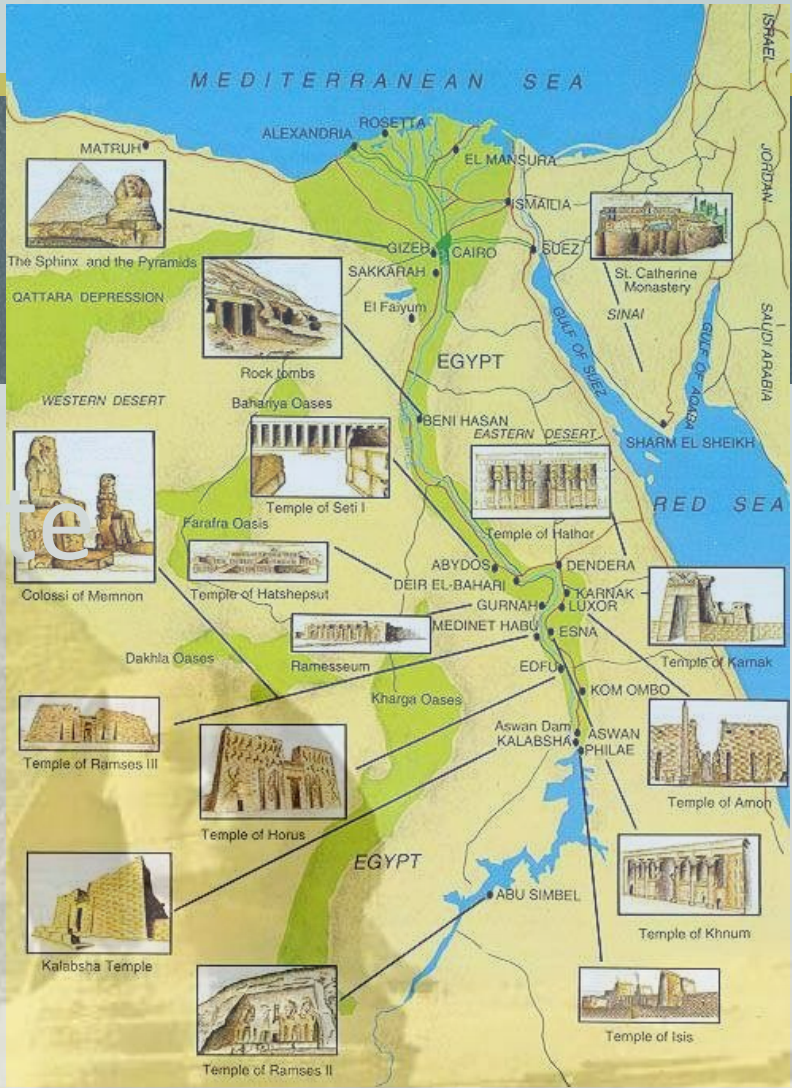


Dolni Vestonice (Tsjecho-Slowakije)



Piraha

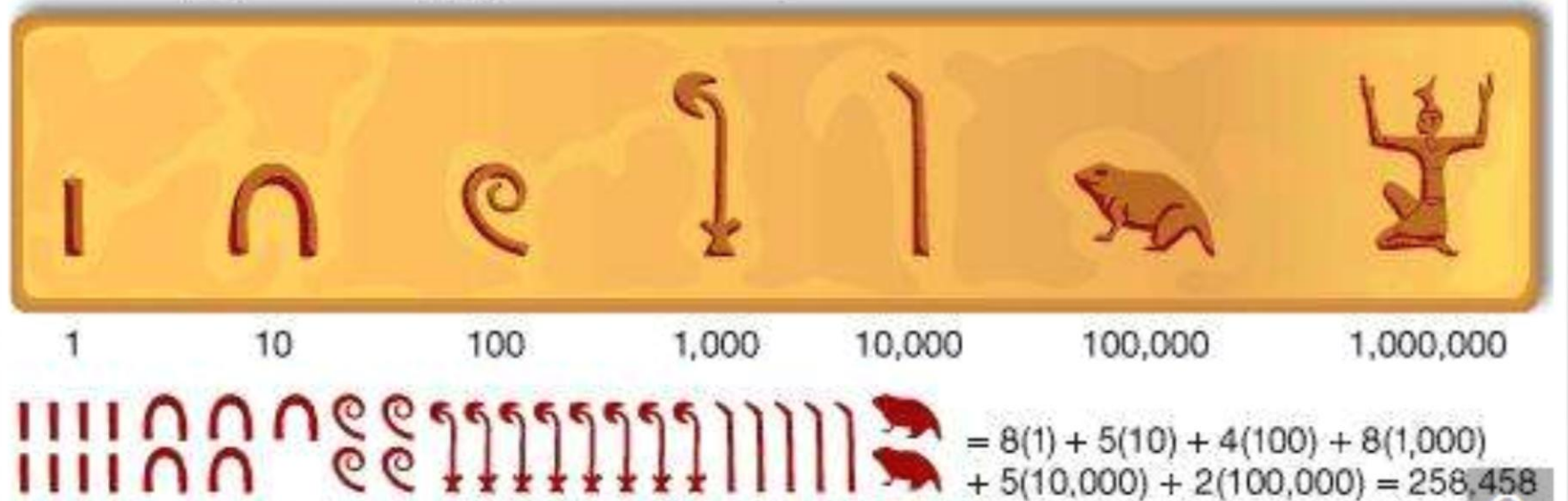




De Egyptenaren



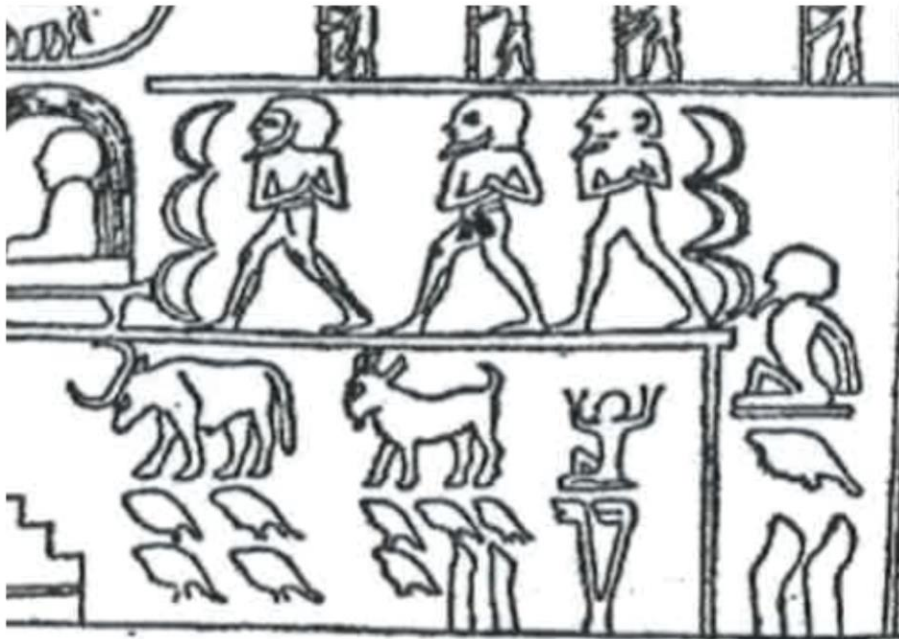
Getallen: hiërogliefen



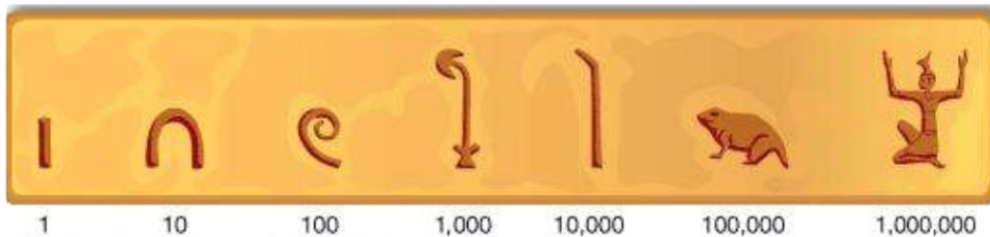
© 2003 Encyclopædia Britannica, Inc.



Staf van Koning Menes (3000 B.C.)



Gedeelte van de inscripties op de staf van Menes



Opgave 1.

Hoeveel ossen, geiten en gevangenen heeft koning Menes verworven?

Opgave 2.

Schrijf in hieroglyfen:

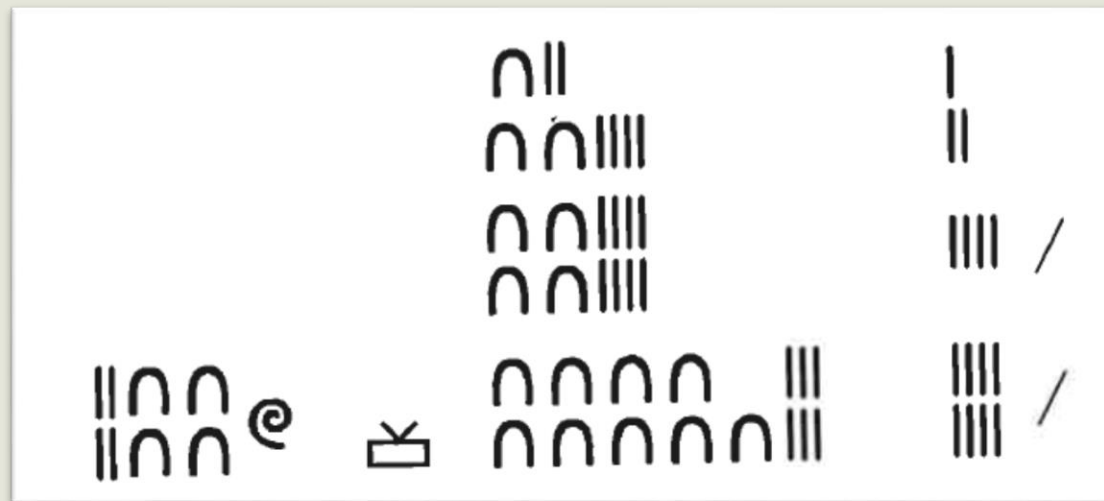
a. 53

b. 12.245

Getallen: hiëratisch

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
units									
tens									
hundreds									
thousands									
tens of thousands									
hundreds of thousands									

Wat wordt hier uitgerekend?



Vermenigvuldigen: 12×12

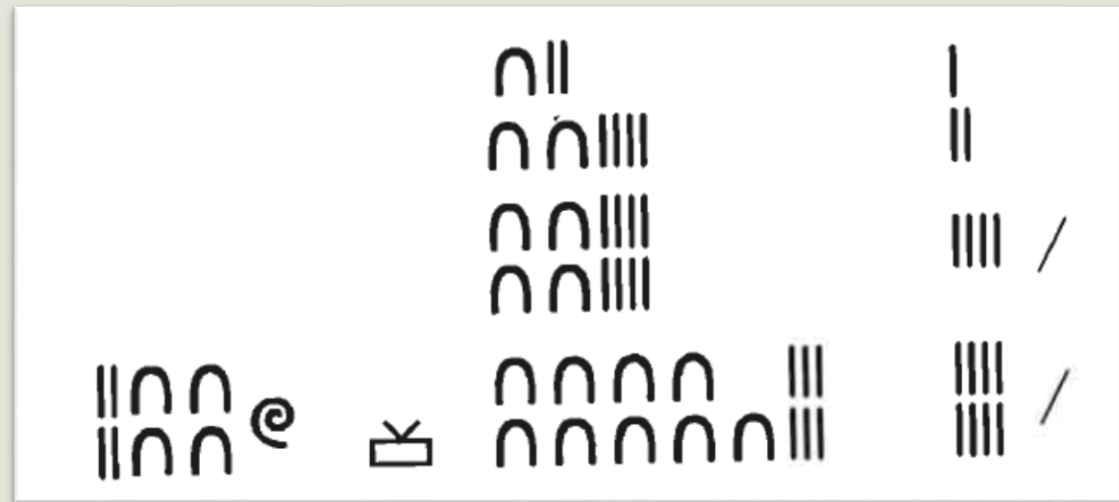
$$12 \times 1 = 12$$

$$12 \times 2 = 24$$

/ $12 \times 4 = 48$

/ $12 \times 8 = 96$

$$12 \times 12 = 96 + 48 = 144$$



Vermenigvuldigen

Opgave 3

Bereken op de manier van de Egyptenaren:

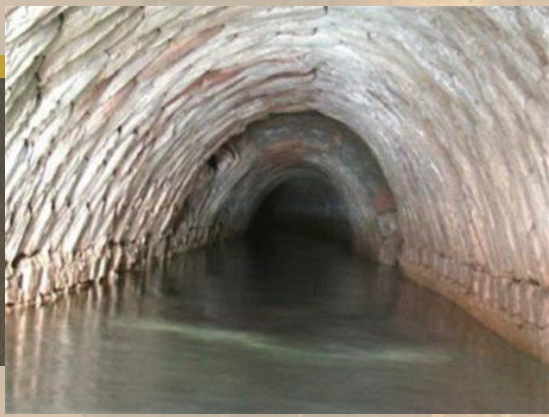
$$\begin{array}{r} 1 \quad 12 \\ 2 \quad 24 \\ / \quad 4 \quad 48 \\ / \quad 8 \quad 96 \end{array}$$

a) 74×64

b) 31×20

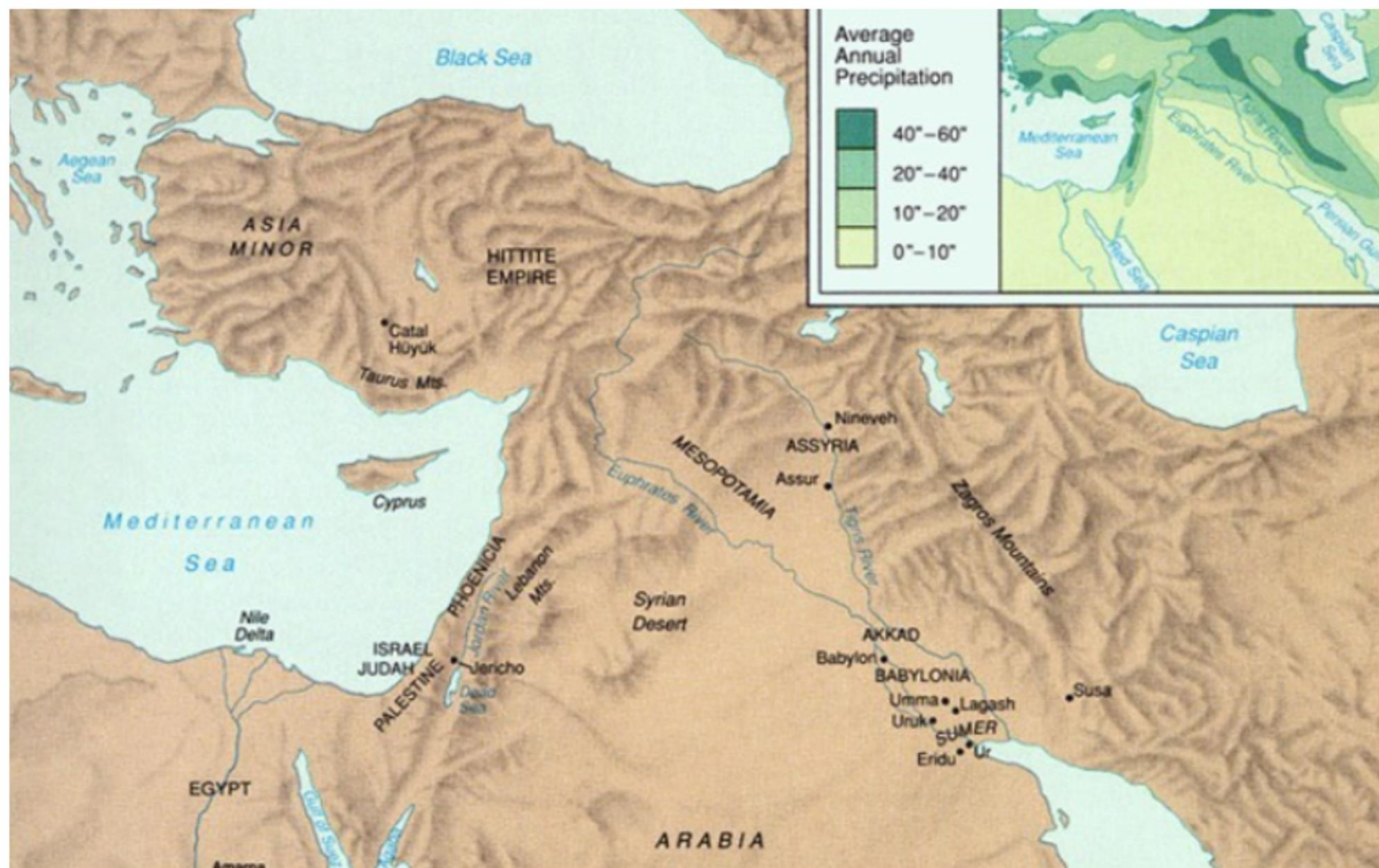
$$12 \times 12 = 96 + 48 = 144$$

Klaar?: denk na over de vraag hoe de Egyptenaren een deling zouden kunnen aanpakken, bijvoorbeeld: $252 : 12$



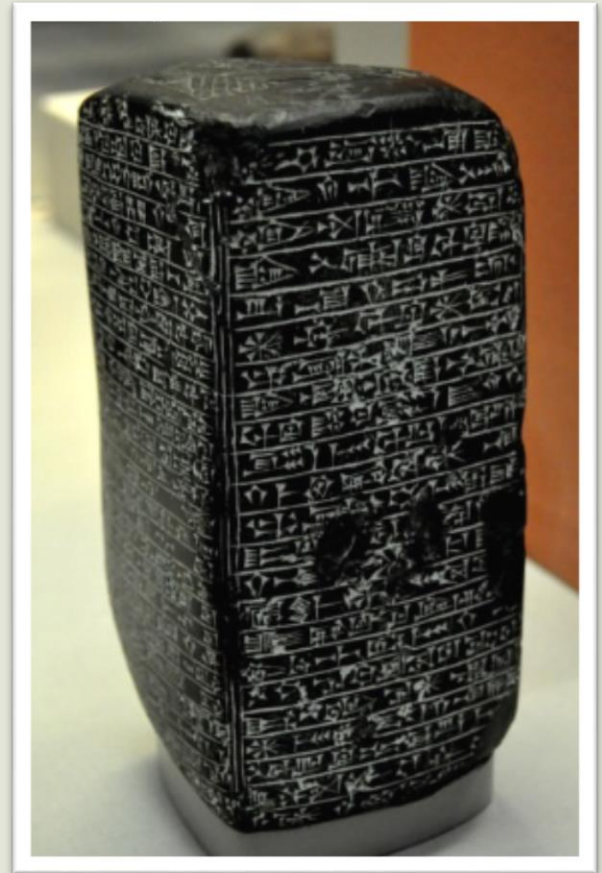
De Babyloniërs





Grap uit Babylon (ongeveer 700 BC)

Nadat hij op de tafel der lotsbestemmingen het getal 70 had geschreven voor het aantal jaren dat Babylon leeg moest blijven, kwam de god Marduk in zijn barmhartigheid op zijn beslissing terug. Hij draaide de cijfers om en besloot dat de stad al na 11 jaar weer bewoond mocht worden.

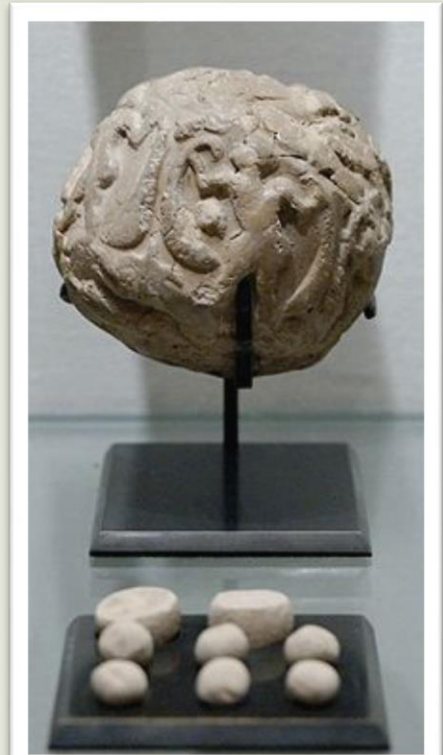


Van calculi naar cijfers



3500-3100 BC

8000-4000 BC

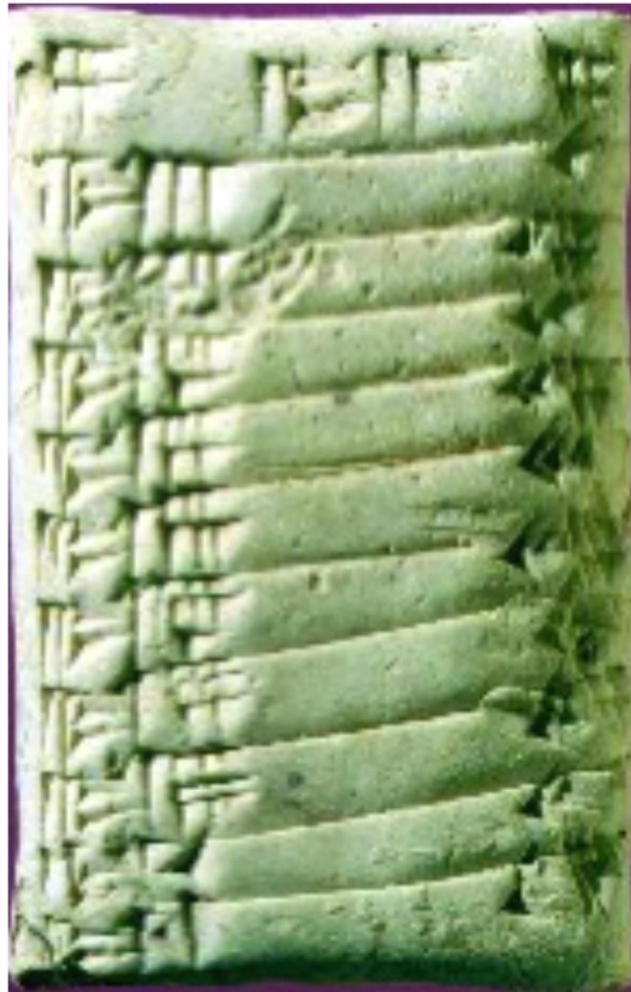


Getallen



┆ 1	<┆ 11	<<┆ 21	<<<┆ 31	<<<┆ 41	<<<┆ 51
┆┆ 2	<┆┆ 12	<<┆┆ 22	<<<┆┆ 32	<<<┆┆ 42	<<<┆┆ 52
┆┆┆ 3	<┆┆┆ 13	<<┆┆┆ 23	<<<┆┆┆ 33	<<<┆┆┆ 43	<<<┆┆┆ 53
┆┆┆┆ 4	<┆┆┆┆ 14	<<┆┆┆┆ 24	<<<┆┆┆┆ 34	<<<┆┆┆┆ 44	<<<┆┆┆┆ 54
┆┆┆┆┆ 5	<┆┆┆┆┆ 15	<<┆┆┆┆┆ 25	<<<┆┆┆┆┆ 35	<<<┆┆┆┆┆ 45	<<<┆┆┆┆┆ 55
┆┆┆┆┆┆ 6	<┆┆┆┆┆┆ 16	<<┆┆┆┆┆┆ 26	<<<┆┆┆┆┆┆ 36	<<<┆┆┆┆┆┆ 46	<<<┆┆┆┆┆┆ 56
┆┆┆┆┆┆┆ 7	<┆┆┆┆┆┆┆ 17	<<┆┆┆┆┆┆┆ 27	<<<┆┆┆┆┆┆┆ 37	<<<┆┆┆┆┆┆┆ 47	<<<┆┆┆┆┆┆┆ 57
┆┆┆┆┆┆┆┆ 8	<┆┆┆┆┆┆┆┆ 18	<<┆┆┆┆┆┆┆┆ 28	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆ 38	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆ 48	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆ 58
┆┆┆┆┆┆┆┆┆ 9	<┆┆┆┆┆┆┆┆┆ 19	<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆ 29	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆ 39	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆ 49	<<<┆┆┆┆┆┆┆┆┆ 59
< 10	<< 20	<<< 30	<<<┆ 40	<<<┆┆ 50	┆ 60

Tafel van 5



Posities



$$= 1 = 60 = 3600 = \frac{1}{60} = \frac{1}{3600} \text{ etc}$$

Opgave 6

De boer heeft  schapen. Hoeveel schapen heeft de boer?

Opgave 7

Een jaar duurt  dagen.

Geef vier verschillende waarden voor dit aantal. Welke is de juiste?

60-tallig met onze cijfers

𐎶 𐎶 𐎶 𐎶 𐎶 𐎶

- $1;5 = 1 \times 60 + 5 \times 1 = 65$
- $2;4 = 2 \times 60 + 4 \times 1 = 124$
- $1;0;5 = 1 \times 3600 + 0 \times 60 + 5 \times 1 = 3605$
- $6;0 = 6 \times 60 + 0 \times 1 = 360$
- $2,4 = 2 \times 1 + 4 \times \frac{1}{60} = 2\frac{4}{60} = 2\frac{1}{15}$

𐎶𐎶𐎶 𐎶𐎶𐎶𐎶

- $21.33 = 21 \times 60 + 33 \times 1 = 1260 + 33 = 1293$

Vertalen

Opgave 8

Vertaal de decimale getallen naar het zestigtallig stelsel

a) 85

b) 1240

c) Klaar: $\frac{7}{9}$

Vertaal de zestigtallige getallen naar het tientallig stelsel

d) 5; 11; 40

e) 0,12

f) Klaar?: 1,18

Bewerkingen

- Optellen: op een hoop gooien en inwisselen
- Aftrekken: een hoop eraf halen en zonodig inwisselen
- Vermenigvuldigen: splitsen
- Delen, voorbeeld $45 : 3$
 - $45 : 3 = \frac{1}{3} \times 45 = 15$
 - $45 : 3 = 0; 20 \times 45 = 15$

Rare jongens,
die Romeinen!



M = 1000

D = 500

C = 100

L = 50

X = 10

V = 5

I = 1

De Romeinen



Hoeveel turven?

1. |||||

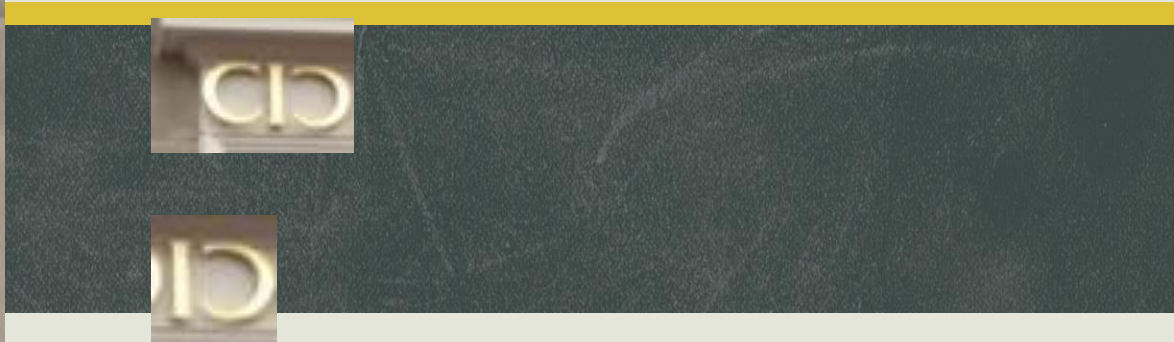
2. ||||V||||V||||V||||V||||V||||

3. ||||V||||X||||V||||X||||V||||X||||

4. Intermezzo: |||V|| -> V|| V||||X|| -> X||

5. XXX||||





Paleis het Loo Apeldoorn



50 en 500

VIA MFECEIA BREGIO AD CAPVAM ET
IN EA VIA PONTEIS OMNEIS MILIARIOS
TABELARIOSQUE PROSEIVEI HINCESUNT
NOVCERIA MMEILIA LI CAPVAM XXXIII
MVRANVM LXXIII COSENTIAM CXXIII
VALENTIAM CLXXX AD FRETVM AD
STATVAM CCXXXII REGIVM CCXXXVII
SVMA AF CAPVA REGIVM MEILIA CCC
ET EIDEM PRAE TORIN LXXII
SICILIA FVGITEIVOS ITALICORVM
CONQVAEISIVEI REDIDEIQVE
HOMINES BCCCCXVII EIDEMQVE
PRIMVS FECEI VT DE AGRO POPLICO
ARATORIBVS CEDERENT PASTORES
FORVM AEDISQVE POPLICAS HEIC FECEI

LXXIII

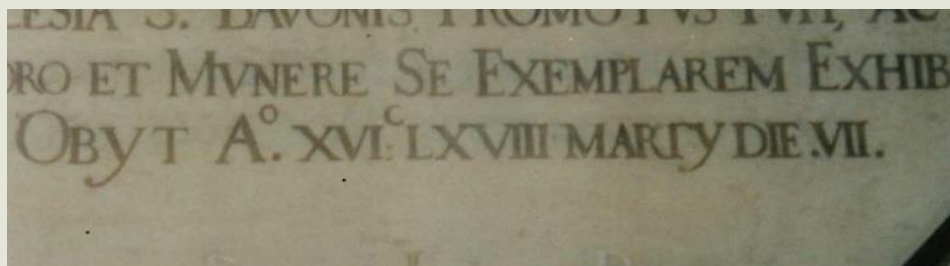
BCCCCXVII

Vrijheid-blijheid



Opgave 10

Welke getallen staan hier?



Opgave 11: optellen

a) MDCCLXVIII + CCCXXIII

b) MDII + CDXCIX

Opgave 12: vermenigvuldigen

VIII x XII

1. XII + XII = XXIIII (= XXIV)
2. XXIIII + XII = XXXIIIIII = XXXVI
3. XXXVI + XII = XXXXVIII (= XLVIII)
4. XXXXVIII + XII = XXXXXVIII = LVI = LX
5. LX + XII = LXXII
6. LXXII + XII = LXXXIIII (= LXXXIV)
7. LXXXIIII + XII = LXXXXIIIIII = XCVI

Romeinse zakabacus (replica)



Penningrekenen

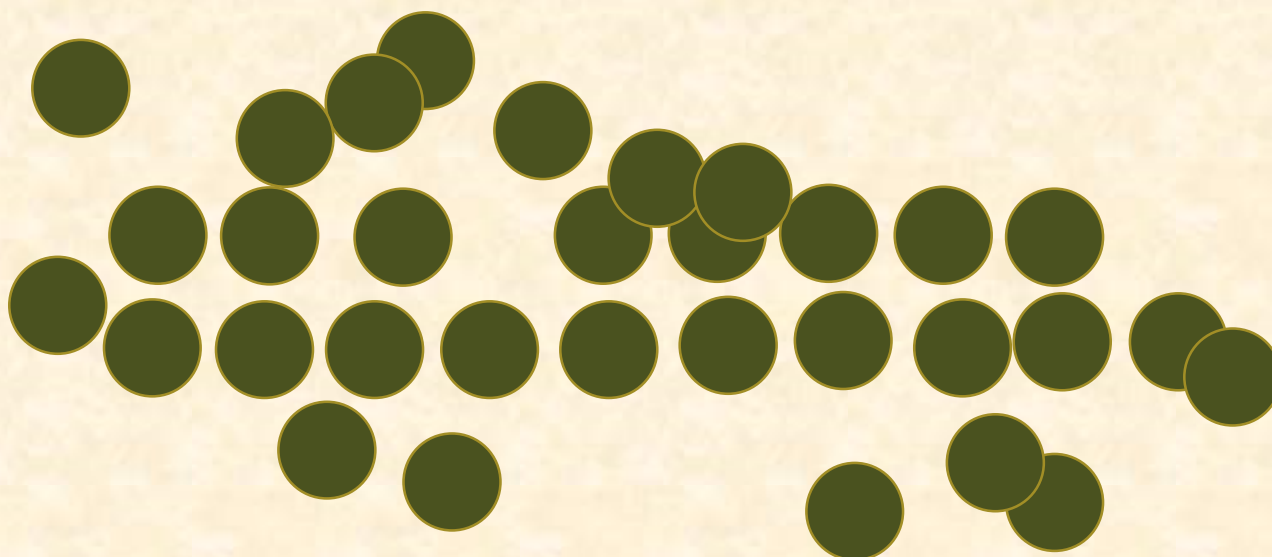


M

C

X

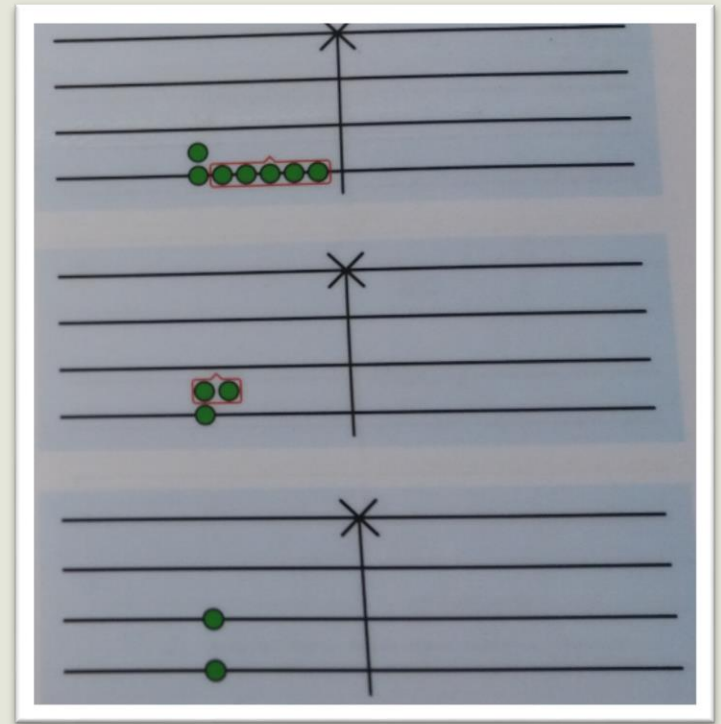
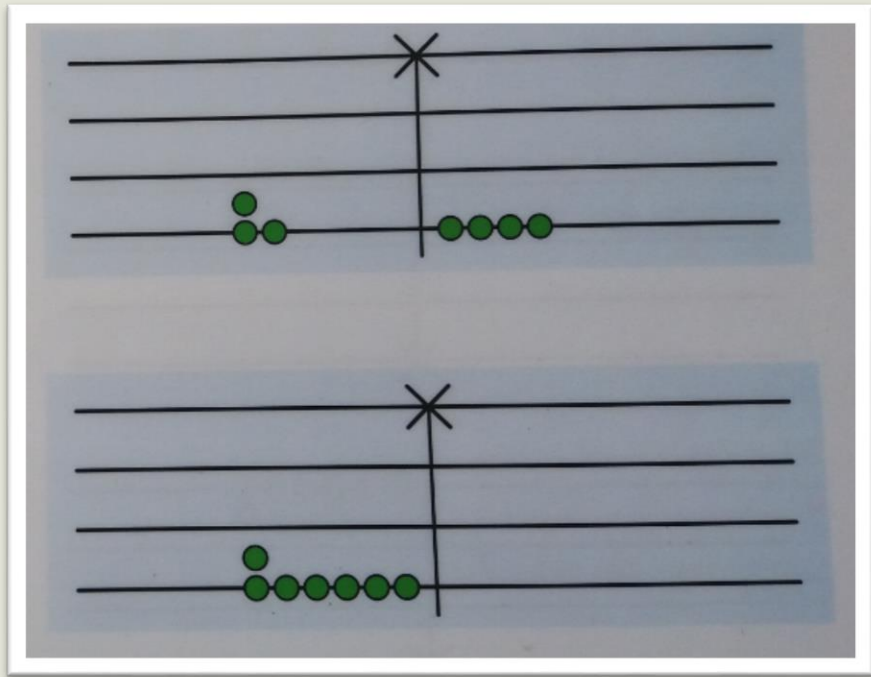
I



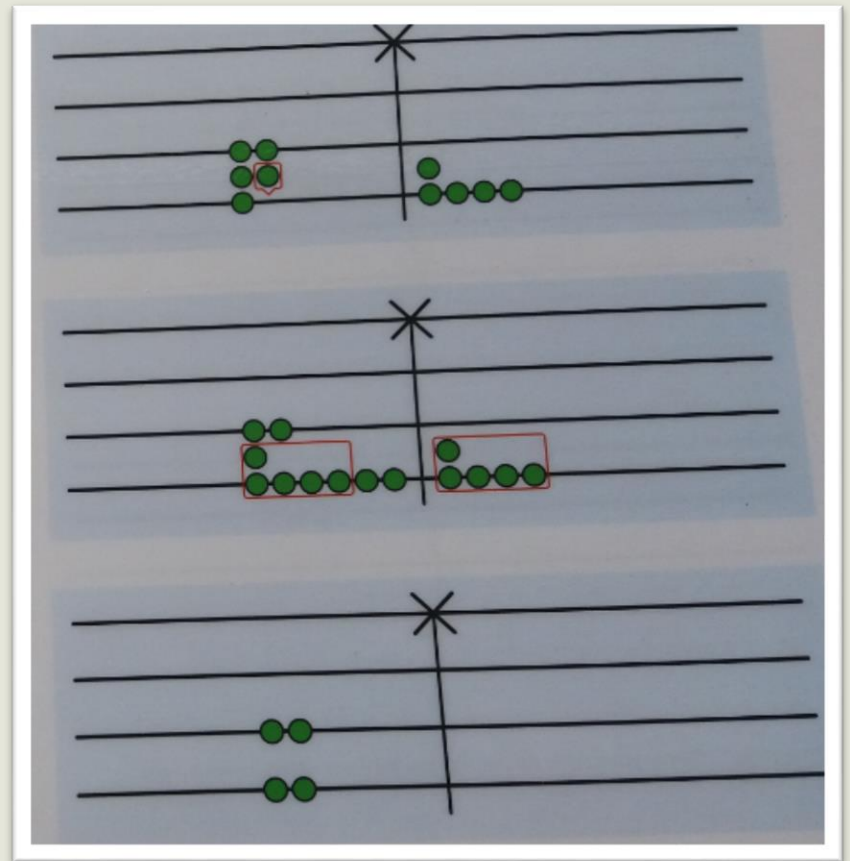
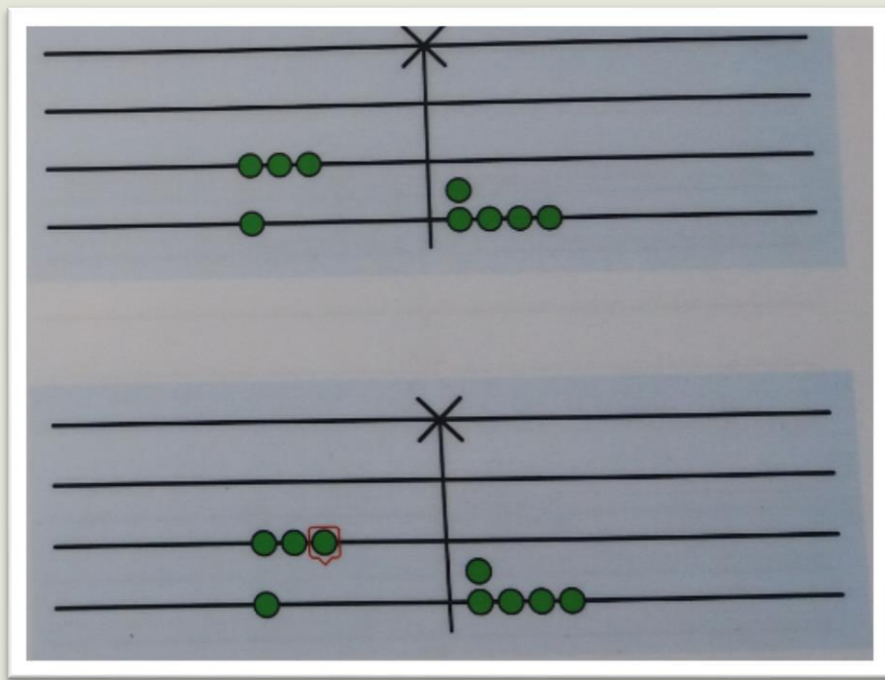
$$7 + 4$$

$$31 - 9$$

$$7 + 4$$



31 - 9



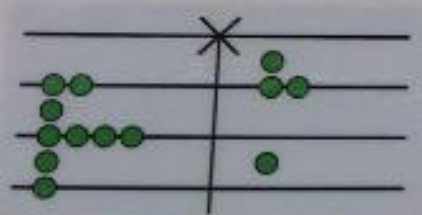
Opgave 13: reken met penningen uit

$$296 + 705 =$$

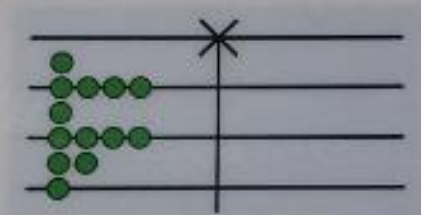
$$2005 - 1673 =$$

$$296 + 705 = 1001$$

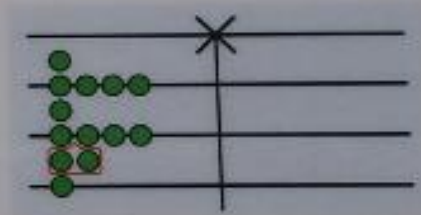
1.



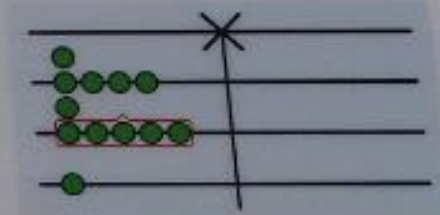
2.



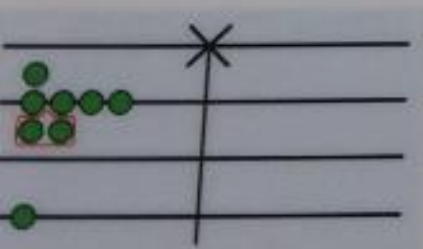
3.



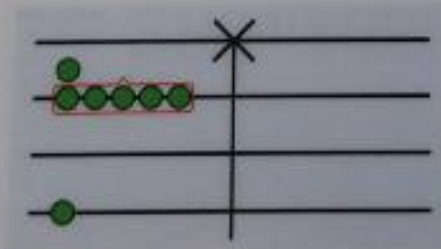
4.



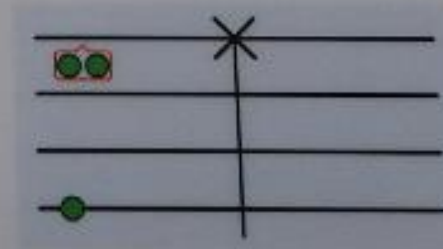
5.



6.



7.

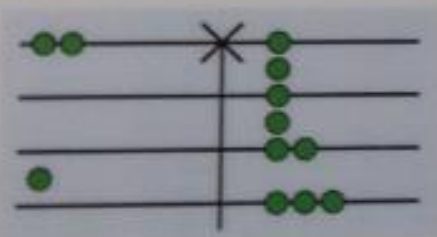


8.

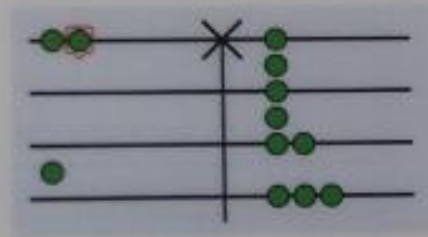


$$2005 - 1673 = 332$$

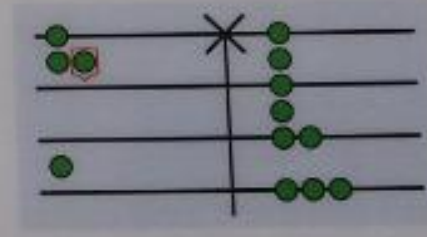
1.



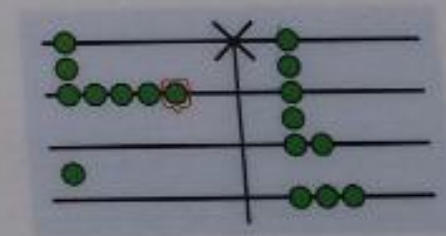
2.



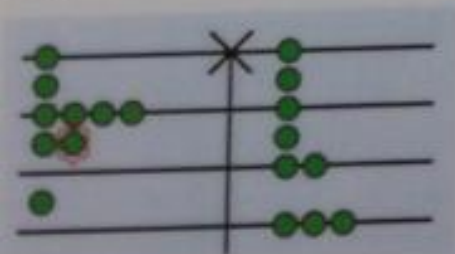
3.



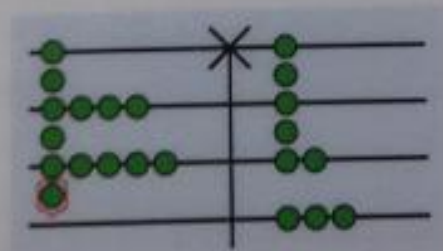
4.



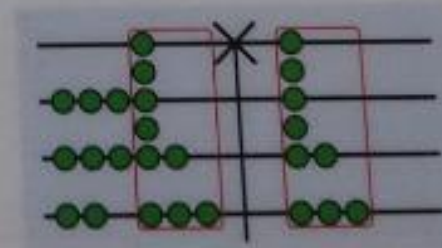
5.



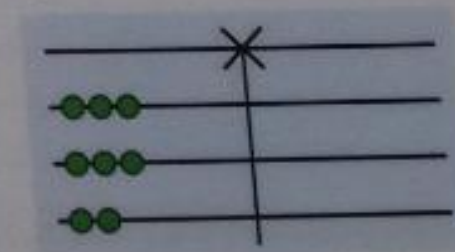
6.



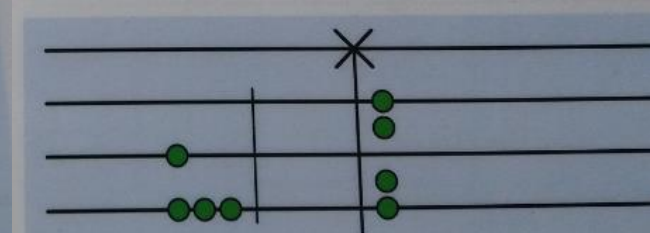
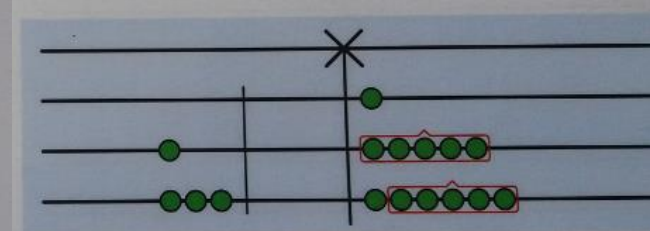
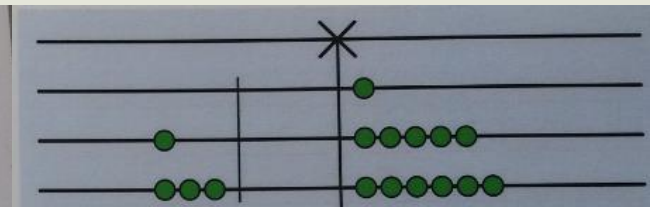
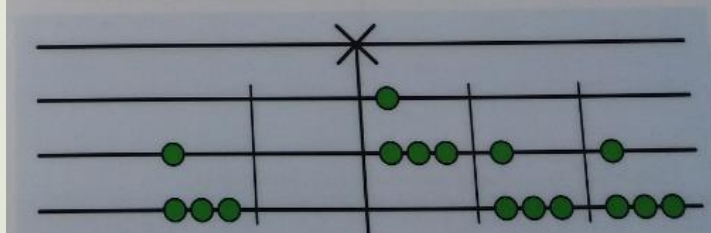
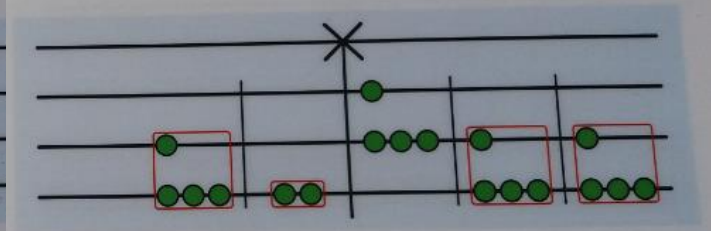
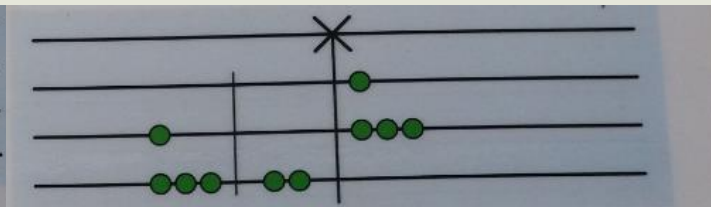
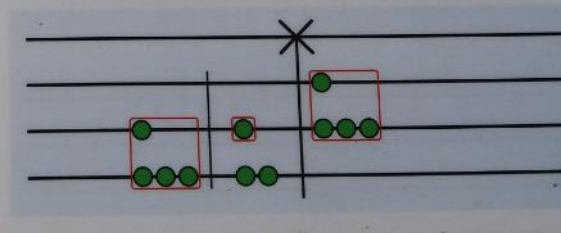
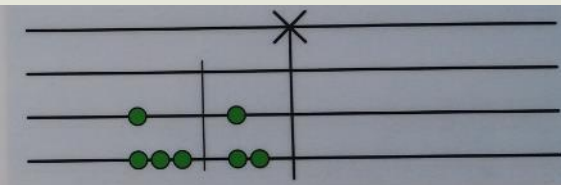
7.



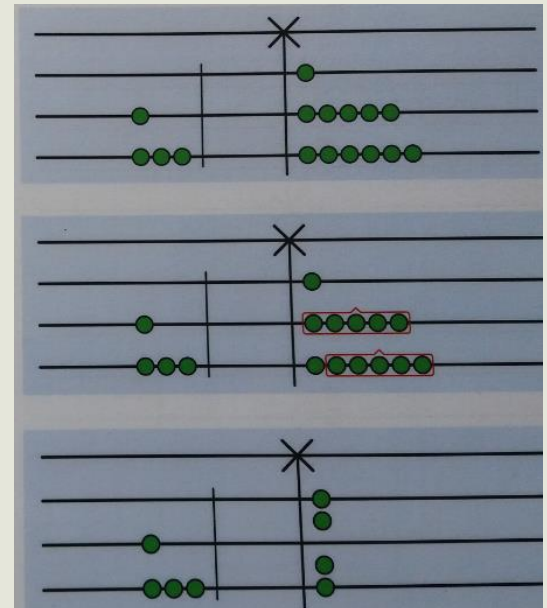
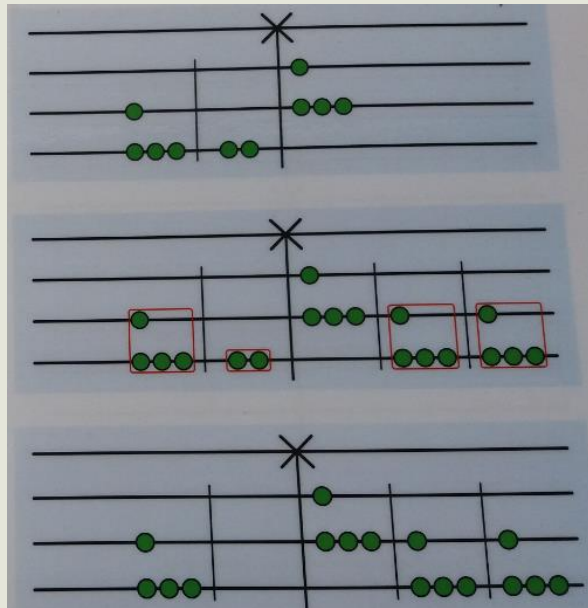
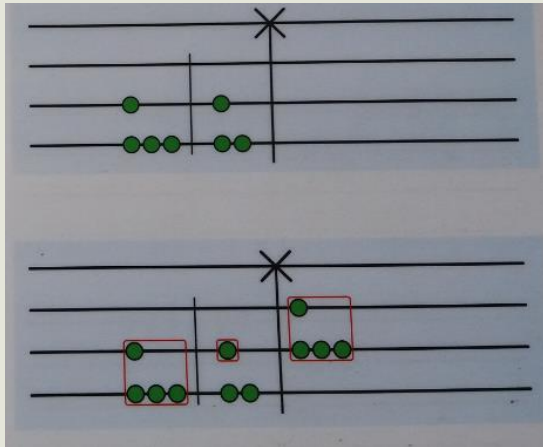
8.



$$13 \times 12 = 156$$



Nu zelf: 16×25



Rekenlijnen in huidig onderwijs

D	H	T	E

Met pen en penningen



Figura dela pra-
ctica numerale.

Nulla 0 ouer zero.

9 Noue

8 Otto

7 Sette

6 Sei

5 Cinque

4 Quattro

3 Tre

2 Doi

1 Uno

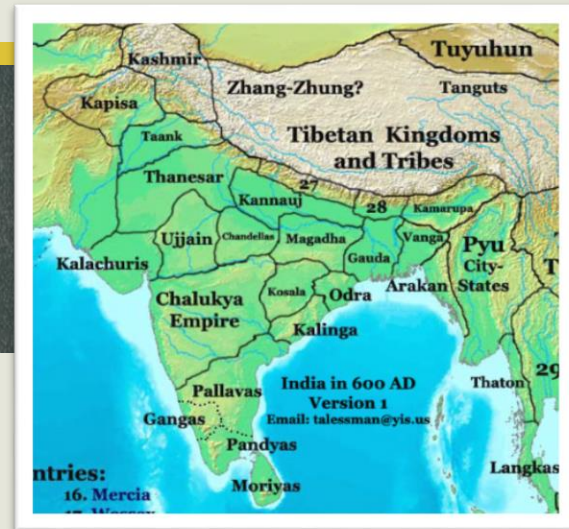
Regina z fundamen-
tum oïum numeroꝝ.

Hindoe- Arabische cijfers

Opgave 14: spreek (de getallen) uit

- Gironummer: NL57 INGB 3463940241
- Telefoonnummer: 003660577235
- Wereldbevolking: 679745083

De Indiërs

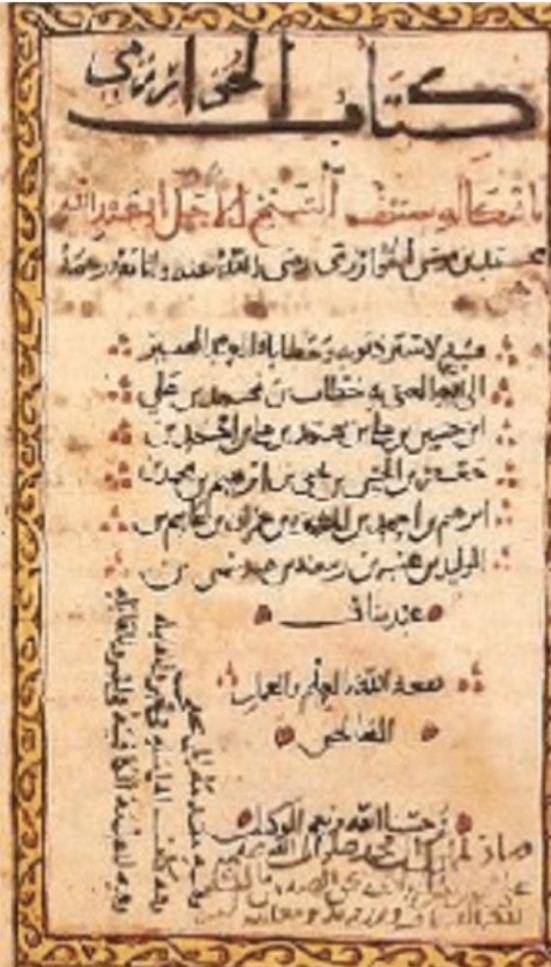


—	=	≡	𑀓	𑀔	𑀕	𑀖	𑀗	𑀘
1	2	3	4	5	6	7	8	9
𑀠	𑀡	𑀢	𑀣	𑀤	𑀥	𑀦	𑀧	𑀨
10	20	30	40	50	60	70	80	90
𑀩	𑀪	𑀫	𑀬	𑀭	𑀮	𑀯	𑀰	𑀱
100	200	500	1000	4000	70000			



De Arabieren

Al-Khwarizmi



geminat. 7 sic ff i 10 mēse paria 7 er quib' i uno mēse duo pgnant
7 geminat in 10 mēse paria 7 conieloz. 7 sic ff paria 7 i 10 mē
se. er quib' i 10 pgnat paria 7 ff i 10 mēse paria 8 er qb'
paria 4 geminat alia paria 4 quib' addit cū parijs 8 fac
it paria 12 i 10 mēse. er qb' paria 4 q geminatu fuerit i 10
mēse si capiat i 10 mēse hālia 8 parijs pgnant 7 sic ff i 10 mēse
paria 1 cū qb' addit parijs 12 q geminat i septio erit i 10
paria 24 cū quib' addit parijs 12 q geminat i octauo mēse.
erit i 10 paria 44 cū quib' addit parijs 24 q geminat i no
mēse erit i 10 paria 84 cū quib' addit rurſū parijs 44
q geminat i decimo. erit i 10 paria 144 cū quib' addit rurſū
parijs 84 q geminat i undecimo mēse. erit i 10 paria 244
cū qb' 7 addit parijs 144 q geminat in ultimo mēse. erit
paria 777 7 tot paria pepit ſim par i pſato loco 7 capite uni
m. potest ē unde i hāo margine. qualr hoc opati ſuim. s. q. nūm
pimū nūm cū ſo uidet. cū 7 fm ē 10. 7 tēu cū qrtō. 7 qrt
tū cū qntō. 7 sic deſceps donec ūtrūm decimū cū undecimo uidet.
144 cū 244 7 hūm ſtoz cunieloz ſūmā uidet. 777
7 sic poſſet facē p ordinē de iſſuatis nūc mēſib'.

Omnino hōies sūt quorū p̄m̄ sedē tēi hūc dñs. sedē itaq; tēi q̄rē
 hūc dñs. tēi q̄rē p̄m̄ hūc dñs. Et tēi p̄m̄ q̄rē
 hūc dñs. Et r̄ q̄rē unq̄sq; hūc. Adde hō. iij. nūos ī unū erē
 q̄ nūc ē tēplū totū sūme dñorū illoz. iij. hōmī. Ideo q̄ ī tēplū
 sūmā unq̄sq; eoz ē p̄m̄ ē q̄rē dñs ip̄s p̄ reddē p̄ eoz
 sūmā. ex qua si erant dñs p̄m̄ si tēi hōies. remanebit
 q̄rē hōi dñi. Itē si erit dñs p̄m̄ erant dñs si
 tēi q̄rē hōies remanebit p̄m̄ hōi dñi. Rursū si de dñs
 erant p̄m̄. si dñi tēi q̄rē hōies p̄m̄ hōies remanebit sō dñi
 Et adhuc si de dñs erant dñs q̄rē p̄m̄ sedē hōies
 remanebit tēi dñi. Cōsuetū itaq; dñs p̄m̄ hōies cū
 sedē cū tēi et cū q̄rē nūmū sū reddē
 si p̄m̄ fuit q̄rē p̄m̄ si hōies hūc dñs Et int̄ p̄m̄
 tēi hūc dñs Et int̄ tēi q̄rē int̄ q̄rē p̄m̄
 sūmā h̄ p̄m̄ q̄rē solui possē q̄rē n̄. Vñ ut ip̄s q̄ solui possē
 ab hys qui solui n̄ possē cognoscāt. talē ē tūdini euidētī. uidelicet
 ut addat nūmū p̄m̄ si cū nūo tēi q̄rē. si eoz sūmā equal fuit
 nūo si tēi q̄rē p̄m̄ tē solubīl erit q̄stio. si at̄ īequal fuit. tē
 nō possē solui cognoscāt ut ī hac q̄stione ī q̄ p̄m̄ sedē h̄ et
 tēi q̄rē hūc ḡ int̄ om̄s. hūc dñs. Nā sedē tēi

panu
 1
 pm
 2
 sad
 3
 teta
 4
 Cate
 5
 Cate
 1E
 self
 21
 Sepu
 31
 Octu
 44
 Nou
 53
 6
 111
 vi
 7E
 ru
 77

i et c et f. anno et tunc cupio et quoniam quia et sic de iusticia hoc uerum
certum cu iudicio nobis 147

p¹m²
 2
 3
 4
 5
 6
 7
 8
 9
 10
 11
 12
 13
 14
 15
 16
 17
 18
 19
 20
 21
 22
 23
 24
 25
 26
 27
 28
 29
 30
 31
 32
 33
 34
 35
 36
 37
 38
 39
 40
 41
 42
 43
 44
 45
 46
 47
 48
 49
 50
 51
 52
 53
 54
 55
 56
 57
 58
 59
 60
 61
 62
 63
 64
 65
 66
 67
 68
 69
 70
 71
 72
 73
 74
 75
 76
 77
 78
 79
 80
 81
 82
 83
 84
 85
 86
 87
 88
 89
 90
 91
 92
 93
 94
 95
 96
 97
 98
 99
 100

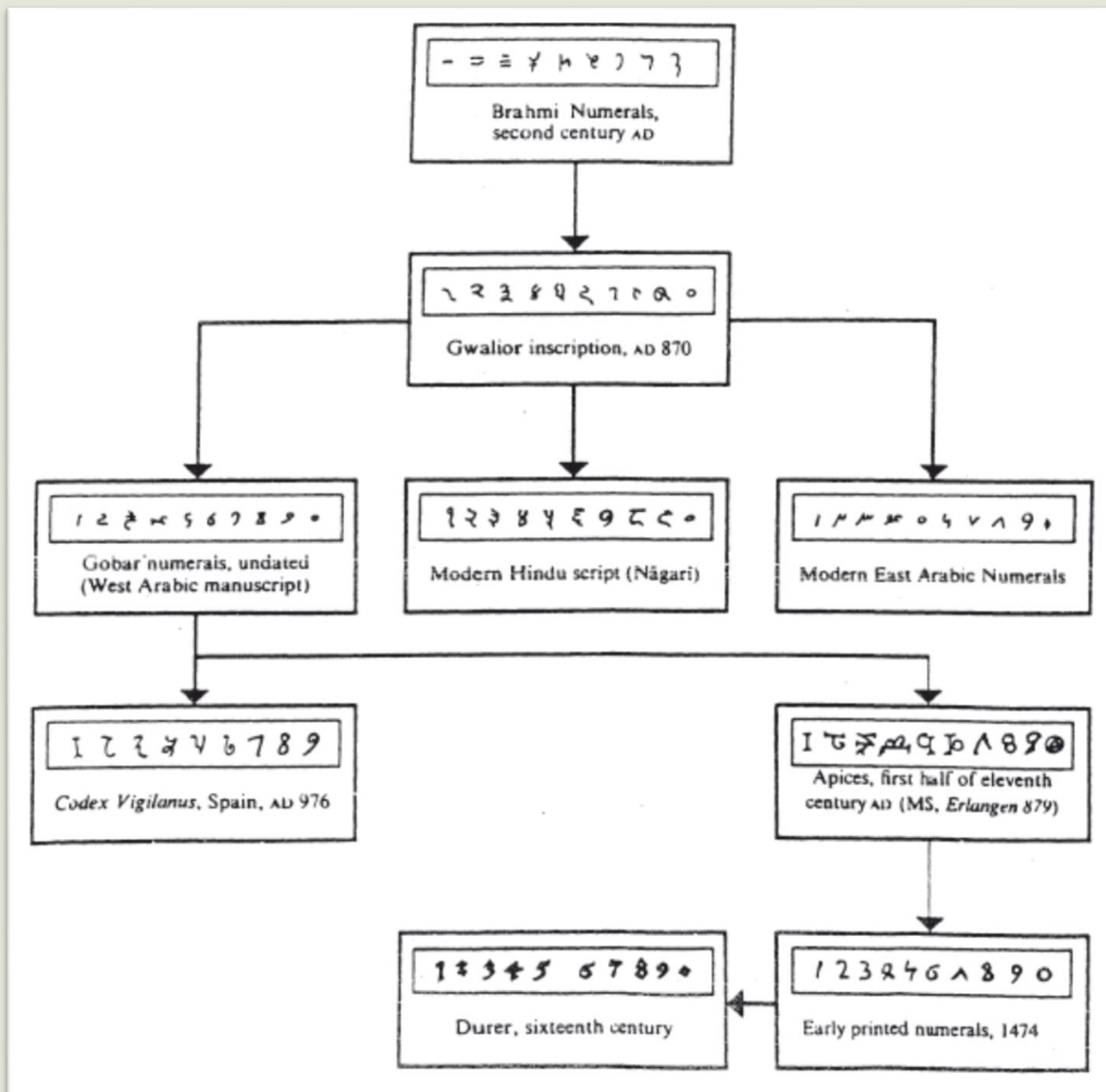


Gedicht, 13^{de} eeuw



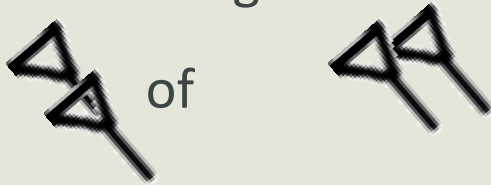
PIETRE VOLVER 1289





Nul

- Babyloniërs: derde eeuw BC, om lege positie aan te geven



- Indiërs, zelf uitgevonden of via Chinezen
- Brahmagupta (600 AD)



Acceptatie

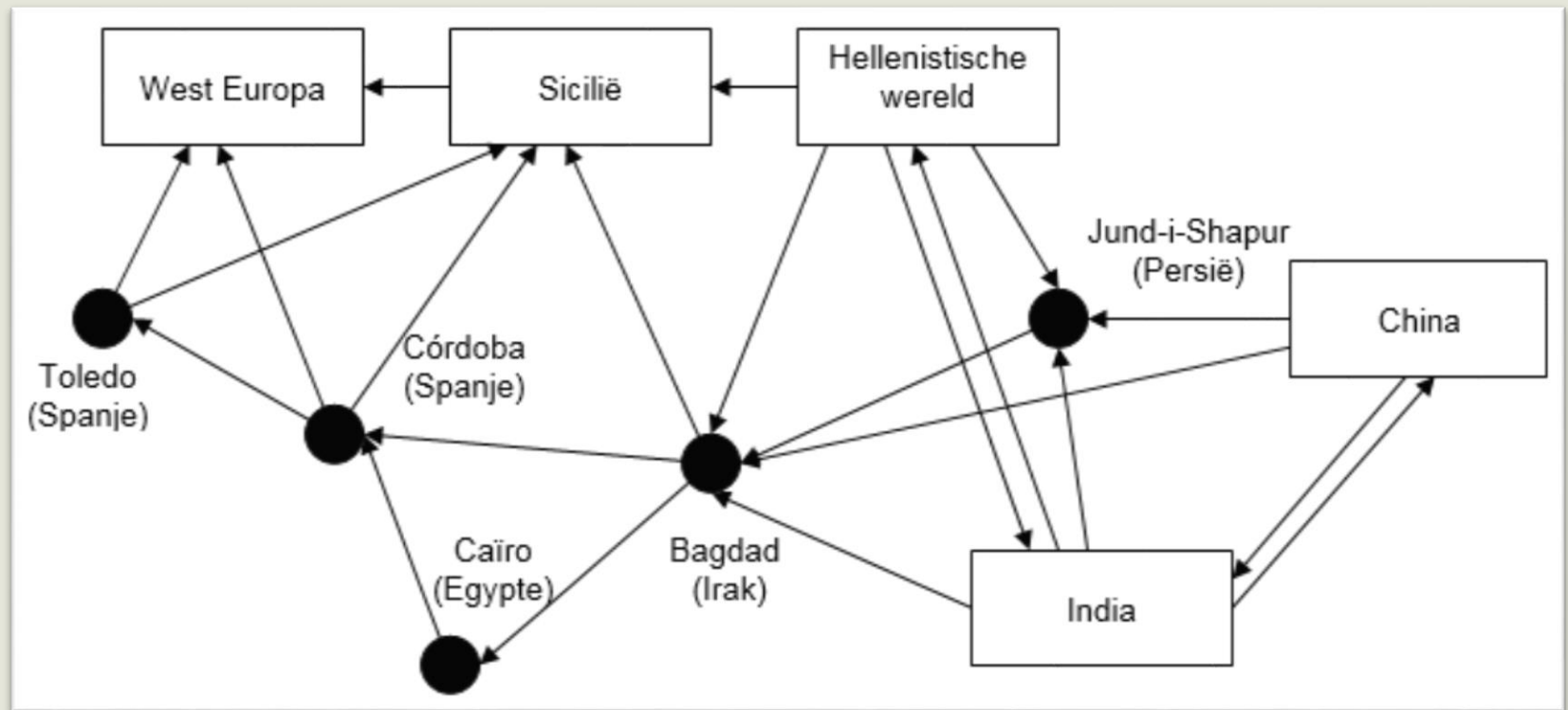
Waarom duurde acceptatie zo lang?

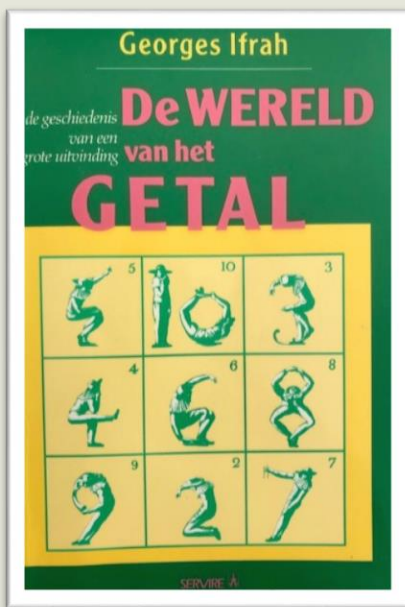
- In Middeleeuwen konden veel mensen niet lezen of schrijven.
- Penningrekenen is aanschouwelijker.
- Er is geen nul nodig. (De dubbele betekenis wordt toch lang lastig gevonden)
- Belangen van professionele rekenaars
- Ideologie

Waarom dan toch volledig vervangen?

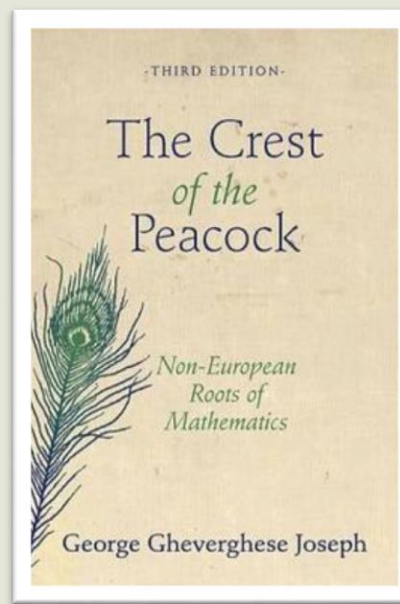
- Rekenen met breuken... toch eenvoudiger met Hindoe-Arabische cijfers.
- Aan 1 systeem genoeg. (Penningrekenen: penningen nodig voor het rekenwerk en een pen om het te noteren in Romeinse cijfers.)
- Je kunt met schriftelijk rekenen de gemaakte berekening nalopen op eventuele fouten.
- Een stoot tegen je tafel is met schriftelijk rekenen niet zo'n probleem.

Beïnvloeding

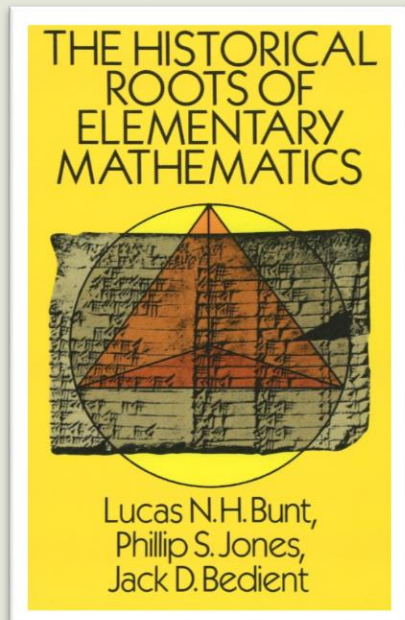




Ifrah, G. (1988). *De wereld van het getal*. Servire Uitgevers, Katwijk aan Zee.



Joseph, G. (1992). *The Crest of the Peacock: non European roots of mathematics*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.



Bunt, N.H (1988). *The historical roots of elementary mathematics*. Dover Publications, New York.



Menninger, K. (1958). *Zahlwort und Ziffer*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen

Waarom geschiedenis?

- Kennen van de geschiedenis van een wiskundig concept of techniek leidt tot een dieper begrip ervan.
- Leidt tot een positievere attitude ten opzichte van wiskunde: wiskunde is gewoon door mensen bedacht. In een bepaalde tijd en op een bepaalde plaats
- Sluit aan op natuurlijke nieuwsgierigheid van leerlingen.
- Bron voor lesactiviteiten.