



Reken-wiskundige inzichten en 21st century skills

M. Verschoor & G. Bruin-Muurling
Zwijzen, Tilburg / Technische Universiteit Eindhoven

Dit artikel is een uitwerking/weergave van de lezing die wij hebben gegeven op de Panama-conferentie 2015. De lezing bestond uit drie delen, waarin we onze eerste ideeën/visie over de transitie van het reken-wiskunde onderwijs voor de 21^{ste} eeuw aan het publiek voorlegden om deze aan hen te spiegelen en daarover met ze in discussie te gaan.

In paragraaf 1 zetten we drie invloeden die wij als belangrijkste zien op een rij. Daaruit destilleren we een algemene trend tot meer nadenken door leerlingen.

In paragraaf 2 werken we dit idee van 'meer nadenken' uit voor het reken-wiskundeonderwijs. Tot slot schetsen we wat dat naar ons idee voor het reken-wiskundeonderwijs en de vernieuwing daarvan zou kunnen betekenen.

1 Een algemene trend in de ideeën voor het curriculum van de 21^{ste} eeuw

Onder invloed van digitalisering en globalisering verandert onze maatschappij in een rap tempo. Dit laat ook het onderwijs niet ongemoeid. De vraag rijst of ons onderwijs de leerlingen van nu nog wel voldoende voorbereidt op hun toekomst en, als dit niet het geval is, hoe we het onderwijs zo kunnen veranderen dat dit beter aansluit. We zien daarin drie belangrijke stromingen.

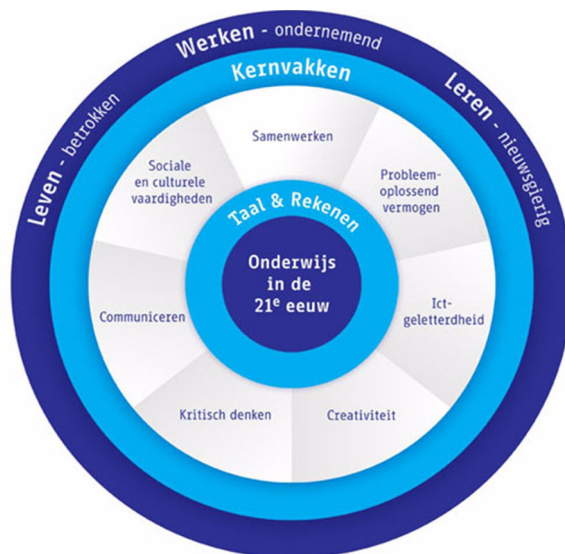
21st century skills

In de maatschappij is er sprake van een verschuiving van werkzaamheden, waarbij routinematige taken steeds meer verdwijnen. Dit soort taken wordt in steeds grotere mate overgenomen door robots en computers. Niet-routinematig werk, zoals analytische taken en het samenwerken in (multidisciplinaire) teams, daarentegen neemt in hoeveelheid juist toe. Dit betekent dat voor deze '21^{ste}-eeuwse' mix van werkzaamheden statische kennis minder of niet meer relevant is. Werk wat in essentie draait om analyse en samenwerking vraagt van een werkende om flexibiliteit, creativiteit, voortdurend leren, aanpassen en interpersoonlijke effectiviteit. Algemeen wordt gesteld dat de werknemer van morgen in het onderwijs van vandaag geen goede voorbereiding op dergelijke eisen vindt (Gravemeijer 2012).

Het nadenken over benodigde vaardigheden en consequenties voor de toekomst van het onderwijs als geheel is inmiddels bekend onder de gevleugelde term *21st century skills*, of 21^{ste} eeuwse vaardigheden. Het gaat daarbij vooral om algemene vaardigheden, die hun weerslag zouden moeten vinden in de vakken. De term *21st century skills* kent velerlei invullingen. Recent heeft de SLO meerdere nationale en internationale modellen van *21st century skills* met elkaar vergeleken en op een rijtje gezet, in het rapport 21^{ste} eeuwse vaardigheden in het curriculum van het funderend onderwijs (Thijs, Fisser & Hoeven, 2014). In alle onderzochte modellen worden samenwerking, communicatie, ICT-gebruik en sociaal en cultureel bewustzijn (inclusief burgerschap) als belangrijke vaardigheden genoemd. Daarnaast speelt zelfregulering een belangrijke rol; dat, in de definitie van het Leap21program: 'requires individuals to monitor their own work and to incorporate feedback to develop and improve their work products' (Thijs e.a., 2014).

Kennisnet heeft een model voor 21^{ste} eeuwse onderwijs ontwikkeld (fig.1).¹ We zien hierin de kernvakken, met daarbinnen de 21^{ste} eeuwse vaardigheden: samenwerken, probleemoplossend vermogen, ICT geletterdheid, creativiteit, kritisch denken, communiceren, en sociale en culturele vaardigheden. Taal en rekenen krijgen een prominente plaats in de binnenring. Maar in welke verhouding staan zij tot de 21^{ste} eeuwse vaardigheden?

Concluderend kunnen we zeggen dat de onderwijsterm ‘21^{ste} eeuwse vaardigheden’ vooral gericht lijkt op de vorm van werken. De vorm van werken moet vervolgens een uitwerking krijgen binnen de verschillende vakken. Wat dat inhoudelijk voor die vakken betekent krijgt in de discussie rond 21st century skills echter nauwelijks aandacht.



figuur 1: model voor 21st century skills

Inhoud van het vak

Toch heeft de digitalisering ook inhoudelijke consequenties. In de twintigste eeuw zagen we nog het uitrekenpotlood achter het oor. Nu heeft iedereen altijd en overal de beschikking over uitrekenapparatuur die steeds complexere bewerkingen aankan. Het uit het hoofd of op papier uitrekenen wordt nu al nauwelijks meer van ons gevraagd. Dit betekent dat we ons kunnen - en moeten - richten op complexere taken dan het uitrekenen alleen. Bovendien zijn de berekeningen die onze rekenapparaten kunnen doen complexer dan we tot nu toe zelf konden uitvoeren. Het wordt daarmee steeds belangrijker dat we weten wat we aan het uitrekenen zijn, wat de uitkomst betekent en of er iets mis is gegaan. De vraag: ‘Welk antwoord komt uit deze berekening?’, heeft steeds minder betekenis als losstaande vraag. Dit alles vereist (reken-)wiskundekennis van een heel andere orde dan we tot nu toe gewend waren.

In deze lijn pleitte Wolfram in zijn *TEDGlobal talk* in 2010 voor ‘Stop teaching calculating and start teaching math’ (Wolfram, 2010). Hij plaatst het uitrekenwerk in het rijtje: de juiste vraag stellen, een vertaling maken naar wiskunde, uitrekenen in de brede zin van het woord en evalueren van het antwoord. Hij constateert dat juist die ene stap, waar de computers beter in zijn dan wij, het uitrekenen, veruit de meeste aandacht krijgt in het huidige onderwijs. Hij pleit dan ook voor meer aandacht voor dit hele proces in het onderwijs.

De digitalisering heeft niet alleen invloed op de status van uitrekenwerk. Er wordt ons niet alleen rekenwerk uit handen genomen, de digitalisering zorgt ook voor nieuwe problemen die opgelost moeten worden en nieuwe kansen voor een andere inhoud van onze werkzaamheden. Er komt een verschuiving in de vakgebieden uit de wiskunde die een grote rol spelen in ons dagelijks (werk)leven en bovendien ontstaan er ook nieuwe vakgebieden. De voorbeelden zijn talloos. Zo vormt zich door de enorme hoeveelheid data die ons ter beschikking staat een nieuw werkveld met betrekking tot de analyse van *Big Data*. In de brei van beschikbare digitale data gaan analisten op zoek naar patronen, naar nieuwe aanwijzingen voor verbanden. Ze geven bedrijven de mogelijkheid, goedkoop en efficiënt aan stuurinformatie te komen. Zo meet de NS met een proef in Groningen de drukte in treinen aan de hand van het WIFI-gebruik, (Van den Heuvel, 2013; Ton, Van de Heuvel & Hoogendoorn, 2014) en verkennen gemeenten hoe ze aan de hand van gebruik van *Big Data* de burgers van dienst kunnen zijn (Van Vliet & Van de Weerd, 2014).

De toenemende digitalisering leidt dus tot zowel nieuwe ontwikkelingen op het gebied van algemene vaardigheden als naar een meer vakspecifieke discussie over de inhoud van het vak. Voor de zekerheid: los van de discussie over de wijze waarop het rekenen aangeleerd zou moeten worden, gaat het ons hier om de rol van rekenen in het hele curriculum. Wij zien hier zowel een verschuiving in de verhouding tussen rekenwerk en

wiskundig denken zoals probleem oplossen, als een verschuiving naar meer complexere taken rondom het rekenwerk én een verschuiving naar andere vakgebieden.

Lessen uit het verleden

Naast deze twee ontwikkelingen op het gebied van de veranderende maatschappij is er nog een discussie die invloed heeft op zowel de inhoud als de vorm van het reken-wiskundeonderwijs voor de toekomst. De hervormingen van het afgelopen tijdvak, die onder andere gericht waren op een conceptueler begrip van het rekenen, lijken ons namelijk nog niet gebracht te hebben waar we naar streefden. Zeker op het terrein van de doorgaande leerlijnen zien we nog steeds problemen.

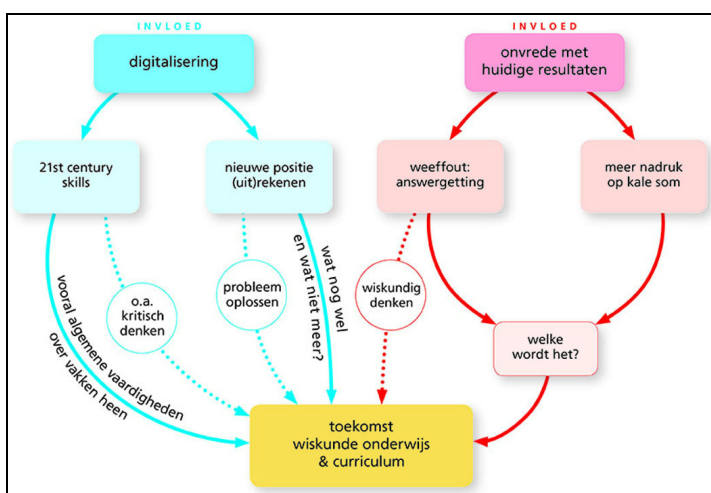
Bruin-Muurling heeft in haar dissertatie (Bruin-Muurling, 2010) op basis van een analyse van de grootste reken-wiskundemethodes en de vaardigheid van leerlingen laten zien dat er met betrekking tot de breuken-leerlijn hiaten in het curriculum zitten. Zij wijst daarbij op verkokering in de vorm van het intrainen van getalspecifieke procedures en een tekort aan aandacht voor het ontwikkelen van hogere niveaus van begrip en beheersing in vergelijking met de aandacht voor de fenomenologische inbedding. Deze factoren lijken een verklaring te geven voor het tegenvallende beheersingsniveau en problemen op het gebied van transfer en retentie. Deze hiaten zijn te vinden in zowel het primair als voortgezet onderwijs en verstoren ook buiten het breukendomein de doorgaande leerlijn.

Niet alleen beheerst een deel van de leerlingen het in de officiële doelen gedefinieerde niveau onvoldoende, ook lijkt dit officiële niveau ontoereikend om rekenkennis daadwerkelijk te gebruiken bij vakken als wiskunde, natuurkunde, scheikunde en economie. Zouden we ook in Nederland last hebben van rekenonderwijs, dat, zoals Daro het zo mooi definieerde 'miles wide, inch deep' is? (Daro, 2011).

Daarnaast speelt er nog iets. In de uitwerking lijkt het curriculum een geplaveide weg, waarbij alle denkwerk de kinderen consequent uit handen wordt genomen. Op dat pad vinden zij nog een enkel scheurtje, waarvoor we de leerlingen vervolgens uitgebreid waarschuwen en complimenteren als zij daarover heen zijn gestapt. Een verwarde leerling lijkt het ergste wat ons kan overkomen, en wordt vaak gezien als teken van slecht onderwijs. Met het directe instructiemodel worden leerlingen zoveel mogelijk op maat, stapje voor stapje door het curriculum geloodst.

Deze aanpak brengt een risico met zich mee als het gaat om de ontwikkeling van het kritisch wiskundig denken. Leerlingen worden getraind om de vraagstelling te interpreteren en naar verwachting te antwoorden. Vraagvormen worden veelvuldig herhaald, waardoor ze steunpunten vormen. Maar van wat? Op deze manier komt er bij het maken van opgaven weinig wiskundig denken aan te pas, zelfs wanneer de vraagstelling wel die schijn opwerpt. Het oorspronkelijke doel van de onderwijsvernieuwingen komt daardoor niet goed uit de verf. Doordat leerlingen standaardproblemen voorgeschoteld krijgen waarmee ze nooit uitgedaagd worden echt te denken, kunnen ze verworden tot wat Meyer zo mooi *impatient problem solvers* noemt (Meyer, 2010).

Tussenstand - een gemene deler



figuur 2: schema invloeden rond de vernieuwing van het rekenonderwijs voor de 21^{ste} eeuw

We hebben drie ontwikkelingen rond de vernieuwing van het (reken-wiskunde)onderwijs besproken (fig.2).

Deze representeren aparte discussies, vanuit verschillende vakgebieden en met een eigen theoretische achtergrond. Toch zien wij een grote gemene deler tussen deze stromen. Een van de 21^{ste} eeuwse vaardigheden is kritisch denken. Vanuit de nieuwe rol van rekenen-wiskunde in de maatschappij wordt het probleem oplossen en het kritisch wiskundig denken een grotere rol toegeschreven en vanuit een retrospectief op het huidige onderwijs lijkt de les te zijn dat we de leerlingen actief aan het denken moeten zetten.

Kortom, het denkwerk echt neerleggen bij de leerling lijkt een gemene deler die veel kansen biedt. Niet alleen voor het inbedden van enkele 21^{ste} eeuwse vaardigheden in het rekenen, waar de SLO voor pleit (SLO, 2014), maar ook voor een stap verder: het werkelijk op een 21^{ste} eeuwse manier leren rekenen. En hoewel dat niet voor elke leerling op hetzelfde niveau bereikt zal kunnen worden is dat voor alle leerlingen van belang en ook mogelijk.

2 Hoe vul je ‘denken’ in voor het reken-wiskundeonderwijs?

In paragraaf 1 hebben we het echt nadenken van de leerling als gemene deler van de drie genoemde ontwikkelingen geïdentificeerd. Daarin lijkt een kans te liggen. Maar wat is dat denken (in een reken-wiskundige setting) dan?

Wiskundig denken

Sagan zei: ‘Science is a way of thinking much more than it is a body of knowledge’ (Sagan, z.j.). Je zou kunnen zeggen dat datzelfde geldt voor wiskunde. Ook wiskunde is een manier van denken en niet alleen een verzameling van kennis en feiten. En gekoppeld daaraan, zou ook rekenen meer moeten zijn dan alleen uitrekenen, het gebruiken van geleerde feiten en rekenstrategieën. We hebben al geconstateerd dat leerlingen in het onderwijs van morgen meer op het nadenken in het leerproces moeten worden aangesproken. Maar we zouden in het licht van het citaat van Sagan dit nadenken niet alleen moeten zien als een middel, maar ook al een doel van onderwijs op zich.

Bij de invulling wat we onder wiskundig denken als doel van onderwijs op zich verstaan, moeten we rekening houden met de kritiek op ons huidige systeem. De roep om het onderwijs meer over wiskundig denken te laten gaan is namelijk niet nieuw. En toch heeft ons dat nog niet gebracht bij wat we wilden. Dat vraagt om een herbezinning op ons onderwijs. Welk type denken willen we leerlingen laten ontwikkelen? Welke doelen horen daarbij? Wat heeft ervoor gezorgd dat wij die doelen nog niet bereikt hebben? Wat heeft wel gewerkt, en in welke zin wijken doelen voor de moderne samenleving af van de doelen om te leren denken die ten grondslag liggen aan het onderwijs nu?

Wij stelden in paragraaf 1 al dat rekenen in de maatschappij nu - en in de toekomst - een hele andere rol heeft dan in de tijd waarin de grondslagen voor ons huidige rekenonderwijs zijn gelegd. Om het wiskundig denken als inhoud van ons toekomstige onderwijs uit te werken, kijken we eerst naar wat voor een wiskundige essentieel is in zijn vak. Vervolgens leggen we de link naar wat eigentijds reken-wiskundeonderwijs zou kunnen zijn.

Wiskunde wordt wel het vak van de structuren genoemd. Een wiskundige zoekt naar de onderliggende structuur van een probleem. Dit gebeurt bijvoorbeeld door te bedenken wat wel en niet essentieel is in het probleem dat onderzocht wordt, en door te analyseren welke context weggelaten kan worden. Hierdoor worden onderliggende structuren steeds duidelijker. Dit geldt niet alleen voor hogere wiskunde, maar speelt ook al bij de eerste grondslagen die in het basisonderwijs aan bod komen een belangrijke rol. Een aantal structuren en grote ideeën komen bij veel reken-wiskundige onderwerpen steeds terug. Voorbeelden van dergelijke structuren zijn maatverfijning, eenheid, inverse, equivalentie en absoluut versus relatief. Deze structuren zijn in de basis ook terug te vinden in het hele curriculum van het basisonderwijs, maar worden niet als zodanig uitgewerkt of expliciet gemaakt. Impliciet komen ze wel naar voren in bepaalde denkmodellen zoals bijvoorbeeld bij de dubbele getallenlijn. Deze modellen worden echter niet altijd over de volle breedte doorgetrokken, en de link naar de onderliggende structuur blijft vaak impliciet.

Structuur komt niet alleen naar voren wanneer je dezelfde denkmodellen kunt gebruiken. In de wiskunde komt het ook vaak voor dat meerdere betekenissen die in essentie met hetzelfde idee te maken hebben samen komen in hetzelfde symbool. Het $=$ -teken is hier een mooi voorbeeld van en kan gezien worden als een

opdracht tot rekenen. Je zou dat kunnen vergelijken met het $=$ -teken op de rekenmachine. Maar de $=$ geeft ook een gelijkheid aan; beide kanten van het $=$ -teken zijn gelijk. Van deze betekenis maak je bijvoorbeeld gebruik bij vlekkenommen. Toch ontwikkelt een deel van de leerlingen dit begrip van de $=$, en dus van equivalentie, niet. Het breien ($6 + 5 = 11 + 8 = 19$), wat in het voortgezet onderwijs hard wordt afgerekend, is een typisch voorbeeld waarbij het $=$ -teken de betekenis heeft van het gaan rekenen, maar er niet aan equivalentie wordt voldaan ($11 = 19 = 19$). Ook bij het oplossen van vergelijkingen komt dit hiaat in het begrip tot uiting wanneer de leerlingen niet begrijpen waarom een docent van ' $4 = x$ ' zonder uitleg ' $x = 4$ ' maakt. Overigens zorgt ook de spreektaal hier voor verwarring: we zeggen bijvoorbeeld: 'een uil is een vogel' of 'de man is groot'. In de spreektaal kan 'is' niet alleen 'is gelijk' zijn, maar ook 'is een deelverzameling van' of 'heeft de eigenschap' beteken.

Structuren zijn abstract. Door de koppeling die vaak gelegd wordt tussen 'abstract denken' en 'formeel weergeven' kun je in de verleiding komen om te denken dat jonge kinderen niet in staat zijn om abstract te denken. Het is een valkuil in het reken-wiskundeonderwijs om erg veel belang te hechten aan het correct formeel weergeven in een heel vroeg stadium. Laten we onze formele eisen los en focussen we veel meer op de (onderliggende) ideeën, dan blijkt dat kinderen vrij abstracte ideeën in hun eigen taal gewoon begrijpen. Zolang je abstractie en formeel maar niet door elkaar haalt, kun je dus al heel vroeg met kinderen aan abstracte ideeën werken, ook al lijkt het op het eerste gezicht misschien van een te hoog begripsniveau. Zo begrijpen ook jonge kinderen in groep 3 of 4 ideeën als inverse berekeningen. Dit kan zelfs op een concreet (handelings)niveau starten. Het is daarbij niet nodig dat te vatten in formele regels als: $a + b = c$ dus $c - b = a$ en $c - a = b$ en $b + a = c$, of in formele taal, als inverse relatie. Het gaat om de ervaring, waar ze later op verder kunnen bouwen.

Bij 'Rekenpanda' (Bruin-Muurling, Van den Boomen, Froeling, Masselink & Vermeulen, 2013-2014) zijn auteurs uitgedaagd om werkbladen te ontwikkelen waarmee kinderen al op jonge leeftijd wiskundige structuren ontdekken. In dit voorbeeld (fig.3) onderzoeken leerlingen in groep 4, aan de hand van modellen die ze kennen, hoe plus- en min-sommen met elkaar samenhangen. Hierdoor krijgt de inverse relatie betekenis en worden leerlingen ondersteund het waarom in eigen woorden te formuleren.

Je onderzoekt wat plussommen en minsommen met elkaar te maken hebben

OPDRACHT 1 Drie getallen op één lijn. Welke plussommen en minsommen zie jij? Bedenk er 6.

20	8	28
16	7	9
4	15	19

OPDRACHT 2 Reken uit.

Emmi is op bladzijde 13 van haar boek. Het boek heeft 29 bladzijden. Hoeveel bladzijden moet ze nog lezen? Laat zien hoe je rekent.

OPDRACHT 3 Hoeveel euro moet Stijn nog sparen?

Stijn heeft 22 euro gespaard. Hij wil een spel kopen dat 36 euro kost. Hoeveel euro moet hij nog sparen? Vul de getallen in bij de getallenlijnen. Welke som hoort erbij?

OPDRACHT 4 Welke sommen horen bij de getallenlijnen?

OPDRACHT 5 Reken uit op twee manieren.

Op de weegschaal staat 77 gram, maar ik wil 100 gram drop. Hoeveel gram drop nog?

Ik heb 37 knikkers. Ik verlies er 19. Hoeveel knikkers heb ik nog?

Ik moet 23 euro betalen. Ik geef 50 euro. Hoeveel krijg ik terug?

Ik heb 58 plaatjes. Mijn broertje heeft 33 plaatjes. Hoeveel heb ik er meer?

WAT HEBBEN PLUSSOMMEN EN MINSSOMMEN MET ELKAAR TE MAKEN?

figuur 3: voorbeeld uit Rekenpanda groep 4

Op een ander werkblad (fig.4) onderzoeken leerlingen het verband tussen vergrotingsfactoren en de regelmaat bij de rijtjes van het metriek stelsel (voor lengte, oppervlakte en inhoud). Samenvattend lijkt het zoeken naar structuren en daarmee het vinden van samenhang in het rekenen een goede invulling voor wiskundig denken dat aansluit bij de doelen die we voor ogen hebben: namelijk dat leerlingen meer worden uitgedaagd tot denken in het leerproces zelf, een hoger begripsniveau en wiskundige manieren van denken als een doel op zich. Dit lijkt ook al te kunnen met jonge kinderen.

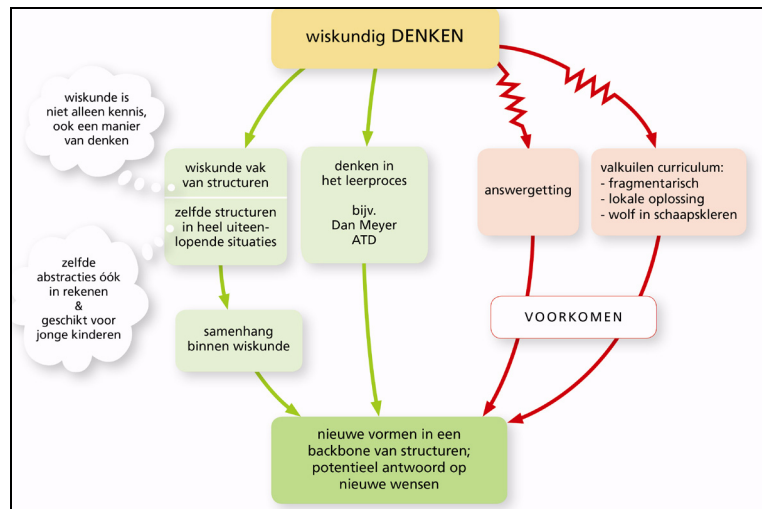
bewust zijn van de ‘maar’ van trucjes als snelste route naar een juist antwoord, zien we het gebruik ervan (weer) sterk terug. Het feit dat leerkrachten gericht zijn op de kortste route naar het juiste antwoord is in de huidige onderwijssetting begrijpelijk, maar een grote valkuil; het richt ons juist op de kleine tussenantwoorden en het daaraan afmeten of het leerproces goed verloopt. De focus op het ‘ervoor zorgen dat leerlingen het juiste antwoord geven’ beperkt ons in de essentie: namelijk ons af te vragen hoe het probleem wat we aan de leerlingen voorleggen kan bijdragen aan het begrijpen van de onderliggende structuren. De combinatie van het ontstaan van schijninzichten en *answer getting* zorgt er voor dat we kinderen dreigen te trainen in het geven van antwoorden die lijken op inzicht. Een wolf in schaapskleren. We laten ons misleiden door de uiterlijke schijn.

Tussenstand: potentie

Samenvattend kunnen we zeggen dat ons curriculum historisch gegroeid is tot een verzameling van weloverwogen en welomschreven taken die de leerling moet kunnen uitvoeren. De ordening van de taken voldoet aan de klassieke opbouw.

De totaalsom heeft echter de potentiële samenhang niet volledig benut. Het inbedden van het curriculum aan onderliggende ideeën en structuren heeft de potentie om een goed tegenwicht te bieden aan *answer getting*, schijninzichten en een te fragmentarische invulling van het rekenen. Dat betekent dat het zinvol is om onderwerpen die nu in het curriculum opgenomen staan met een frisse blik te bekijken. Passen ze nog in de basis-kennis van de veranderende samenleving? Op welke wijze dragen ze bij aan begripsvorming met betrekking tot de onderliggende structuren? Uiteraard kunnen leerkrachten dit nu al doen; in het huidige invulling curriculum andere accenten leggen en de leerlingen meer aanzetten tot denken. Wij vinden het echter ook van belang dit breder te trekken en naar de doelen van ons onderwijs en de doorlopende leerlijn als geheel te kijken (fig.5).

Denken aan vernieuwing van het curriculum, uitgaande van de structuren heeft een enorme potentie, zowel voor het updaten van de inhoud als het corrigeren van de wefffouten die we zijn tegengekomen en het bieden van een raamwerk aan leerkrachten om los te komen van het voordoen-nadoen.



figuur 5

3 Een aanzet tot 21^{ste} eeuwse reken-wiskundeonderwijs

We hebben tot nu toe drie aanleidingen gezien om over het reken-wiskundeonderwijs van de toekomst na te gaan denken. Hoewel de term ‘21^{ste} eeuwse vaardigheden’ vooral de vorm van werken betreft (de vaardigheden), hebben we als gemene deler het kritisch denken aangewezen. Als het gaat om vernieuwingen in het reken-wiskundeonderwijs vertalen we dat naar het wiskundig denken. Structuren, onderliggende ideeën, zijn een uitwerking van wat in de kern van het wiskundig denken ligt. Tegelijkertijd biedt het zoeken naar struc-

turen een tegenwicht aan het *answer getting*, een anker om hiaten in het curriculum weg te werken en een oplossing om mogelijke ontwikkeling van schijninzichten te voorkomen.

Wiskundig denken en communiceren

Dat klinkt allemaal mooi, maar welke aanknopingspunten geeft dit nu om verder te gaan? De SLO adviseerde in 2014 om de 21^{ste} eeuwse vaardigheden te gebruiken, ook bij het vak rekenen (SLO 2014). Uitgaande van het voorgaande, pleiten wij ervoor om hier niet alleen te focussen op werkvormen, los van nieuwe inhoud. Juist de combinatie van kritisch denken en communiceren met wiskundig denken en communiceren kan een krachtige leeromgeving creëren.

Wanneer het doel van de activiteiten verandert, zal het natuurlijk ook nodig zijn om de oude inhoud die blijven, in een andere vorm aan te bieden. Zelf denken, communiceren en zelfregulering moeten dan richtinggevend worden in de aanbestedingsvorm. Hierbinnen blijven natuurlijk ook de al bestaande aanbestedingsvormen aanwezig. Echter, omdat het doel, en daarmee de *socio math norms* verschuiven, krijgen die werkvormen een andere betekenis.

Als het om de vorm van wiskundeonderwijs van de toekomst gaat, zijn er allerlei ontwikkelingen. We lichten er twee uit, die passen bij de uitgangspunten die we zojuist geformuleerd hebben: '3Act' van Meyer (Meyer, z.j., youtube) en de 'Anthropological Theory of the Didactic' van onder andere Chevallard (Chevallard, 2012) met uitwerkingen van Garcia en Ruiz-Higueras (2013).

Meyer kiest er voor om ('Act 1') een wiskunde probleem aan te bieden zonder uitleg over de tussenstappen. Hij vangt dit probleem in een visuele context, met zo min mogelijk woorden. Het probleem moet voor leerlingen dermate aansprekend zijn, dat zij een - wat hij noemt - *what the fuck-moment* ervaren. (Meyer, blog) (fig.6).



figuur 6: Act 1

In hun zoektocht naar het antwoord ('Act 2') bepalen de leerlingen zelf welke informatie ze missen, en kiezen ze hun methode van oplossen. De leerkracht heeft hierbij een ondersteunende rol.

Zodra de oplossing gevonden is volgt 'Act 3': de leerling krijgt een vervolprobleem aangeboden, zodat de oplossing geen geïsoleerde opbrengst is. Ook hier is de rol van de leerkracht van belang: hij introduceert het juiste vervolprobleem. Dit lijkt wat op de uitgangspunten van het drieslagmodel, maar gaat net een stapje verder. Meyer creëert hier de verwarde leerling, die vanuit verwondering (en verwarring) op zoek gaat naar het antwoord op de gestelde vraag. Daarbij ontwikkelt de leerling vaardigheden in het probleemoplossen. De rol van wiskunde is hierbij die van een onderdeel van de oplossing.

The 'Anthropological Theory of the Didactic' (ATD) gaat uit van een dynamische contexten, die zo worden aangeboden dat het wiskundig denken, in samenspel tussen leerling en leerkracht, groeit. Zowel leerling als leerkracht leren (Chevallard, 2012). In de taken wordt eerder een maatschappelijke dan puur wiskundige noodzaak gecreëerd om het wiskundig denken zich te laten ontwikkelen. De ruimte ontbreekt hier om uitgebreid op de achtergronden in te gaan, dus we illustreren de uitgangspunten met een voorbeeld.

In een kleutergroep wordt een doos met zijderupsen geplaatst. De taak is om de rupsen in leven te houden: ze moeten eten. De leerlingen ontdekken welke blaadjes de rupsen eten en hoeveel blaadjes ze nodig hebben per dag. Dit is echter een dynamische context. De situatie verandert met de dag en wordt ook steeds com-

plexer. De rupsen groeien, verpoppen zich, worden motten. Er moeten veel hoeveelheden gemeten worden, bijgesteld worden en de communicatie heeft een werkelijk doel. Ook wordt de context gaandeweg gecompliceerder, als de leerlingen niet meer zelf de blaadjes verzamelen, maar anderen opdracht moeten geven dit te doen. Hier wordt wezenlijk wiskundig gecommuniceerd (Garcia, 2013).

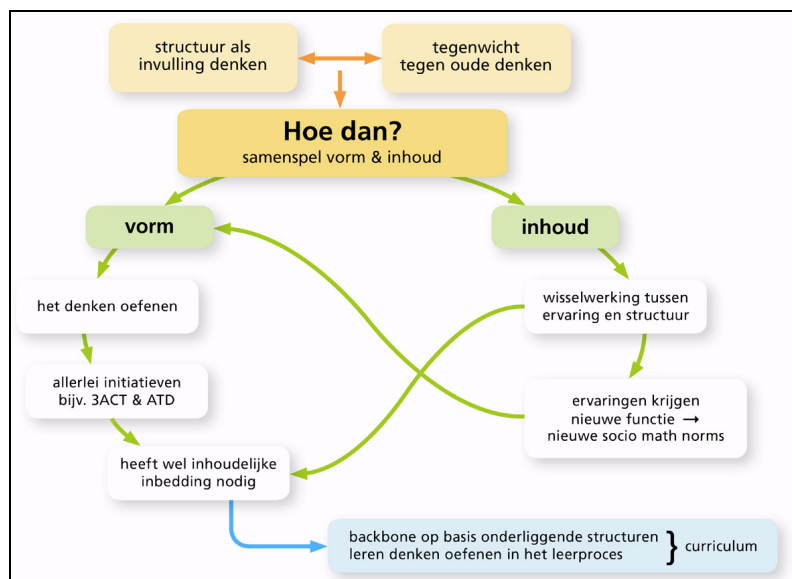
Beide aanpakken hebben voor- en nadelen. Meyer focust scherp op het (wiskundig) probleemoplossen, en geeft daarvoor een vorm van werken. Zijn voorbeelden hebben een sterke wiskundige focus, maar zijn niet per se gericht op het ontwikkelen van een begrip van samenhang tussen onderwerpen. Bij ATD is de context breder en wordt er een sterker beroep gedaan op 21^{ste} eeuwse vaardigheden als communicatie, maar is het, door het vrije karakter, moeilijker om tot de reken-wiskundige essentie te komen. Voor beiden geldt dat inbedding nodig is, hetzij in de maatschappelijke context, hetzij in de reken-wiskundige context. Deze werkvormen krijgen pas echt zin als het denken vakinhoudelijk richting of verdieping krijgt. Anders blijven het geïsoleerde activiteiten.

De voorbeelden laten onder andere zien dat we nieuwe *socio math norms* moeten neerzetten. Een daarvan is dat we niet meer bang moeten zijn voor de verwarde leerling, maar de verwarring van de leerlingen moeten omarmen. Verwarring is een essentiële fase in het leerproces. Bovendien hoort het opbouwen van de weerbaarheid bij de leerling bij het opbouwen van de 21^{ste} eeuwse vaardigheden, en helpt de leerling om een creatieve en flexibele denker te worden. Hierbij past een citaat van Sfard (1991, pag.33):

Those who are not prepared to actively struggle for meaning (for reification) would soon resign themselves to never understanding mathematics. 'Mathematically fittest', even if they feel at times somewhat shaky in their understanding, seem to have enough motivation, patience, and intellectual discipline to put up with this situation in a trustful anticipation of a salutary insight.

Hier is een rol voor de leraar weggelegd. Het belang van verwarring is er voor alle leerlingen, maar elke leerling heeft een eigen niveau en een eigen mate van begeleiding nodig om van die verwarring een leermoment te maken.

Zoals we in paragraaf 2 van dit artikel lieten zien, bieden wiskundige structuren en onderliggende ideeën een kader voor het reken-wiskundeonderwijs voor de toekomst. Je zou dit kunnen zien als een *backbone* van het onderwijs waarin activiteiten van leerlingen en docenten betekenis krijgen, of het nu om het maken van sommen gaat, het voeren van een leergesprek of onderzoekende activiteiten. De onderliggende wiskundige structuren zorgen voor samenhang binnen de *backbone* en zijn een invulling voor het kritisch wiskundig denken als doel op zich. Activiteiten die gestoeld zijn op de 21^{ste} eeuwse vaardigheden kunnen dus in de *backbone* worden gehangen. Als je deze activiteiten of taken zorgvuldig kiest, zijn ze hetzij essentiële stations op de doorgaande route van een wiskundige structuur, of zelfs knooppunten waar meerdere structuurlijnen elkaar raken. Hierdoor kun je voortdurende samenhang tussen kritisch denken en kritisch wiskundig denken creëren. Elke taak wordt daarmee een ervaring die bijdraagt aan het verstevigen van de *backbone*.



figuur 7

Door de taken zodanig te construeren dat ze een plaats hebben in de *backbone*, en vervolgens de raakpunten inzichtelijk te maken of expliciet te benoemen ontstaat een kennisnetwerk, waarin activiteiten ook meer op metaniveau geplaatst kunnen worden. Hiervoor kan bestaande didactische kennis gebruikt worden, de onderliggende structuren zijn immers eigen aan het rekenen. Aanzetten daartoe zijn al in het curriculum aanwezig. Door die bestaande voorbeelden en lesstof in een ander licht van het totaal te plaatsen krijgen ze alleen een andere betekenis. Vanuit de knooppunten kun je verder funderen. Opgedane kennis moet ook beklippen. De mate waarin dat nodig is, en individueel ingekleurd moet worden, zal van kind tot kind verschillen (Bandstra, Danhof, Faber, Minnaert & Ruijsenaars, 2013). Die inbedding vindt idealiter plaats in een geupdate curriculum, aangepast aan de eisen van de steeds verder digitaliserende maatschappij, met een explicitering van de knooppunten in de *backbone* en waarin hiaten zijn weggewerkt (fig.7).

4 Toekomst

Het is duidelijk: de ontwikkelingen in de maatschappij, en daarmee in ons onderwijs, vragen om actie. Zonder alle opbrengsten uit het verleden weg te gooien, is er veel ruimte voor vernieuwing. Wij vinden niet dat het kind met het badwater moet worden weggegooid en de pendulum door moet slaan naar de andere kant. Wat we hopen is dat we de rekendiscussies van de afgelopen jaren achter ons kunnen laten, en dat we met elkaar met een frisse blik de toekomst in kunnen kijken. Wij zijn heel nieuwsgierig wat de toekomst gaat brengen en we hopen de lezer ook!

Noot

- 1 Zie: www.kennisnet.nl

Literatuur

- Bandstra, P., W. Danhof, S. Faber, A. Minnaert & W. Ruijsenaars (2013) *Rapport Rekenproject Leerbaarheid van hoofdrekenen*. Via: <http://www.steunpunttaalenrekenen.nl>
- Bruin-Muurling, G. (2010) *The Development of proficiency in the fraction domain: Affordances and constraints in the curriculum*. Eindhoven: University of Technology.
- Bruin-Muurling, G., M. van den Boomen, L. Froeling, C. Masselink & W. Vermeulen (2013-2014). *Rekenpanda 4a, 5a en 8a*. Tilburg: Zwijzen.
- Chevallard Y. (2012). *Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm*. Regular lecture at ICME-12. Seoul, 8-15 July 2012. Via http://www.icme12.org/upload/submission/1985_F.pdf
- Daro, P. (2011). *Against answer-getting*. Retrieved at 12/12/2013 from <http://vimeo.com/30924981>
- Garcia, J. & L. Ruiz-Higueraz (2013). *Task design within the Anthropological Theory of the Didactic: study and Research Courses for pre-school*. ICM study 22 Task design in Mathematics education (juli 2013).
- Gravemeijer, K. (2012). *Aiming for 21st. Century Skills*. 5(4).
- Heuvel, J. van den, E. Thellier & N. van Gerwen, (2013) *Privacy by Design bij reizigersmetingen op stations*. 297298.pdf via www.repository.tudelft.nl
- Meyer, D. (2010). *Math class needs a makeover*. https://www.ted.com/talks/dan_meyer_math_curriculum_makeover/transcript
- Meyer, D. <http://blog.mrmeyer.com/category/3acts/>
- Meyer, D. <https://www.youtube.com/watch?v=jRMVjHjYB6w>
- Meyer, D. <https://www.youtube.com/watch?v=p9sYzMG-43k>
- Ton, D., J. van de Heuvel & S. Hoogendoorn (2014). *Routekeuze in het station*. Via <http://www.verkeerskunde.nl/Uploads/2014/12/20141117-DT-JH-Artikel---Routekeuze-in-het-station.pdf>
- <http://www.kennisnet.nl/themas/21st-century-skills/>
- Sagan, C. (z.j.). BrainyQuote.com. Retrieved March 11, 2015, from BrainyQuote.com Web site: <http://www.brainyquote.com/quotes/quotes/c/carlsagan124576.html>
- Read more at <http://www.brainyquote.com/citation/quotes/quotes/c/carlsagan124576.html#10aoXXXqgg7WlZSv.99>
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.

- Thijs, A., P. Fisser & M. Hoeven (2014). *21^e eeuwse vaardigheden in het curriculum van het funderend onderwijs*. Enschede: SLO
- Vliet, A. van & C. van de Weerd (2014). *Dienstverlening met big data. Een verkenning voor gemeenten*. TNO.
- Wolfram, C. (2010). Stop Teaching Calculating, Start Teaching Math. *TEDGlobal 2010 talk*. Via: <http://blog.wolfram.com/2010/11/23/conrad-wolframs-ted-talk-stop-teaching-calculating-start-teaching-math/>

This article is an elaboration of our working group on the Panama conference 2015. We start by highlighting trends in the discussion about mathematics education for the future. We focus on three trends rooted in three different disciplines, in which we recognize a common factor: critical thinking. In the second part of this article we elaborate on what this 'critical thinking' can imply in mathematics education specifically: critical mathematical thinking. We conclude with a sketch of the implications this idea of critical mathematical thinking might have on educational reform.