Rekenen-wiskunde in de 21^{e} eeuw

Ideeën en achtergronden voor primair onderwijs

Jubileumbundel ter gelegenheid van het 35-jarig bestaan van Panama

Marc van Zanten (red.)

Panama – NVORWO – Universiteit Utrecht – SLO

Eindredactie: Marc van Zanten
Redactie: Marc van Zanten & Cathe Notten
Illustratie omslag: Kevin de Jong
Met dank aan: Alora Thijssen
Druk: T-Point Print, Enschede

Panama is een project van Universiteit Utrecht: Onderwijsadvies & Training, in samenwerking met de Nederlandse Vereniging voor Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs (NVORWO) en het nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling SLO.

Deze publicatie is mogelijk gemaakt door de Nederlandse Vereniging voor Ontwikkeling van het Reken-Wiskundeonderwijs (NVORWO).

Inhoud

Inleiding: 35 jaar Panama voor goed reken-wiskundeonderwijs

Het Panama-project voor rekenen-wiskunde in het basisonderwijs werd in 1981 opgericht en in 1982 vond de eerste Panama-conferentie plaats. De organisatie lag in handen van Ed de Moor vanuit de toenmalige Stichting Opleiding Leraren (SOL) in samenwerking met Adri Treffers van het instituut voor Onderzoek Wiskundeonderwijs en Onderwijs Computercentrum (OW&OC), het latere Freudenthal Instituut (Afb. 1).
Panama was oorspronkelijk bedoeld als nascholingsproject voor opleiders rekenen-wiskunde en didactiek: de naam staat voor ***PA****(bo)* ***NA****scholing* ***M****athematische* ***A****ctiviteiten.*[1] Maar al snel werden de jaarlijkse Panama-conferenties ook bezocht door schooladviseurs, onderzoekers, basisschoolleraren, auteurs van methodes en inspecteurs. De Panama-conferentie werd in *no-time* een toonaangevende ontmoetingsplek voor iedereen die het reken-wiskundeonderwijs een warm hart toedraagt.
Inmiddels is er 35 jaar verstreken waarin veel is gebeurd op het gebied van reken-wiskundeonderwijs. Steevast bood de Panama-conferentie het podium waarop belangrijke zaken werden gepresenteerd en bediscussieerd: van kerndoelen tot referentieniveaus; van cijferen tot probleemoplossen; van reken-wiskunde-methodes tot schoolbegeleiding; en ga zo maar door. Een prominente plaats was en is er op de Panama-conferentie voor onderzoek naar leren, onderwijzen en opbrengsten van rekenen-wiskunde; voor de verschillende praktijken van reken-wiskundeonderwijs; en voor de verbinding tussen die twee.

Afb.1. Ed de Moor (links) en Adri Treffers op de 33^e Panama-conferentie in 2015.

Ter gelegenheid van het 35-jarige jubileum van Panama bieden we u deze bundel aan. In de vorige jubileumbundel, *Gouden momenten verzilveren*, werd vooral teruggeblikt op de geschiedenis van het Panama-project. In de nu voorliggende jubileumbundel blikken we juist vooruit. De auteurs hebben bijdragen geschreven over rekenen-wiskunde in de 21^e eeuw. Wat mag meer aandacht krijgen in het licht van een toekomstbestendig rekenen-wiskundecurriculum? Welke leerinhouden rekenen-wiskunde komen meer dan eerder centraal te staan? Hoe kan daar goed aandacht aan worden besteed? En *last but not least*; hoe kan rekenen-wiskunde bijdragen aan de zogenoemde 21e eeuwse vaardigheden (Afb. 2)[2], waarvan er

---

[1] Omdat de pabo in 1981 nog niet bestond, werd *bo* tussen haakjes gezet. In het eerste projectplan stond dat Panama zich ging richten op opleiders rekenen-wiskunde aan de Pedagogische Akademies (PA), de Kleuter Opleidings Scholen (KLOS), en later de Pedagogische Akademies Basis Onderwijs (Pabo) (De Moor, 1982).
[2] Bij de 21e eeuwse vaardigheden wordt weleens de kanttekening geplaatst dat deze vaardigheden niet pas iets zijn van de 21^e eeuw, maar dat veel van deze vaardigheden al langere tijd van belang

zoveel zo nauw samenhangen met reken-wiskundige inzichten en vaardigheden, zoals probleemoplossen, creatief denken en computational thinking?

Afb. 2. Model 21e eeuwse vaardigheden van SLO en Kennisnet. (http://curriculumvandetoekomst.slo.nl/21e-eeuwse-vaardigheden)

Aan deze bundel is meegewerkt door een bonte verzameling deskundigen: van leraren tot onderzoekers. Om precies te zijn: elke beroepsgroep die deelneemt aan de Panama-conferentie, is ook vertegenwoordigd in deze bundel. Dit maakt ook dat de bijdragen divers van aard zijn. Naast praktische ideeën die in de reken-wiskundeles van morgen direct kunnen worden toegepast, vindt u ook bijdragen die aanzetten tot nadere doordenking van het reken-wiskundeonderwijs. Dezelfde mix van ontwikkeling, onderzoek en praktijk die al 35 jaar de Panama-conferentie tot zo'n unieke ontmoetingsplek van en voor experts rekenen-wiskunde maakt.

Er is nog iets dat al 35 jaar van onschatbare waarde is voor de realisatie van de Panama-conferentie (en van Panama-bundels) en dat is de belangeloze medewerking en bijdragen van vele experts. Panama-oprichter Ed de Moor schreef daarover: *Geweldig was de hulp, die ik kreeg vanuit het veld, allemaal liefdewerk oud papier* (De Moor, 2007). Nu, bij het 35-jarig jubileum, kan ik beamen dat dit nog steeds het geval is. Dit voorwoord biedt mij een goede gelegenheid om al die mensen die bijdroegen en nog steeds bijdragen aan het succes van Panama, waaronder allen die een bijdrage leverden aan deze jubileumbundel, zwart-op-wit dank te zeggen – mede namens alle andere Panama-bezoekers.

---

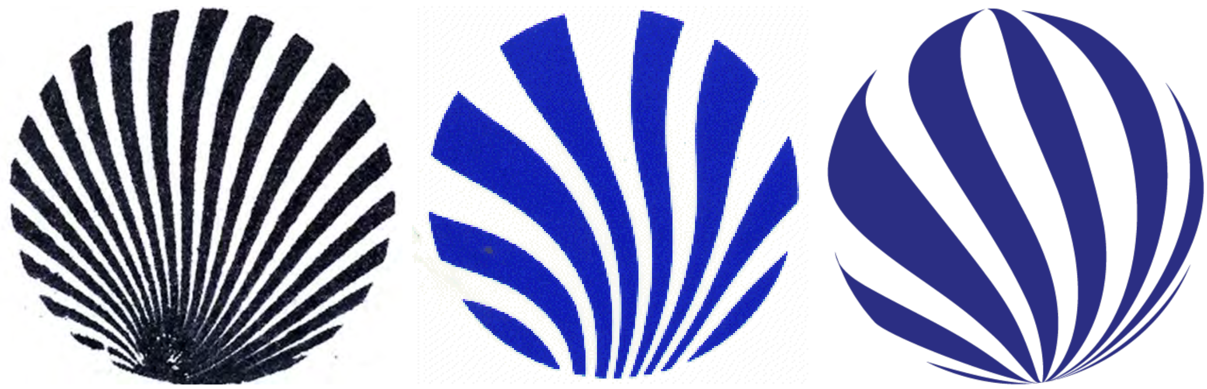
zijn. Ik denk dat dit inderdaad zo is en dat dit betekent dat er van het verleden veel kan worden geleerd dat van belang is voor de toekomst. Deze insteek – leren van het verleden – ontbreekt dan ook niet in deze bundel.

Graag wil ik één persoon speciaal dankzeggen in dit voorwoord en dat is Ed de Moor zelf. De oprichter van Panama is eind 2016, na een rijk rekenwiskundig leven, overleden. Zo lang hij kon heeft hij bijdragen geleverd aan de conferentie en was hij actief en betrokken deelnemer. Hij is helaas niet meer in de gelegenheid geweest om een bijdrage te schrijven voor deze bundel. Als eerbetoon is een eerder artikel van hem opnieuw opgenomen: *Zonder verleden geen toekomst* (De Moor, 2009). Dit hoofdstuk, dat oorspronkelijk verscheen in de Panama-bundel *Leren van evalueren*, is nog steeds actueel en schetst een duidelijk beeld van het belang van het verleden voor de toekomst.

Ten slotte zeg ik hierbij dank aan de Nederlandse Vereniging voor Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO), die de totstandkoming van deze bundel mogelijk maakte.

Ik hoop dat deze bundel vele leraren en andere betrokkenen bij het reken-wiskundeonderwijs inspireert en dat er nog vele jaren van succesvolle Panama-conferenties mogen volgen. Ik besluit met een kort maar krachtig citaat van Ed de Moor (2007, p. 17): *Leve Panama!*

Marc van Zanten, voorzitter Panama



Afb. 3. Het Panama-logo door de jaren heen.

Literatuur

De Moor, E. (1982). *Subsidie aanvraag Nascholings Project PA(BO)-docenten reken/wis-kundedidactiek.* Utrecht: Stichting Opleiding Leraren.

De Moor, E. (2007). Panama 1981. In: M. van Zanten (Red.). *25 jaar Panama. Gouden momenten verzilveren.* Utrecht: Panama / FIsme, Universiteit Utrecht.

De Moor, E. (2009). Zonder verleden geen toekomst. In: M. van Zanten (Red.). *Leren van evalueren. De lerende in beeld bij reken-wiskundeonderwijs.* Utrecht: Panama / FIsme, Universiteit Utrecht

In 2009 schreef Ed de Moor, oprichter van het Panama-project voor reken-wiskundeonderwijs, dit hoofdstuk voor de Panama-bundel die toen nog jaarlijks verscheen. In 2009 was de maatschappelijke discussie over reken-wiskundeonderwijs ernstig gepolariseerd – vooral in de media. Er verschenen krantenkoppen als *Basisschool nog slechter in rekenen dan in taal* en *Discussie over de realistische rekenmethode laait op*. Dit was aanleiding voor toenmalig staatssecretaris van onderwijs Dijksma om op de Panama-conferentie een KNAW-onderzoek naar reken-wiskundeonderwijs aan te kondigen. Voor Ed de Moor was dit aanleiding om op dezelfde conferentie een beschouwing te verzorgen waarin hij een en ander in historisch perspectief plaatste. Deze beschouwing legde hij vervolgens neer in dit artikel - waarin hij ook refereert aan het betreffende KNAW-onderzoek, dat toen overigens nog niet afgerond was.
Ed was van mening dat er veel kan worden geleerd van het verleden. Wat een geluk dat hij ook heeft opgeschreven wat hij vond. Dit hoofdstuk is weliswaar in 2009 geschreven, maar de inhoud en strekking zijn in 2017 nog net zo actueel als toen.

Marc van Zanten, voorzitter Panama

Zonder verleden geen toekomst

Ed de Moor, Panama / NVORWO

Inleiding

Je kunt de staartdeling niet goed uitleggen als je deze zelf niet vlot kunt uitvoeren, als je niet begrijpt hoe dat algoritme in elkaar zit, als je niet weet hoe delen samenhangt met de andere bewerkingen en welke verschijningsvormen ervan die operatie bestaan. Een goede leraar – in ieder geval een opleider van leraren – dient mijns inziens ook iets van de historie van de ontstaanswijze van de staartdeling te weten. Wie een vak onderwijst dient boven de stof te staan. Niet alleen moet de leraar de inhouden en de technieken beheersen, hij of zij moet tevens over een behoorlijk didactisch repertoire beschikken en ook in die zin boven de stof te staan. Om te kunnen deelnemen aan een discussie of de staartdeling in verband met de huidige maatschappelijke veranderingen nog onderwezen zou moeten worden en zo ja, op welke wijze, is het van belang dat men enig inzicht heeft in de historische ontwikkeling van ons rekenonderwijs. Dat is de reden dat ik op de Panama-conferentie van 2009 een kort overzicht van die ontwikkelingen in Nederland heb gegeven. Enkele mijlpalen daarvan uit de negentiende en twintigste eeuw zet ik in dit artikel nog eens globaal op een rij.

Historische ontwikkeling rekenonderwijs

De periode 1800-1875

Dit is de tijd van de Verlichting. Nederland is het eerste land dat een onderwijswet (Van der Palm, 1801) invoert. Interessant is dat de overheid zich daarbij expliciet met de inrichting en de doelen van het onderwijs gaat bezighouden. Zo wordt het klassikaal onderwijs verplicht gesteld en komt er een inspectie die dit gaat controleren. Er wordt een eerste leerplan opgesteld, waarin ook rekenen als vak van onderwijs wordt opgenomen. Zelfs stelt de overheid een boekenlijst samen (Boekholt & De Booy, 1987). Zo verschijnen ook de eerste rekenboekjes voor de lagere school. Onder invloed van het denken en doen van de Zwitserse pedagoog Pestalozzi wordt aanschouwelijkheid het leidende principe van de didactiek, toen de *methodiek van mededelen* genoemd. Het doel van het onderwijs was de verstandelijke ontwikkeling van het jonge kind, alsmede opvoeding tot een goed burger door middel van het bijbrengen van de christelijke waarden en normen. Deelname aan het onderwijs nam wel toe, maar bleef nog gering, ongeveer vijftig procent rond 1870. Toonaangevende onderwijsmannen als Prinsen, Rijkens en Brugsma leverden belangrijke bijdragen aan zowel de pedagogiek, alsook specifiek aan het rekenonderwijs en de zogenaamde vormleer, een soort meetkunde. Het rekenpeil was, voor zover valt na te gaan, laag. Er lag een fikse nadruk op het schriftelijke cijferen. Het hoofdrekenen had een aparte status, kende nog nauwelijks een didactische vorm en werd vooral ook aanbevolen als training van het geheugen. Het rekenen was weinig praktisch en had vooral de vormende waarde als algemeen doel. Rond 1875 werden vooral de rekenboekjes van Hemkes veel gebruikt (Leen, 1961) (Afb. 1).

Afb. 1. Een hele rekenmethode voor veertig cent.

De periode 1875-1920

Door de industriële revolutie verandert de maatschappij. Ook het onderwijs wordt daardoor beïnvloed. De deelname aan het onderwijs groeit tot zo'n negentig procent. Er komen nieuwe onderwijswetten en schoolplicht. Het aantal kweek- en normaalscholen groeit en de kwaliteit van de opleiding neemt toe. Het rekenen krijgt een meer toepassingsgericht karakter en er wordt in die tijd ook wel enige meetkunde gedaan. Het is Jan Versluys (Afb. 2), die met een aantal geschriften de basis legt voor het ontstaan van een serieuze didactiek voor rekenen en wiskunde. De belang-

rijkste didactische principes van Versluys zijn: heuristische werkwijze (geleide heruitvinding), aanschouwelijkheid, beperking van de leerstof, inzichtelijkheid, belang van zinvol oefenen. Zeer belangrijk achtte hij ook het inzichtelijke hoofdrekenen (Versluys, 1875).
Versluys heeft talrijke navolgers gehad. Hij putte zijn ideeën uit zowel de Franse als de Duitse scholen, maar stond ook onder invloed van de Engelse ontwikkelingen op het gebied van de filosofie (John Stuart Mill) (De Moor, 1994).
Op het Nederlands rekenonderwijs hadden vooral de Duitsers Grube en Diesterweg invloed, terwijl voor de algemene methode van onderwijs met name Herbart werd nagevolgd. De meest vooruitstrevende ideeën over de opvoeding en het schoolwezen vinden we in de Reformpedagogiek, welke beweging zich aan het eind van de negentiende eeuw manifesteerde. Vrijwel alle pedagogen en rekendidactici blijven hameren op het belang van inzichtelijk onderwijs, aanschouwing, hoofdrekenen, praktische toepassingen en op beperking van gekunstelde denksommen (Leen, 1961). Men kan in de negentiende eeuw al voorbeelden vinden van wat tegenwoordig kolomsgewijs rekenen wordt genoemd. Het algemene doel voor rekenen verschuift van de vormende waarde naar de praktische waarde. Hoewel Theo Thijssen niet erg van didactiek houdt, pleit hij wel voor bij de kinderen passend rekenonderwijs. Bouman en Van Zelm (1918) keren zich in hun theoretische opvattingen, gebaseerd op de filosofie van Bolland, af van het principe *van concreet naar abstract* en willen getallen als *logische denkbaarheden* zien en behandelen (Treffers, 1985). Deze zienswijze is echter niet in overeenstemming met hun rekenboekjes, die een mechanistische rekenaanpak vertonen. Hun methode heeft jarenlang een grote verspreiding gehad, waarschijnlijk vanwege de *sommetjes* per soort, waardoor een didactiek van voordoen en nadoen in de hand werd gewerkt. Internationaal ontstaat er zowel in de sociale wetenschappen als bij de beroepswiskundigen interesse voor didactiek van de wiskunde en het rekenen.

Afb. 2. Jan Versluys (1845-1920), invloedrijk reken- en wiskunde didacticus.

Afb. 3. P.A. Diels (1879-1938), auteur van Fundamenteel Rekenen.

De periode 1920-1960

In Duitsland ontstaat de denkpsychologie, die ook in Nederland navolgers krijgt, zoals Philip Kohnstamm. Er zijn veel klachten over de slechte rekenvaardigheid van de leerlingen in de eerste klassen van het vervolgonderwijs. Kohnstamm en zijn medewerkers van het Nutsseminarium doen onderzoeken en publiceren over de aansluitingsproblematiek tussen het lager en middelbaar onderwijs (Veen & Kohnstamm, 1928). Kohnstamm pleit voor een rekenonderwijs dat de kinderen analytisch leert denken en beveelt lees-rekenopgaven aan in plaats van de stereotype denksommen. Er komt nu ook meer aandacht voor de ontwikkelingen in Groot Brittannië en USA, waar Dewey dezelfde ideeën blijkt te hebben als Ligthart in Nederland.

Kohnstamm en Diels (Afb. 3) bezoeken Engeland waar Ballard aan een praktisch toegepast eenvoudig rekenonderwijs werkt. Diels schrijft daarna samen met Nauta de methode *Fundamenteel Rekenen*, die gebaseerd is op dat werk van Ballard. Hierin wordt grote aandacht besteed aan het hoofdrekenen (De Moor, 2005). De psychologen Revesz en Luning Prak komen in die jaren met *scholastic tests*: korte inzichtelijke testvragen. Bovendien wijst Prak in verband met de aansluiting op het belang van IQ-tests. Ene Kellinga (frater Reijnders) wil sterke vereenvoudiging en vooral praktisch rekenonderwijs, wat tot de methode *Noodig Rekenen* leidt. Ook Govert Grazer (frater Rombouts) (Afb. 4) houdt een krachtig pleidooi voor drastische veranderingen: hij wil geen vakmatig-logische opbouw, maar aansluiten bij de psychologische ontwikkeling van het kind (Grazer, z.j.; De Moor, 2008b). Na de oorlog geeft hij deze ideeën vorm in de methode *Geef Acht*. De Wiskunde Werkgroep van mevrouw Ehrenfest, die zich voornamelijk met het voortgezet onderwijs bezighield, mengt zich vanaf de jaren dertig ook in deze discussie.

Afb. 4. Frater Sigebertus Rombouts alias Govert Grazer (1883-1962).

In 1940 gaat circa vijf procent van de leerlingen naar het Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs (VHMO). Slechts de helft daarvan haalt het eindexamen.

Enkele onderzoeken uit die tijd laten zien dat de rekenvaardigheid van de kinderen op het VHMO zeer slecht is. Na de oorlog gebeurt er niet veel aan de inhoud van het rekenonderwijs. Wel ontstaat behoefte aan zelfstandig werken. Dit komt tot uiting in rekenmethoden als *Naar Aanleg en Tempo* en *Naar Zelfstandig Rekenen*. Andere titels uit de jaren vijftig zijn *De Grondslag*, *Ik Reken*, *Uitkomst* en *Boeiend Rekenen*. Er wordt wat minder nadruk gelegd op het hoofdrekenen, behalve in de methode *Functioneel Rekenen*, waar dit onderdeel juist tot de kern van het rekenonderwijs verheven wordt.

De periode 1960-1970

Er is een toenemende vraag naar differentiatie en individualisering van het rekenonderwijs. Dit krijgt met name gestalte in de methode *Niveau Cursus Rekenen*, waardoor de leraar meer de rol van controleur dan van explicateur krijgt. Hierdoor raakt vooral het hoofdrekenen op de achtergrond. Internationaal komt de zogenoemde *New Math* beweging op. Hierin wil men van abstract naar concreet en van meet af aan met verzamelingen en logica werken. Het is een zuiver wiskundige aanpak, waarbij het praktische getalbegrip en het vaardig rekenen worden verwaarloosd. Aanvankelijk bestond ook in Nederland voor deze ontwikkeling enige belangstelling, vooral in het voortgezet onderwijs. Zelfs zijn er enige basisschoolmethoden in deze trant verschenen (Treffers, 1985). Via de eerste *Wiskobas*-conferenties (WISKunde Op de BASisschool) is deze zogenaamde moderne wiskunde op de basisschool tegengehouden. Dat is te danken aan Wijdeveld, Goffree en Treffers, die de bekende Wiskobas-beweging in gang hebben gezet. Dat nu resulteerde in 1971 weer tot de oprichting van het *Instituut voor de Ontwikkeling van het Wiskunde Onderwijs* (IOWO), thans het Freudenthal Instituut. Freudenthal werd de eerste hoogleraar-directeur van het IOWO. Hij draagt het werk dat zich met het wiskundeonderwijs van vier tot achttienjarigen bezighield internationaal uit. In die tijd wordt door de inspanningen van A.D de Groot het *Centraal Instituut Toets Ontwikkeling* (Cito) opgericht (De Moor, 2008a).

De periode 1970-1980

Leerplanontwikkeling, opleiding, heroriëntering (nascholing) en onderzoek van het rekenonderwijs worden met groot enthousiasme door het Wiskobas-team van het IOWO ter hand genomen. Van meet af aan wordt het onderwijsveld daarbij betrokken. Elk jaar zijn er meerdere conferenties en cursussen voor docenten aan pedagogische academies, schoolbegeleiders, onderzoekers, inspectie en leraren. De nascholingsbehoefte bij de basisscholen is echter niet erg groot. Het uitgangspunt was om geen ondoordachte veranderingen in het rekenonderwijs aan te brengen, maar eerst experimenten in de praktijk uit te voeren. Daaruit ontstaat een enorme hoeveelheid aan materialen, zowel inhoudelijk als didactisch van aard. In het begin van de jaren zeventig is het sleutelwoord verlevendiging van het rekenonderwijs door middel van onderwijs-TV producties, Wiskobas-bulletins en bijvoorbeeld de *KIEN*-rekenboeken van Ger Jansen. Er blijft aandacht voor hoofdrekenen, maar in vernieuwde stijl: niet uit maar mét het hoofd (Scholten, Nieland, De Moor). Treffers onderzoekt en beschrijft de verschillende stromingen en opvattingen in het rekenonderwijs en publiceert een fundamenteel proefschrift (1978) over de doelstellingen voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool, later het *realistisch reken-wiskundeonderwijs* genoemd. In die jaren wordt ook onderzoek gedaan naar mogelijke verbeteringen van het cijferen. Dit leidt tot een alternatieve aanpak, het zogenoemde kolomsgewijze rekenen.

Publicaties van het Wiskobas-werk krijgen grote invloed op nieuwe reken-wiskundemethoden. Aan het eind van de jaren zeventig worden alle reken-wiskundemethoden geanalyseerd (Wiskobas-team, 1980). De opkomst van de computer heeft dan nog weinig invloed op de basisschool. Het gebruik van de rekenmachine wordt onderzocht, maar vooralsnog ontraden voor de basisschool. Aan het eind van de jaren zeventig wordt de Stichting Leerplan Ontwikkeling (SLO) opgericht, waardoor het werk van het IOWO sterk beknot wordt.

De periode 1980-1990

Panama (PA(bo) NAscholing Mathematische Activiteiten) wordt opgericht. Dit project geeft vervolg aan oude Wiskobas-activiteiten en start ook nieuwe activiteiten in samenwerking met Onderzoek Wiskunde onderwijs en Onderwijs Computercentrum (OW&OC), de opvolger van IOWO, het latere Freudenthal Instituut, Cito, SLO, de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) en andere instanties en personen. Het tijdschrift *Panama-Post* met praktische en wetenschappelijke artikelen over het rekenonderwijs verschijnt. Elk jaar vond - en vindt ook nu nog - de grote Panama-conferentie te Noordwijkerhout[1] plaats. Met de oprichting van de NVORWO ontstaat een officiële vereniging van reken-wiskundedidactici. Deze vereniging geeft thans het tijdschrift *Volgens Bartjens* (voorheen *Willem Bartjens*) uit.

Er volgen in de jaren tachtig nadere onderzoeken over cijferen. Ook komen nu realistische reken-wiskundemethoden op de markt. Reken-wiskundemethoden worden weer geanalyseerd (De Jong e.a., 1984; Feijs e.a., 1987). Ook verschijnt het proefschrift *Wiskobas in methoden* van R. de Jong (1986). Op de Pabo worden hoofdzakelijk de *Wiskunde & Didactiek* boeken van Goffree (1982, 1983, 1985) gebruikt.

Er is in die jaren een enorme terugloop van studenten aan de Pabo, waardoor veel bevoegde reken-wiskundedocenten worden ontslagen. Waarschuwingen van de NVORWO aan de inspectie en de politiek over het niveau van de Pabo worden niet gehoord. De politiek en de overheid zetten het plan voor een nieuwe basisschool (vier tot twaalf jaar) door. Ook de opleiding wordt hieraan gekoppeld door samenvoeging van de oude Kleuter Opleidingsscholen (KLOS) en de toenmalige Pedagogische Academies. Pogingen van Panama en de NVORWO om een landelijke bijscholing rekenen te realiseren lukken niet. Er worden voorstellen gedaan tot het aanstellen van een rekenspecialist (coördinator) op elke school.

Verder vindt een veldraadpleging plaats over doelen en eindtermen voor rekenen-wiskunde in de basisvorming. Hieraan is de publicatie *10 voor de basisvorming* gewijd (Cadot & Vroegindeweij, 1986a, 1986b). Dit onderzoek leidt tot de *Proeve van een nationaal programma reken-wiskundeonderwijs op de basisschool* (Treffers, De Moor & Feijs, 1989; Treffers & De Moor, 1990). En deze *Proeve* vormt de aanleiding tot de officiële kerndoelen voor rekenen-wiskunde. De leerstof wordt uitgebreid met schattend rekenen, meten en meetkunde. Speciale aandacht voor basisvaardigheden wordt besteed in deel 2 van de *Proeve*. Het cijferen blijft gehandhaafd, maar met gedifferentieerde einddoelen (vergelijk De Moor, 2004). Het leren van de tafels en andere basisvaardigheden blijven een hoofddoel, maar er wordt een inzichtelijke didactiek en methodiek aanbevolen. Hoofdrekenen dient volgens de *Proeve* de basis voor het cijferen te zijn. Aparte aandacht wordt aanbevolen voor het schattend rekenen als belangrijke voorwaarde voor een zekere mate van gecijferdheid. Oefenen blijft een belangrijk onderdeel van de methodiek, maar ook daarbij wordt een inzichtelijke aanpak aanbevolen. Zo'n oefenprogramma zou gevarieerd moeten zijn naast

---

[1] Tegenwoordig in Veldhoven (MvZ).

het immer mogelijke inzicht in het getalsysteem. Contexten worden aanbevolen als bron voor inzicht. In die jaren start op verzoek van de overheid het Cito met de *Periodieke Peilingsonderzoeken van het onderwijs* (PPON) (Wijnstra, 1988).

De periode 1990-2000

Steeds meer scholen maken gebruik van het *Leerlingvolgsysteem* van het Cito. Men werkt daardoor vaak van toets naar toets. De vraag naar zelfwerkzaamheid groeit, waardoor steeds minder klassikaal les wordt gegeven. Een aantal rekendidactici benadrukt juist het belang van groepsgericht interactief rekenonderwijs. Dit betekent dat de leraar regelmatig (hoofd)rekenlessen zou moeten organiseren. Tegelijk verschijnen er artikelen waarin sommige onderzoekers het socio-constructivisme propageren, wat een ultieme vorm van zelfontdekkend leren is. Deze twee opvattingen zijn nogal strijdig met elkaar.
In de praktijk werkt men met de nieuwste schoolboeken, zoals *De Wereld in Getallen*, *Pluspunt* en *Wis en Reken*. De toelatingseisen voor de Pabo worden steeds lager. Vooral de instroom via het MBO levert studenten die met rekenen vaak al op de basisschool zijn afgehaakt. Er komen vrijwel geen mannelijke studenten naar de Pabo. Het aantal contacturen voor rekenen-wiskunde op de Pabo bedraagt soms maar enkele tientallen uren. Nascholing op het gebied van rekenen vindt nauwelijks plaats. Her en der wordt wel gepleit voor splitsing van de pabo in een onderbouw- en een bovenbouw-variant. Ondanks dit alles blijft Nederland goed scoren in de internationaal vergelijkende onderzoeken. Anno 2000 gaat zo'n 35 procent van de leerlingen naar havo of vwo, waarvan slechts de helft het eindexamen haalt.

De periode 2000-2009

In september 1999 stuurt de NVORWO een speciale uitgave van het tijdschrift *Willem Bartjens* over cijferen en kolomsgewijs rekenen naar alle basisscholen met de vraag om hun mening hierover te geven. De respons op deze enquête is vrijwel nihil. Op verzoek van de overheid wordt het project Tussendoelen Annex Leerlijnen (TAL) gestart. Dit levert vijf brochures op (TAL-team, 1999; 2001; 2004; 2005; 2007). Deze boeken vinden een enorme aftrek. Ze bieden richtlijnen over te bereiken (tussen)doelen. Ook de didactiek van het cijferen, schattend rekenen, hoofdrekenen, oefenen en gebruik van de rekenmachine komen in deze boeken aan de orde. Het internationale TIMSS onderzoek (Trends in International Mathematics and Science Study) wijst uit dat Nederland enige plaatsen gezakt is in de top tien (Meelissen & Drent, 2008). Uit het PPON onderzoek blijkt dat de prestaties voor cijferen achteruitgaan (Janssen e.a., 2005). Hoofdrekenen en schattend rekenen gaan vooruit. De vereniging *Beter Onderwijs Nederland* (BON) wordt opgericht. Deze groep heeft harde kritiek onder meer op het *Nieuwe Leren*, waarin teveel aan de leerling wordt overgelaten, en op de managementcultuur in het onderwijs. Binnen BON ontstaat een groep die zich sterk keert tegen het realistisch rekenen, met name tegen het kolomsgewijze rekenen. Enige adepten van deze groep staan een mechanistische cijferaanpak voor en wijzen inzichtelijk hoofdrekenen af. Vanuit deze groep wordt de *Stichting Goed Rekenonderwijs* (SGR) opgericht die een op deze inzichten gebaseerde nieuwe methode bij Noordhoff gaat uitbrengen.[2] Het rapport van de *Expertgroep Doorlopende Leerlijnen* (2008) beveelt meer gestructureerd oefenen aan. Ondersteund door de overheid wordt het project de Nationale OEFen Impuls (zOEFi) gestart. Op verzoek van de overheid wordt door een commissie van de Koninklijke Nederlandse Academie voor Wetenschappen (KNAW) onderzoek gedaan naar de vraag welke didactiek - realistisch rekenen of een conservatieve didactiek - het meest geschikt is voor welke leerling. Hiervan zijn op dit moment nog geen resultaten bekend.[3]

Reflectie

Het voorgaande is een uiterst summiere opsomming van feiten en gebeurtenissen uit de laatste twee eeuwen van het rekenonderwijs in Nederland. Ze zijn niet beschreven volgens een historische ontwikkelingslijn van het onderwijs noch in verband gebracht met de politieke, economische, wetenschappelijke, maatschappelijke en culturele veranderingen, die zich in dit tijdsbestek hebben voltrokken. Het zou alleszins de moeite waard zijn om hieraan een gedegen studie, zeker voor de laatste halve eeuw te wijden. Toch kan er op grond van deze markeringspunten wel iets gezegd worden over de veranderingen in inhoud, doelen en didactiek gedurende de laatste tweehonderd jaar.

De inhoud van het vak rekenen is altijd toegespitst geweest op het onderwijzen van de vier hoofdbewerkingen met gehele getallen, gewone en decimale breuken en het kunnen toepassen daarvan. Het laatste betekent dat ook procenten, verhoudingen, iets over oppervlakte en inhoud en het metrieke stelsel tot de constante inhoud van het rekenonderwijs behoren. Het is in feite de erfenis van het oude koopmansrekenen zoals we dat al sinds Willem Bartjens kennen. Lange tijd zijn ook de zogenaamde denksommen onderdeel van het programma geweest, maar deze hebben het veld moeten ruimen. Ook de grootste gemene deler (GGD) en het kleinste gemene veelvoud (KGV) komen niet meer voor[4]. In de negentiende eeuw is er naast het rekenen ook enige tijd aandacht geweest voor meetkunde, voortkomend uit het vak vormleer. Pas sinds de vaststelling van de kerndoelen is er weer enige aandacht voor meetkunde. In de kerndoelen wordt ook verstandig gebruik van de zakrekenmachine genoemd, maar deze noviteit heeft de kern van de te onderwijzen stof niet aangetast. Steeds was de vraag hoe ver men met de stof moest gaan, ook al in verband met het niveau waarvoor men de kinderen opleidde. Bestudering van de schoolboeken leert dat dit per periode sterk verschilt.

Is men het in het grote lijnen altijd wel eens geweest over wat de kinderen moeten leren, over het waarom zijn de opvattingen nog al eens veranderd. Was het in de

---

[2] Dit betreft de actuele methode Reken Zeker, die in 2017 door de uitgever wordt vervangen door een nieuwe methode (MvZ).

[3] De conclusie die de commissie later naar buiten bracht luidde dat er geen aantoonbaar verschil in effectiviteit was tussen de realistische en traditionele didactiek (KNAW Rekencommissie, 2009). De commissie ging hiermee echter voorbij aan de verschillen binnen 'de' traditionele didactiek. Tussen realistische en mechanistische methodes zijn wel verschillen aangetoond, ten gunste van de realistische methodes (zie bijvoorbeeld Treffers & Van den Heuvel-Panhuizen, 2010; 2012) (MvZ).

[4] In verschillende actuele methodes zijn deze onderwerpen terug van weggeweest (MvZ).

eerste helft van de negentiende eeuw vooral de vormende waarde (leren denken), waarmee het rekenonderwijs werd gelegitimeerd, in de tweede helft van die eeuw was het juist de praktische waarde (kunnen toepassen) die overheerste. Deze voorkeuren zijn gedeeltelijk te verklaren uit de maatschappelijke veranderingen van die periodes; eerst het streven naar een school voor algemene vorming en daarna, ten tijde van de industriële revolutie, een meer praktische opleiding. In de twintigste eeuw zien we een zekere herhaling van deze periodes. Of men in de praktijk diep over deze waarom-vraag nadacht (en nadenkt) valt te betwijfelen, de stof werd (en wordt) immers door de boekjes bepaald. De Duitse pedagoog en rekendidacticus Ernst Hentschel verwoordde al anderhalve eeuw geleden deze twee doelen als volgt:
Der Schüler soll denkend rechnen und rechnend denken lernen, das ist das eine: er soll neben der Einsicht auch diejenige Fertigkeit gewinnen, welche das Leben verlangt, das ist das andere (Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen, 1842).
Bezien we de legitimeringsvraag vanuit een huidig perspectief dan is deze uitspraak nog altijd waardevol. Er vindt over de legitimeringsvraag van doelstellingen van het reken-wiskundeonderwijs anno 2009 echter nauwelijks een werkelijk diepgaande discussie plaats. Wel wordt het inhoudelijke aspect (de stof) bij voortduring aan de orde gesteld. Met name in verband met de zogenoemde voorbereidende waarde, waarmee men vooral de noodzakelijke kennis en vaardigheden bedoelt voor het leren van wiskunde, natuurkunde en andere vakken waarbij gerekend wordt. Opvallend is dat er zich thans een neoconservatieve stroming manifesteert, die een sterke hang heeft naar het aloude cijferen met grote getallen. Dit is een curieuze ontwikkeling in een tijd waar het schriftelijke rekenen in de maatschappij en wetenschap geheel verdrongen is door het gebruik van computers en (zak)rekenmachines. Het is een reactie op de teruglopende resultaten op het onderdeel cijferen. Zoals de geschiedenis leert ijlt het onderwijs altijd na op ingrijpende maatschappelijke en wetenschappelijke ontwikkelingen. Een herbezinning op de doelen van het rekenonderwijs, in het bijzonder die van het cijferen, lijkt daarom noodzakelijk.
Naast het *wat* en *waarom* blijft het *hoe* (de didactiek) van het rekenonderwijs door de eeuwen heen de aandacht eisen. Vele pedagogen, psychologen, filosofen, wiskundigen en knappe schoolmeesters hebben zich hiermee zowel theoretisch als praktisch ingelaten. Zeker sinds zo'n honderdvijftig jaar zijn vrijwel alle vooraanstaande didactici de opvatting toegedaan dat het naast vaardigheid uiteindelijk om inzicht in het getalsysteem en in de operaties gaat. Over de wijze hoe dit te bereiken zien we in de historie nogal eens verschillende opvattingen. Bijvoorbeeld bij het leren van de tafels van vermenigvuldiging: stampt men eerst de rekenfeiten mechanisch in en komt men later terug op de samenhang daarvan of maakt men juist gebruik van die samenhang bij het aanleren van de tafels? Een ander voorbeeld is het gebruik van concrete situaties als uitgangspunt of een meer abstracte aanpak.
Een constante in het rekenonderwijs is het hoofdrekenen dat door alle didactici steeds als een kernpunt onderschreven wordt. Wel verschuift dit onderdeel vaak naar de achtergrond bij een organisatie van individueel schriftelijk rekenen. Wonderlijk is de opvatting van de eerder genoemde neoconservatieven dat hoofdrekenen afge-

schaft zou moeten worden. Dit is een volstrekt uniek standpunt in de geschiedenis van ons rekenonderwijs.
Oefenen wordt door vrijwel allen als een belangrijk aandachtspunt aanbevolen maar ook in dit opzicht ziet men een diversiteit van uitvoeringsvormen, variërend van rijtjes van dezelfde sommen tot speelse oefeningen.

Tot slot

Kunnen wij in verband met de huidige discussies over het rekenonderwijs iets leren van de hier geschetste historische ontwikkelingen? Ik meen van wel en ik wil proberen dit aan één onderdeel van het rekenen, dat thans ter discussie staat, te laten zien. Het gaat om de traditionele staartdeling. Voor het realistische reken-wiskunde-onderwijs zijn daarvan in een TAL-brochure (2001) het wat, waarom en hoe uit de doeken gedaan. Dit algoritme wordt daar beschreven als herhaalde aftrekking van de deler van het deeltal. Het is een inzichtelijke methode die al sinds de negentiende eeuw door verschillende didactici van naam is gepropageerd. Deze methode hoeft volgens de TAL-brochure, maar ook volgens de officiële kerndoelen, niet voor alle leerlingen tot het traditionele standaardalgoritme te leiden. Vandaar dat er gedifferentieerde einddoelen van beheersing mogelijk zijn. Het blijkt dat slechts een klein aantal scholen het oude standaardalgoritme nastreeft. Beheersing ervan in die vorm wordt ook niet gevraagd in de Eindtoets Basisonderwijs van het Cito. Dit is de reden dat velen denken dat de staartdeling is afgeschaft, hetgeen dus niet juist is. Wel ligt in de realistische aanpak de nadruk op inzicht in het delingsalgoritme. Maar beheersing van de procedure in eenvoudige gevallen wordt ook nagestreefd. Waar het bij de realistische benadering om gaat is dat de kinderen leren beslissen hoe ze een deling in een toepassingssituatie uitvoeren: schattend, met potlood en papier, met een rekenmachine of via een mengvorm van deze werkwijzen. Men zou toch denken dat dit streven ieder weldenkende burger zal aanspreken, maar als we de media mogen geloven lijkt het merendeel van de Nederlanders te schreeuwen om terugkeer van de oude staartdeling. Mogelijk is dit verschijnsel inherent aan de tijdgeest, waarin op allerlei gebieden een verlangen naar oude waarden kan worden gesignaleerd. In het onderwijs is het gebruik van de rekenmachine voor worteltrekking, logaritmisch rekenen en statistische berekeningen inmiddels volledig geaccepteerd (een halve eeuw geleden werd dergelijk rekenwerk nog met potlood en papier gedaan), maar met de staartdeling ligt het kennelijk anders. In persoonlijke gesprekken heb ik vaak bemerkt dat bijna alle volwassenen met een zekere nostalgie aan de staartdeling terugdenken. In veel gevallen blijkt dat ze – en dit zijn vaak ook nog mensen met een academische opleiding – de staartdeling als het hoogst haalbare van het rekenen hebben ervaren (met breuken gaat het al meteen mis). Het is net zoiets als het rijtje van de Duitse voorzetsels opdreunen; het geeft kennelijk een prettig gevoel dat je dat nog kunt.
Vanuit wiskundig standpunt bezien is het zinvol om een leergang cijferen als een volledig systeem te bestuderen, waarin de samenhang van alle vier de hoofdbewerkingen tot uiting komt. Tevens ligt het dan voor de hand om voor elk van die bewerkingen een eenduidig algoritme te geven. Zijn dit echter voldoende redenen

om terug te keren tot een rekenonderwijs van een halve eeuw geleden? Voor mij niet. Daarom zou ik willen voorstellen om net als in het verleden is gebeurd deze kwestie breed te bespreken en geen overhaaste stappen te nemen. Ik ben ervan overtuigd dat men ook dan weer tot een zekere consensus zal komen – en niet alleen over de staartdeling.

Literatuur

Boekholt, P.Th.F.M. & E.P. De Booy (1987). *Geschiedenis van de School in Nederland*. Assen-Maastricht: Van Gorcum.

Bouman, P.J. & J.C. van Zelm (1918). *De rekenkundige denkbaarheden in logischen samenhang met – als proeve van toegepaste logica – een rekenmethode voor de lagere school*. Amsterdam: W. Versluys.

Cadot, J. & D. Vroegindeweij (1986a). Een 10 voor de basisvorming? In: E. Feijs & E. de Moor (red.) *Panama Cursusboek 4. Reken/wiskundeonderwijs – nascholing een nood-zaak.* Utrecht: SOL/OW&OC, Rijksuniversiteit Utrecht.

Cadot, J. & D. Vroegindeweij (1986b). *10 voor de basisvorming rekenen/wiskunde onderzocht*. OW&OC, Utrecht: Rijksuniversiteit Utrecht.

Expertgroep Doorlopende Leerlijnen taal en rekenen (2008). *Over de drempels met rekenen*. Enschede: Expertgroep Doorlopende Leerlijnen.

Feijs, E., R. de Jong, E. de Moor, L. Streefland & A. Treffers (1987). *Almanak reken-wiskundemethoden 1987*. Utrecht: OW&OC, Universiteit Utrecht.

Goffree, F. (1982, 1983, 1985). *Wiskunde & didactiek. Eerste deel, Tweede deel, Derde deel*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Grazer, G, (z.j.). *Rekenmetodiek en moderne psychologie. Opvoedkundige Brochurenreeks nr 68*. Tilburg: Drukkerij van het R.K. Jongensweeshuis.

Hentschel, E. (1842). *Lehrbuch des Rechenunterrichts in Volksschulen*.

Janssen, J., F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau. Balans [32] van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 4.* Arnhem: Cito.

Jong, R. de, E. de Moor, L. Streefland & A. Treffers (1984). *Almanak reken/wiskundemethoden 1984*. Utrecht: OW&OC, Universiteit Utrecht.

Jong, R. de (1986). *Wiskobas in methoden*. Utrecht: OW&OC, Rijksuniversiteit Utrecht (diss.).

KNAW Rekencommissie (2009). *Rekenonderwijs op de basisschool. Analyse en sleutels tot verbetering.* Amsterdam: Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen.

Leen, A. (1961). *De ontwikkeling van het rekenonderwijs op de lagere school in de 19-de en het begin van de 20-ste eeuw* (diss). Groningen: J.B. Wolters.

Meelissen, M. & M. Drent (2008). *TIMSS 2007. Trends in leerprestaties in exacte vakken in het basisonderwijs.* Enschede: Universiteit Twente.

Moor, E. de (1994). Jan Versluys en het ontstaan van de vakdidactiek. *Nieuwe Wiskrant 14*(1), 8-13.

Moor, E. de (2004). De moordenaars van de staartdeling. *Willem Bartjens 23*(4), 33.

Moor, E. de (2005). Antiek realisme. *Volgens Bartjens 25* (2), 25.

Moor, E. de (2008a). Toetsen en schoolsucces. *Volgens Bartjens 27*(5), 29.

Moor, E. de (2008b). Govert Grazer. *Volgens Bartjens 28*(2), 29.

Palm, J.H. van der (1801). *Publicatie van het uitvoerend bewind der Bataafse Republike, houdende verordeningen omtrent het onderwys in de lagere scholen. Gearresteerd den 15 Juny 1801, het zevende jaar der Bataafsche vryheid*.

TAL-team (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen onderbouw basisschool*. Groningen: Wolters Noordhoff.

TAL-team (2001). *Kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters Noordhoff.

TAL-team (2004). *Jonge kinderen leren meten en meetkunde. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Meten en meetkunde onderbouw basisschool*. Groningen: Wolters Noordhoff.

TAL-team (2005). *Breuken, procenten, kommagetallen en verhoudingen. Tussendoelen Annex Leerlijnen Bovenbouw basisschool*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

TAL-team (2007). *Meten en meetkunde in de bovenbouw. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Bovenbouw basisschool.* Groningen: Wolters Noordhoff.

Treffers, A. (1978). *Wiskobas doelgericht*. Utrecht: IOWO, Rijksuniversiteit Utrecht (diss.).

Treffers, A. (1985). Reken/wiskunde didactiek in historisch perspectief. In: E. de Moor (red.) *Reken/wiskundeonderwijs anno 1984. Panama cursusboek 3.* Utrecht: SOL / OW&OC.

Treffers, A., E. de Moor & E. Feijs (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1 Overzicht Einddoelen*. Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. & E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2 Basisvaardigheden en cijferen.* Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2010). De rekenmethode telt. *Reken-wiskundeonderwijs: ontwikkeling, onderzoek, praktijk, 29*(1), p. 39-44.

Treffers, A. & Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2012). Lessen uit het verleden. Traditionele rekenmethodes en hun leeropbrengsten. *Reken-wiskundeonderwijs: ontwikkeling, onderzoek, praktijk, 31*(1), p. 3-13.

Veen, G, van en Ph. Kohnstamm (1928). *De Aaneensluiting tusschen Lager en Middelbaar (Gymnasiaal) onderwijs.* Amsterdam: Mededeling van het Nutsseminarium no. 3.

Versluys, J. (1875). *Handleiding bij het rekenonderwijs*. Groningen: W. Versluys.

Wijnstra, J.M. (red.)(1988). *Balans van het rekenonderwijs in de basisschool. Uitkomsten van de eerste rekenpeiling medio en einde basisonderwijs.* Arnhem: Instituut voor toetsontwikkeling.

Wiskobas-team (1980). *Rapportboekje 3. Overzicht rekenmetoden anno 1980*. Utrecht: Instituut Ontwikkeling Wiskunde Onderwijs.

Rekenen in de 21e eeuw

Ons rekencurriculum is historisch gegroeid tot een verzameling van weloverwogen en welomschreven taken die de leerling moet kunnen uitvoeren.

Bereidt dit de leerlingen wel voldoende voor op hun toekomst?

Onze maatschappij verandert in een rap tempo onder invloed van digitalisering en globalisering.

Dit laat ook het rekenonderwijs niet ongemoeid. Dit zal moeten veranderen zodat het beter aansluit bij de eisen die in de toekomst aan onze leerlingen worden gesteld.

Geeke Bruin-Muurling
(Educatieve Dienstverlening Bruin-Muurling (EDB))
en Marike Verschoor
(Uitgeverij Zwijsen)

Beeld: Shutterstock. Vormgeving: SKON creative communications

Wat staat leerlingen in de toekomst te wachten?

De belangrijkste bijdrage van de leerling aan de maatschappij van de toekomst wordt **het oplossen van problemen en het genereren van nieuwe ideeën.**

Het uitrekenen doet de computer.

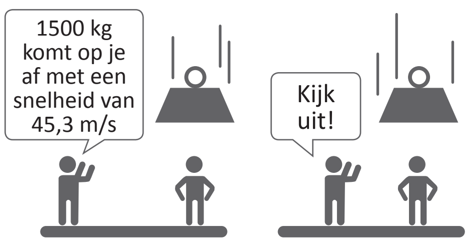
Computers nemen steeds meer routinematige taken over. Daardoor ontstaat er een verschuiving van werkzaamheden: we doen minder uitvoerend (reken)werk.

Het nadenken en het vinden van creatieve oplossingen doet de mens.

Het niet-routinematige werk, zoals het uitvoeren van analytische taken en het samenwerken in (multidisciplinaire) teams, neemt in hoeveelheid juist toe.

Het begrijpen wordt belangrijker dan het zelf kunnen uitvoeren.

Dit heeft gevolgen voor zowel de kennis als de vaardigheden die leerlingen in de toekomst nodig hebben.



Beeld: Shutterstock

Een kijkje in de toekomst

Door de digitalisering ontstaan nieuwe functies.

De leerling wordt misschien wel afvalontwerper, kweekvijverboer, zonne-energiespecialist, telechirurg, gezondheidszorgnavigator of simplicity-expert (via www.oneworld.nl).

Door de digitalisering is andere kennis nodig.

Er is een verschuiving gaande in de vakgebieden uit de wiskunde die een grote rol spelen in het dagelijks leven. Deze verschuiving zal ook zichtbaar worden in het onderwijs, waardoor er nieuwe domeinen en aandachtsgebieden bij zullen komen.

statistiek

Denk hierbij aan: weten welke data je moet verzamelen en wat je met de resultaten van de analyse kunt doen.

programmeren

Denk hierbij aan: begrijpen hoe digitale gegevens tot stand zijn gekomen.

Interpreteren en gebruiken.

De grootste gemene deler is dat leerlingen in de toekomst getalsmatige gegevens naar waarde moeten kunnen schatten, interpreteren en gebruiken.

Door de digitalisering krijgen we informatie op een andere manier toegespeeld, en moeten we op een andere manier beslissingen nemen.

Bijvoorbeeld: de Belastingdienst verzamelt alle gegevens en vult de formulieren in. De leerling moet de juistheid ervan kunnen controleren.

Beeld: Shutterstock

Hoe wordt een leerling een probleemoplosser?

De leerling moet zelfsturend worden.

In de toekomst moet iedere leerling doelgericht een taak kunnen voltooien en verantwoordelijkheid kunnen nemen voor het eigen werk. Ook moet de leerling zichzelf kritische vragen kunnen stellen.

Problemen los je niet op in je eentje.

Ieder heeft zijn of haar specialisme. Leerlingen moeten leren samenwerken en communiceren.

Wat helpt de leerling nog verder?

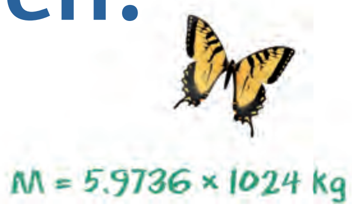
Het helpt de leerling als hij of zij vaardigheden bezit die de computer niet heeft, zoals het kunnen genereren van nieuwe ideeën, het vinden van originele oplossingen en kritisch kunnen denken.

Iedere leerling werkt en communiceert in de toekomst digitaal: hij of zij moet met de juiste digitale middelen kunnen omgaan (en mee kunnen veranderen).

Digital first!

Beeld: Shutterstock

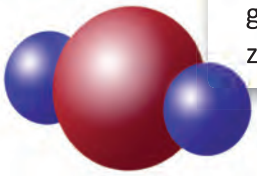
Wat heeft dat voor gevolgen voor het vak rekenen?



Er komen complexere taken rondom het rekenwerk.

WAT DAN?

Bijvoorbeeld het kritisch beoordelen wat er gebeurt bij een lastige berekening in plaats van het zelf uitvoeren van eenvoudigere berekeningen.



Er komt een verschuiving in de verhouding tussen uitrekenen en wiskundig denken zoals probleemoplossen. Een leerling wordt een kritisch wiskundig denker.

WAAROM DAN?

Elke leerling moet zijn of haar rekenkennis en -vaardigheden gaan inzetten voor het probleemoplossen en niet meer voor het uitvoeren van berekeningen (want dat doet de computer). Hiervoor is een diepere kennis van rekenen-wiskunde nodig.

Andere kennis bij rekenen wordt belangrijk.

WELKE DAN?

- statistiek
- programmeren
- kennis over wiskundige structuren en samenhang

HOE DAN?

De leerkracht zet de leerling aan het denken en begeleidt hem of haar in het probleemoplossen.

Door meer denkvragen te stellen en alleen uitleg te geven als dat echt nodig is.

Moet dat allemaal nu meteen? **NEE HOOR!**

Beeld: Shutterstock

Meer dan de computer alleen

ICT is een middel, geen doel.

Digitale devices zijn prachtig voor oefenen, registratie, communicatie en theoretisch onderzoeken. Maar niet alle leerdoelen zijn via de digitale route te benaderen. Handelend rekenen, construeren, onderzoeken, samenwerken, zelf tekenen: veel reken-wiskunde-inhoud vraagt om praten en papier.

Flexibel aanbod.

Scholen verschillen in visie over de wenselijkheid van de mate van digitalisering. Folio, digitaal en handelen gaan daarom hand in hand. Full digital, vooral papier, doen of een mix: alle combinaties zijn in de toekomst mogelijk.

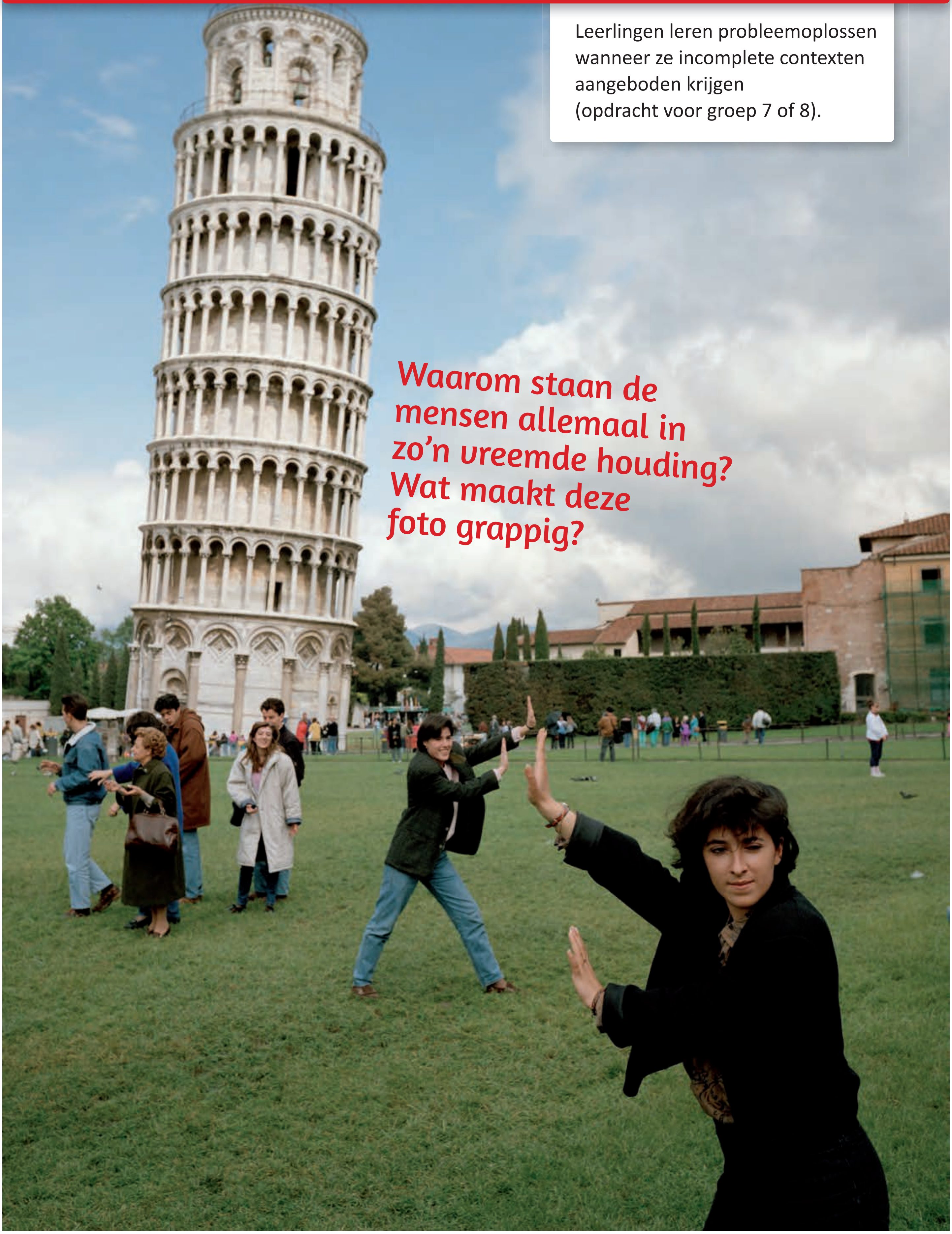
Begin gewoon vandaag!

Maak van je leerlingen kritische wiskundige denkers door:
- ze incomplete contexten aan te bieden (zie voorbeeldactiviteit 1)
- ze zelf onderliggende verbanden te laten ontdekken (zie voorbeeldactiviteit 2)
- ze hun rekenkennis te laten gebruiken om kritisch na te denken (zie voorbeeldactiviteit 3)
- ze de samenhang in de wiskundige structuur te laten ontdekken (zie voorbeeldactiviteit 4)
- ze te leren dat dat er niet altijd één goed antwoord is (zie voorbeeldactiviteit 5)

Beeld: Shutterstock

Voorbeeldactiviteit 1

Leerlingen leren probleemoplossen wanneer ze incomplete contexten aangeboden krijgen (opdracht voor groep 7 of 8).



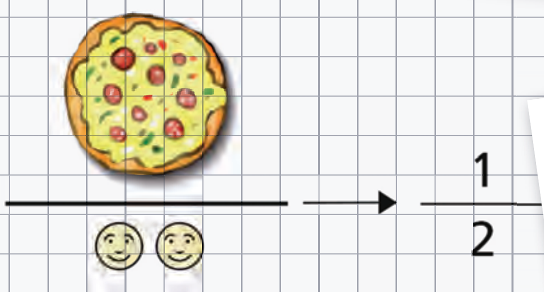
Waarom staan de mensen allemaal in zo'n vreemde houding? Wat maakt deze foto grappig?

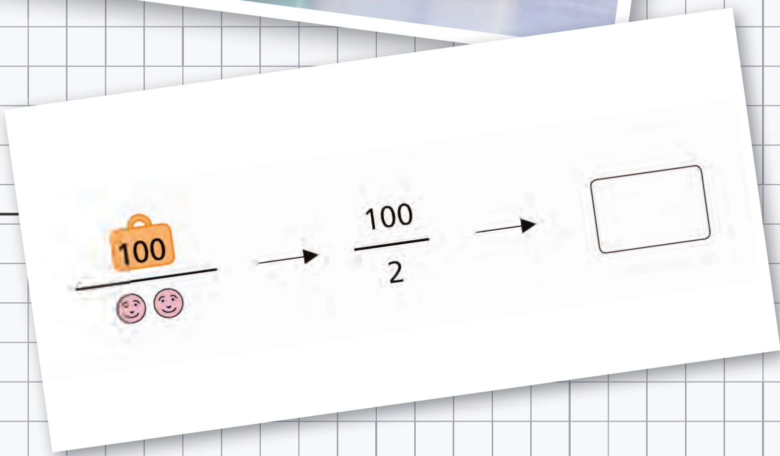
Beeld: Hollandse Hoogte/Magnum Photos

Voorbeeldactiviteit 2

Leerlingen ontdekken zelf onderliggende verbanden (stelling voor groep 6).

Een breuk is een deling.





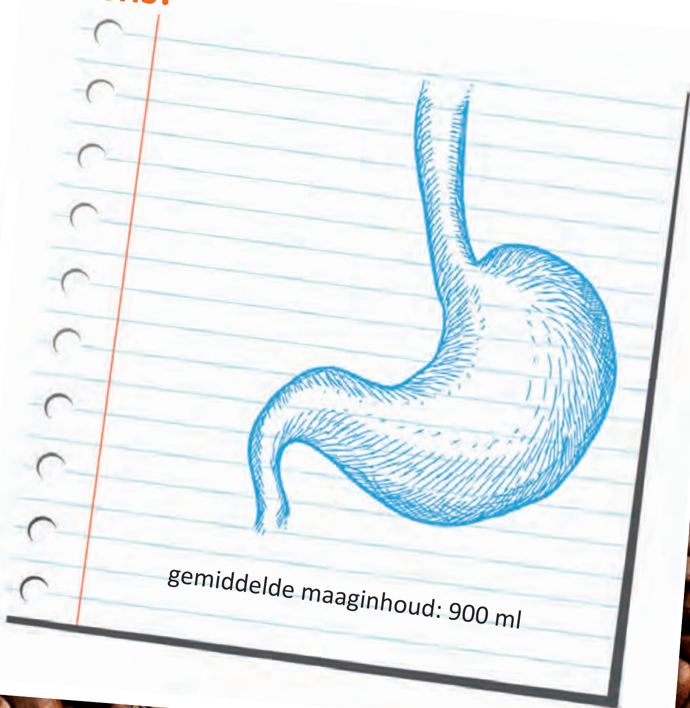
Beeld: Birgitte Frier Steward, Støvring, Denemarken / Coen de Kort / Shutterstock

Voorbeeldactiviteit 3

Leerlingen leren kritisch nadenken door inzet van hun rekenkennis (opdracht voor groep 8).

Toen Starbucks een nieuw formaat beker (de Trenta) introduceerde, heeft iemand dit plaatje bedacht om over na te denken.
Wat zou deze persoon willen zeggen?
Ben je het daarmee eens?

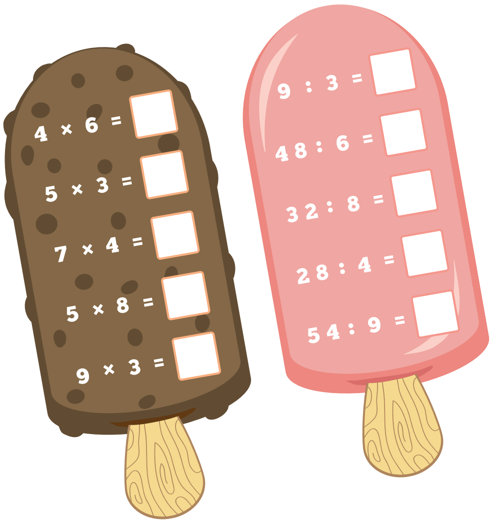
916 ml



Beeld: Shutterstock, Shutterschock/Sorbis

Voorbeeldactiviteit 4

Leerlingen ontdekken de samenhang in een wiskundige structuur (stelling voor groep 5).



Bij een keersom en bij een deelsom mag je de getallen in de som van plek verwisselen.

Beeld: Shutterstock

Voorbeeldactiviteit 5

Leerlingen leren dat er niet altijd één goed antwoord is (stelling voor groep 8).

Er passen ongeveer 1000 korreltjes hagelslag op een boterham.

Beeld: Shutterstock

Steuntje in de rug nodig? Gebruik het stappenplan!

Stap 1: Lees de stelling of de vraag.
Stap 2: Wat zegt de stelling of de vraag precies?
Stap 3: Wat moet je weten om iets over de stelling of de vraag te kunnen zeggen?
Stap 4: Zoek uit of de stelling waar of niet waar is, of dat er een antwoord op de vraag te vinden is door uit te proberen, materialen te gebruiken, te rekenen.
Stap 5: Trek je conclusie.
Stap 6: Bedenk hoe je je bewijs aan je klasgenoten kunt uitleggen. Werk alle denkstappen netjes uit.
Stap 7: Geef de uitleg aan je klasgenoten.

Beeld: Shutterstock

Meer weten?

Verder lezen?

- Bruin-Muurling, G. & M. Verschoor (2015). Op de toekomst voorbereid. Kritisch wiskundig leren denken. *Volgens Bartjens*, jaargang 34 (5), 36-39.
- Verschoor, M & G. Bruin-Muurling (2015). Reken-wiskundige inzichten en 21st century skills. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk*, 44-54.

Verder kijken?

- Meyer, D. (2010). *Math class needs a makeover.* https://www.ted.com/talks/dan_meyer_math_curriculum_makeover/transcript
- Wolfram, C. (2010). *TEDGlobal 2010 talk* via http://blog.wolfram.com/2010/11/23/conrad-wolframs-ted-talk-stop-teaching-calculating-start-teaching-math/
- http://www.bruin-muurling.nl/

Beeld: Shutterstock

Vakkenintegratie: daar kun je op rekenen!
Vakoverstijgend werken aan creatief, kritisch en probleemoplossend denken

Rens Gresnigt, Lou Slangen & Wim Brouwer, de Nieuwste Pabo

De leerling ontwikkelt kennis en vaardigheden door creativiteit en nieuwsgierigheid in te zetten, aldus het eerste kenmerk van de visie op toekomstgericht onderwijs uit het advies van Platformonderwijs2032 (Schnabel, 2016). Dit kenmerk veronderstelt dat leerlingen probleemoplossend aan de slag gaan, kritische vragen stellen en hun inventiviteit gebruiken. Dat klinkt fantastisch, maar hoe kan een leerkracht voor elkaar krijgen dat dit gebeurt? In dit artikel schetsen we aan de hand van praktijkvoorbeelden in het primair onderwijs hoe je als leerkracht dit soort vaardigheden en houdingen kunt stimuleren. Belangrijk daarvoor is dat leerlingen onderwijstaken niet ervaren als opdrachten voor een vak maar als echte problemen met meerdere dimensies om op te lossen. Dit kan bewerkstelligd worden door op een meer vakoverstijgende manier te gaan werken (Thijs, Fisser, & Hoeven, 2014). We beginnen met het schetsen van de theoretische achtergrond rond vakoverstijgend onderwijs en werken vervolgens enkele praktische voorbeelden uit.

Onderwijs 2032 en 21e eeuwse vaardigheden

Toekomstbestendig onderwijs vormgeven vraagt 21e eeuwse vaardigheden zoals beschreven door SLO (Thijs e.a., 2014) en het advies van het Platform onderwijs2023 (Schnabel, 2016). Daarbij draait het om een nieuwsgierige houding, vragen stellen, verbeeldingskracht gebruiken, verbanden leggen, producten ontwerpen, experimenteren en risico's durven nemen. Het platform beschrijft bovendien dat de rekenvaardigheid één van de belangrijke onderdelen van een toekomstig curriculum is. Maar onderwijs2032 hecht ook veel belang aan vakoverstijgende vaardigheden: leervaardigheden, *creëren*, *kritisch denken*, *probleemoplossen* en samenwerken.

De discussie rondom de 21e eeuwse vaardigheden loopt al een aantal jaren. Welke vaardigheden hiertoe gerekend worden verschilt van publicatie tot publicatie. De 21e eeuwse vaardigheden die de SLO beschrijft zijn: communiceren, samenwerken, *creativiteit*, *kritisch denken*, *probleemoplossend denken en handelen*, sociale en culturele vaardigheden, zelfsturing en vier deelvaardigheden van digitale geletterdheid. Er is - logischerwijze - flink wat overlap tussen de vaardigheden van Onderwijs2032 en de 21e eeuwse vaardigheden. In essentie gaat het om de brede opvatting over wat leerlingen aan generieke vaardigheden moeten beheersen om te kunnen participeren in een toekomstige samenleving. In de praktijkvoorbeelden hieronder concentreren we ons op de vaardigheden die hierboven cursief zijn afgedrukt.

De overheid streeft na dat in 2020 op alle basisscholen aandacht wordt besteed aan Wetenschap & Technologie. Kritisch en creatief denken en probleemoplossend handelen maken hier fundamenteel deel van uit: *Wetenschap en Technologie begint bij* *de verwondering: waarom is de wereld zoals ze is? Vanuit die attitude komen vragen op of worden problemen gesignaleerd. De zoektocht naar antwoorden op die vragen en problemen leidt tot oplossingen in de vorm van kennis en/of producten. Deze oplossingen zijn tegelijk weer uitgangspunt voor nieuwe vragen. Onderwijs in wetenschap en technologie stimuleert en bestendigt een nieuwsgierige, onderzoekende en probleemoplossende houding bij kinderen. Het gaat om onderzoekend en ontwerpend leren, waarmee 21e eeuwse vaardigheden worden ontwikkeld* (Clevers & Willems, 2013, p. 6).

Hoewel we ons allemaal wel een voorstelling kunnen maken van dergelijke vaardigheden is het niet direct duidelijk wat leerlingen dan daadwerkelijk kunnen. Het SLO heeft daarom een voorbeeldmatig leerplankader beschreven waarin de verschillende begrippen nader gespecificeerd worden (zie Tabel 1 voor een voorbeeld).

Tabel 1. Leerplankader Probleemoplossend denken en handelen (curriculumvandetoekomst.slo.nl).

Probleemoplossend denken en handelen	**De leerling…**
Problemen signaleren en verkennen	• Weet dat er problemen van verschillende aard zijn en dat veel problemen kunnen worden opgelost. • Herkent situaties waarin van een vraag of probleem sprake is, kan aangeven wat onduidelijk is. • Kan aangeven in welke situatie het probleem of vraag zich voordoet.
Problemen analyseren en definiëren	• Kan elementen van het probleem benoemen en daarbij deelvragen formuleren. • Kan een probleemstelling formuleren door het verschil tussen huidige en gewenste situatie te omschrijven.
Probleemoplosstrategieën kennen en genereren	• Weet dat er verschillende probleemoplosstrategieën zijn en kan aangeven uit welke algemene stappen deze bestaan. • Kan probleemoplosstrategieën genereren op basis van de probleemstelling.
Probleemoplosstrategieën analyseren en selecteren	• Kan analyseren welke oplossingsstrategieën passen bij de probleemstelling. • Kan criteria benoemen om een keuze te maken uit de voorgestelde oplossingsstrategieën, passend bij de probleemstelling.
Mogelijke oplossingen genereren	• Kan in verschillende richtingen denken om tot oplossingen te komen. • Kan verschillende oplossingsrichtingen voorbeeldmatig uitwerken. • Kan denken in patronen om problemen systematisch op te lossen. • Kan verbanden leggen en zo mentale modellen creëren die relevant zijn voor het probleemoplossen.
Beargumenteerde beslissingen nemen	• Kan de voorgestelde oplossingen beoordelen in relatie tot het oorspronkelijke probleem. • Kan beredeneren waarom de voorgestelde oplossing(en) passen bij het oorspronkelijke probleem.
Toepassen en evalueren van de oplossing	• Kan de voorgestelde oplossing toepassen in de praktijk. • Kan de voorgestelde oplossing toetsen aan het oorspronkelijke probleem. • Kan terugblikken op het doorlopen probleemoplosproces.

Het werken aan deze vaardigheden kan volgens SLO (Thijs e.a., 2014) het beste door voor een geïntegreerde aanpak te kiezen waarbij vaardigheden met een of meer concrete vakinhouden worden verbonden. Daarnaast worden door het SLO ook vragen aangekaart waarop nog geen eenduidig antwoord is: Moet het hele curriculum anders gestructureerd worden? Kunnen de vaardigheden ook naast de vakken onderwezen worden? Hoe zorg je voor voldoende aandacht voor deze vaardigheden?

Vormen van integratie kiezen

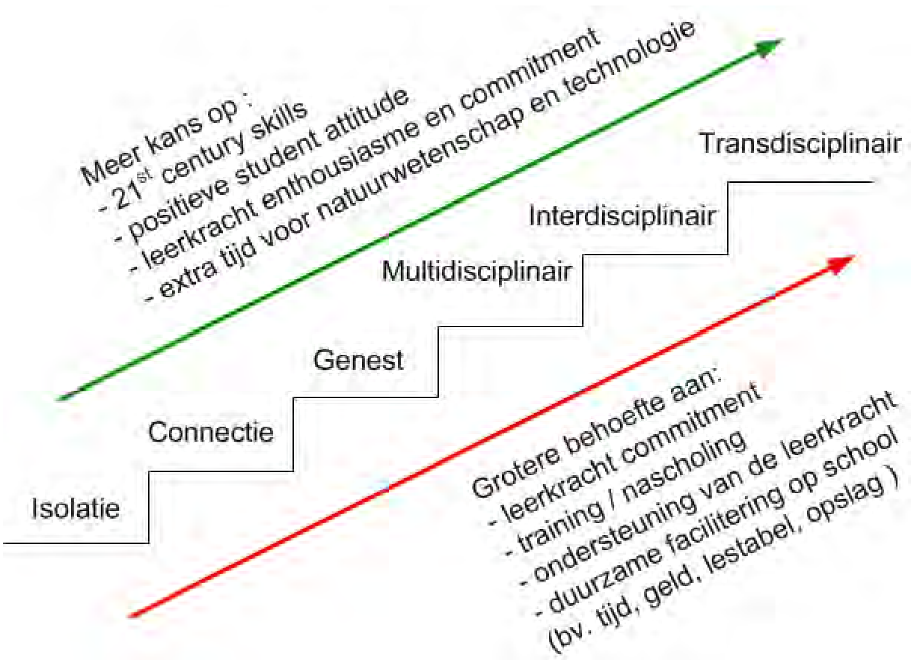
Wij veronderstellen dat er meerdere antwoorden mogelijk zijn op deze vragen. Het zijn juist de leerkrachten die zelf moeten bepalen wat het meest bij hen, hun leerlingen, de school en de mogelijkheden past.
Het is daarom belangrijk dat je als leerkracht zicht hebt op diverse mogelijkheden om deze vragen te beantwoorden om vervolgens een beargumenteerde keuze te kunnen maken. Onderzoek van Gresnigt, Taconis, van Keulen, Gravemeijer en Baartman (2014) laat zien dat er verschillende manieren van integreren zijn. Een Nederlandse praktijkvertaling waarin we de verschillende vormen uitgebreid toelichten is te vinden in *Jeugd, School en Wereld* (Gresnigt & Slangen, 2015). We beperken ons hier tot een typering met een korte toelichting. In Tabel 2 zijn de verschillende vormen van integratie gerangschikt naar complexiteit.

Tabel 2: Korte beschrijving van typen integratie. (Naar: Gresnigt & Slangen, 2015).

Naam	**Beschrijving**
Isolatie	Gescheiden vakken, geen integratie. Vaak gezien als de traditionele manier van lesgeven.
Connectie	Losse vaklessen. Maar de leraar legt expliciet een verbinding tussen de bestaande vakken en gaat er niet van uit dat de leerlingen dit zelf doen.
Genest	Binnen een vakles worden vaardigheden of inhoud van een ander vak aangesproken. De inhoud van het ene vak wordt gebruikt om het andere vak te verrijken.
Multidisciplinair	Twee of meer vakgebieden worden georganiseerd rond één thema. De disciplines behouden hun eigen identiteit en lesdoelen maar in de lestijd komen meer vakken aanbod.
Interdisciplinair	In de lessen wordt niet meer gerefereerd naar de individuele vakgebieden. Lessen worden niet meer vanuit vakken benaderd, nadruk op vaardigheden en concepten die vakoverstijgend zijn in plaats van vakgebonden.
Transdisciplinair	De lesdoelen overstijgen de vakgebieden, en komen voort uit de vragen en belevingswereld van de kinderen in plaats van de leraar.

Het komt er op neer dat er diverse vormen van integratie te onderscheiden zijn en dat elke vorm eigen kenmerken heeft. Het is belangrijk om je te realiseren dat de ene vorm niet beter is dan de andere, en dat je, afhankelijk van wat je wilt bereiken en welke middelen er beschikbaar zijn, een specifieke vorm kiest. Hoe 'hoger' je op de 'integratieladder' komt, hoe complexer de integratie (Afb. 1). Bij integratie hoog op de ladder zijn de lesdoelen vakoverstijgend en niet meer vakgebonden, en zijn de lestijd, de leeractiviteiten en de toetsing/evaluatie niet meer gericht op één vak maar op geïntegreerde doelen en vakken. Met 'complexe integratie' bedoelen we dus dat de vakken steeds meer delen: doelen, tijd, activiteiten, toetsing, enzovoort.
Als je in de klas reken-wiskundeonderwijs wilt integreren met W&T en andere vakken waarbij je kritisch, creatief en probleemoplossend handelen en denken wilt stimuleren dien je een keuze te maken hoe je dat wilt aanpakken. Afbeelding 1 laat zien dat de vormen van integratie samenhangen met kansen (groene pijl) en behoeften (rode pijl). Wil je niet te veel van je (reken)lesinhouden in één keer veranderen maar toch

de verbinding tussen de vakken en vaardigheden voor leerlingen expliciteren dan zijn integratievormen lager op de ladder een goede manier. Wil je veel nadruk leggen op 21e eeuwse vaardigheden of generieke rekenconcepten dan is het aantrekkelijk om voor interdisciplinair of transdisciplinair integreren te kiezen.



Afb. 1. Voorgestelde relatie tussen vorm van integratie en de kansen en behoeften voor kinderen en leraren (naar Gresnigt e.a., 2014).

Praktijkvoorbeelden: Integratie via een les met de propellerboot

Een propellerboot is een boot die veelal in moerasgebieden wordt gebruikt. De aandrijving van de boot zit niet onder water zoals bij de schroef van een motorboot, maar boven water en lijkt op een propeller van een vliegtuig. De propellerboot gebruiken we hier als voorbeeld om de diverse vormen van integratie toe te lichten. Daarbij verwijzen we telkens naar kerndoelen, tussendoelen en 21e eeuwse vaardigheden waaraan wordt gewerkt in de voorbeelden.

Afb. 2. De propellerboot wordt getest.

Connectie

Vorige week heeft Juf Marieke in groep 7 een les natuuronderwijs gegeven waarbij diverse soorten planten aan bod kwamen. Behalve planten die je boven water ziet zoals, bomen, struiken en kruiden ging de les ook over waterplanten en dat die planten in moerassen voorkomen.[1] Marieke gaf aan dat ze de term moerassen volgende week ook zou gaan gebruiken in de aardrijkskunde les over klimaten.[2] In de daaropvolgende rekenles laat ze de leerlingen een cirkeldiagram maken van de moerassen.[3] Het cirkeldiagram is een visualisering van de verschijningsvorm ‘deel van een geheel’. Juf Marieke vraagt aan haar leerlingen bij het cirkeldiagram een duidelijke legenda op te nemen. Twee maanden na de aardrijkskunde les wil Marieke dat de kinderen een stroomkring leren maken.[4] De kinderen maken allemaal een propellerboot met een batterij, een motortje en propeller. Tijdens de introductie van de les vertelt ze tegen de kinderen dat dit soort boten veel worden gebruikt in een moerassige omgeving met veel waterplanten, net zoals in de biologie- en aardrijkskundeles al naar voren kwam. De kinderen beargumenteren op het einde van de les welke boot zij het beste vinden.[5]

1. Kerndoel 40: De leerlingen leren in de eigen omgeving veel voorkomende planten (…) onderscheiden en benoemen (…).
2. Kerndoel 49: De leerlingen leren over de mondiale ruimtelijke spreiding van (…) klimaten (…) en natuurlandschappen.
3. Tussendoel bij kerndoel 23: De leerlingen leren wiskundetaal gebruiken; modellen, schema’s en grafieken voor het uitdrukken van verdelingen.
4. Kerndoel 42: De leerlingen leren onderzoek doen aan materialen en natuurkundige verschijnselen zoals (…) elektriciteit.
5. 21e eeuwse vaardigheid creativiteit, waarbij het gaat om kunnen evalueren: de leerling kan de waardering beargumenteren en maakt daarvoor gebruik van vakspecifieke kennis en vaardigheden.

Genest

Juf Inge heeft voor haar techniekles een werkblad voorbereid rondom een propellerboot. De eerste pagina van het werkblad bestaat uit een eenvoudige tekst over wat een propellerboot is en hoe een stroomkring werkt.[1] Op de tweede pagina staat een stappenplan dat de kinderen kunnen gebruiken om zelf een propellerboot te maken. Van alle materialen staat de afmeting aangegeven en welke gereedschappen kinderen kunnen gebruiken om alles op maat te maken. De juf laat de tekst hardop voorlezen door de kinderen die nog wat oefening nodig hebben in het technisch lezen.[2] Tijdens de les lukt het sommige kinderen niet om de propeller te laten draaien. De leerkracht vraagt aan de leerlingen in stapjes al redenerend te achterhalen wat er met de stroomkring aan de hand kan zijn.[3] Andere kinderen hebben moeite met het afmeten van de halfronde vorm van het hardschuim die de punt van de boot gaat vormen. Inge pakt een liniaal, rolmaat en huishoudcentimeter (Afb. 3) en vraagt de kinderen welk van de instrumenten ze het best kunnen gebruiken.[4] In de verkenning van meetinstrumenten gaat het om het correct gebruik van het instrument. Al metende zullen kinderen in toenemende mate vaardiger worden in het aflezen van meetresultaten en inzicht krijgen in het ontstaan van meetfouten.

Afb. 3. Liniaal, rolmaat en huishoudcentimeter.

1. Kerndoel 42: De leerlingen leren onderzoek doen aan materialen en natuurkundige verschijnselen zoals (…) elektriciteit.
2. Tussendoel bij kerndoel 4: technisch lezen; verhogen van het leestempo en het lezen van woorden met complexere woordstructuren, afwijkende spellingpatronen en leenwoorden
3. 21e vaardigheid probleemoplossen, waarbij het gaat om oplossingen genereren: de leerling kan denken in patronen om problemen systematisch op te lossen.
4. Tussendoel bij kerndoel 33: de leerlingen leren meten en leren te rekenen met eenheden en maten zoals (…) lengte, omtrek (…); ervaring opdoen met het zelf bedenken van passende meetstrategieën.

Multidisciplinair

Meester Miel heeft een themadag georganiseerd. De hele dag staat in het teken van de Everglades. Alle vakken waar hij op een normale dag aan werkt komen vandaag ook aan bod. Na een korte introductie van meester Miel lezen de leerlingen een tekst over de vervuiling van de Everglades door propellerboten.[1] Leerlingen benoemen in de tekst welke alinea's informatief van karakter zijn en welke alinea's argumentatief van karakter zijn.[2] Vervolgens gaan de leerlingen berekenen wat de snelheid van de in het verhaal voorkomende boten is met behulp van een verhoudingstabel: als een boot in twee uur acht kilometer vaart, wat was dan zijn gemiddelde snelheid?[3] Meester Miel wijst zijn leerlingen er op dat de verhoudingstabel niet enkel als uitrekentabel gebruikt wordt maar ook als denkmodel. De leerlingen dienen zowel de grootheden (afstand, tijd en snelheid) als de eenheden (kilometer, uur en km/uur) te vermelden.

In de daarop volgende schrijfles krijgen de kinderen uitleg over wanneer je puntkomma's gebruikt en wanneer je dubbele punten gebruikt. Vervolgens schrijven ze allemaal een samenvatting over de milieuvervuiling in de Everglades waarbij ze minimaal twee keer een puntkomma gebruiken en twee keer een dubbele punt.[4] De informatie die ze in de samenvatting opnemen moet ook informatie bevatten die ze zelf op internet hebben gevonden en die ze beargumenteerd belangrijk vinden om over te nemen.[5]

1. Kerndoel 4: De leerlingen leren informatie te achterhalen & Kerndoel 39: De leerlingen leren met zorg om te gaan met het milieu.)
2. Kerndoel 6: De leerlingen leren informatie en meningen te ordenen (…).
3. Kerndoel 26: De leerlingen leren structuur en samenhang van (…) verhoudingen op hoofdlijnen te doorzien en er in praktische situaties mee te rekenen.

4. Kerndoel 11: De leerlingen leren een aantal taalkundige principes en regels; regels voor het gebruik van leestekens.
5. 21e eeuwse vaardigheid kritisch denken, waarbij het gaat om houding: de leerling wil goed geïnformeerd zijn.

Interdisciplinair

De leerlingen bij Juf Michele in de klas hebben de grootste moeite om geconcentreerd te blijven, want over twee dagen begint de vakantie. Daarom besluit Michele om de volgende dag een extra projectdag, die er anders elke drie weken is, in te lassen. Als de kinderen ’s middags even zelfstandig aan het werk zijn pakt ze drie grote bakken. De eerste bak vult ze met scharen, nietmachines, plakband, gereedschap uit het handvaardigheid lokaal en vijf stopwatches. De tweede bak vult ze met spullen uit de knutselhoek: karton, blikjes, lege flesjes, papier, ballonnen, stoffen lapjes, restjes plastic, piepschuim en stukjes hout. Op het einde van de lesdag vertelt ze de leerlingen dat ze de volgende dag aan een project gaan werken. De kinderen spitsen hun oren en gaan rechtop zitten, ze weten uit ervaring dat een projectdag altijd erg leuk is!
Michele vertelt de opdracht: *Ontwerp en maak een boot, meet driemaal de tijd die de boot nodig heeft om een bepaalde afstand over het water af te leggen. Geef de uitkomsten, in seconden, minuten en uren*.[1] *Maak de boot daarna sneller*[2] *en presenteer op het einde van de dag hoeveel keer sneller de snelste boot is in vergelijking met de langzaamste boot*.[3] Ter informatie maakt juf Michelle gebruik van krantenknipsels (Afb. 4) en laat daarmee zien op welke wijze gegevens gepresenteerd kunnen worden.


Olympische Spelen

MEDAILLESPIEGEL

*Na 191 van de 306 finales**

		Goud	Zilver	Brons	Totaal
1	Verenigde Staten	28	27	27	82
2	Verenigd Koninkrijk	17	17	10	44
3	China	15	15	18	48
4	Rusland	12	12	14	38
5	Duitsland	10	7	6	23
6	Italië	8	9	6	23
7	**Nederland**	8	2	3	13
8	Frankrijk	7	10	10	27

Afb. 4. Een voorbeeld van een krantenknipsel (Bron: NRC next).

Dan laat de juf de derde bak zien die nu nog leeg is: *Jullie nemen allemaal iets van thuis mee dat je voor de opdracht kan gebruiken, maar let op, het mag niet te groot zijn, het moet allemaal in deze bak passen. Ga nu in je groepje nadenken over wat je nuttig vind om mee te nemen.* De kinderen beginnen gelijk te overleggen over hoe ze het morgen zullen gaan aanpakken. Dan gaat de bel en de kinderen spreken nog vlug af wie morgen welke spulletjes meeneemt.[4]

1. Kerndoel 33: De leerlingen leren meten en leren te rekenen met eenheden en maten, zoals bij tijd (…).
2. Kerndoel 45: De leerlingen leren oplossingen voor technische problemen te ontwerpen, deze uit te voeren en te evalueren)
3. Kerndoel 2: De leerlingen leren zich naar vorm en inhoud uit te drukken bij het geven en vragen van informatie, het uitbrengen van verslag, het geven van uitleg, het instrueren en bij het discussiëren & Kerndoel 24: De leerlingen leren praktische en formele rekenwiskundige problemen op te lossen en redeneringen helder weer te geven.
4. 21e eeuwse vaardigheid creativiteit, waarbij het gaat om oriënteren: de leerling kan met anderen communiceren over het onderwerp.

Transdisciplinair

Tijdens het kringgesprek in groep 2, de klas van Juf Evelien, praten opeens alle kinderen opgewonden door elkaar heen. Twee minuten geleden was het gesprek rustig begonnen. Maar toen Bram vertelde over het sinterklaasjournaal van gisteren liep het ineens uit de hand. De boot van Sinterklaas was tijdens een storm gezonken en nu konden de pakjes niet naar Nederland worden vervoerd. De pieten waren allemaal op zoek naar een nieuwe boot voor de Sint maar konden nog geen geschikte boot vinden. Alle kinderen bemoeien zich meteen met het probleem. Elin: *Mijn papa heeft een opblaasboot, die kunnen we wel opsturen.* Teun: *Ik vind dat we Sinterklaas moeten helpen*. Lorna: *Ik heb thuis al een boot voor sinterklaas gemaakt*. Jin: *We kunnen de pakjes ook zelf gaan ophalen.* De goede ideeën tuimelen over elkaar heen. Dan neemt Juf Emma het woord: *Zullen we met zijn allen eens kijken of we Sinterklaas kunnen helpen?*
Jaaah! roepen de kinderen. *We zullen eerst kijken hoe een goede boot er uit ziet*, zegt Emma. Ze neemt enkele voorlees- en plaatjesboeken die gaan over boten, storm, drijven en zinken, transport, enzovoorts. Ze bladert de boeken door, laat de kinderen de plaatjes zien en vraagt aan de kinderen hoe de nieuwe boot van Sinterklaas eruit moet komen te zien.[1] De kinderen hebben allemaal goede ideeën: een hoge <u>mast</u>, zodat de boot snel kan <u>varen</u>, een groot <u>ruim</u> zodat de pakjes erin passen, een <u>motor</u> met een snelle <u>schroef</u>, een plat <u>dek</u> waarop het paard kan staan, een <u>stuurwiel</u> om het <u>roer</u> te bedienen, een <u>kajuit</u> zodat Sinterklaas droog kan zitten. De juf neemt alle belangrijke woorden met de kinderen nog een keer goed door voordat de kinderen aan de slag gaan.[2] Nu gaan de kinderen allemaal aan de boot werken. Ze kiezen zelf of ze een boot tekenen of knutselen.[3] De juf geeft wel een belangrijke opdracht mee: *Als jouw boot klaar is moet je goed uit kunnen leggen met welke materialen de pieten jouw boot in het echt kunnen nabouwen. Die gegevens sturen we dan op naar Spanje!* Terwijl de kinderen druk aan het bouwen en tekenen zijn vraagt Evelien telkens aan de kinderen hoe het onderdeel waar ze mee bezig zijn genoemd wordt. Ook vraagt ze van welk materiaal de pieten dat onderdeel moeten maken.[4] Voordat de kinderen en de juf er erg in hebben is de ochtend bijna voorbij. Het laatste kwartier vergelijken de kinderen het aantal pakjes dat ze op hun eigen boot hebben getekend.[5] De pakjes zijn veelal ongeordend op de boot

getekend. Hierdoor wordt de vaardigheid van het resultatief tellen uitgebreid en gestimuleerd. Juf Evelien heeft schrapkaarten gemaakt waarmee het resultaat van het tellen direct af te lezen is (Afb. 5).

Afb. 5. Schrapkaart.

Als de kinderen na de middagpauze weer binnen komen blikt de juf terug op alle emoties die de kinderen vanochtend in het kringgesprek hadden. Alle kinderen gaan uitbeelden hoe verdrietig de pieten en Sinterklaas gisteren waren toen ze er achter kwamen toen de boot gezonken was. De juf speelt daarna een stukje toneel waarin ze uitlegt hoe de pieten de boot moeten maken, welke onderdelen belangrijk zijn en welke materialen ze het beste kunnen gebruiken. Tot slot gaan alle kleuters uitbeelden hoe blij de pieten zijn dat ze nu toch weer met de boot naar Nederland kunnen varen.[6]

1. 21e eeuwse vaardigheid kritisch denken, waarbij het gaat om analyseren: de leerling kan informatie verwerven, ordenen en structureren.
2. Kerndoel 12: De leerlingen verwerven een adequate woordenschat (…).
3. Kerndoel 32: De leerlingen leren eenvoudige meetkundige problemen op te lossen; verkennen en onderzoeken van meetkundige basisvormen en het maken van bouwplaten.
4. Kerndoel 44: De leerlingen leren bij producten uit hun eigen omgeving relaties te leggen tussen de werking, de vorm en het materiaalgebruik.
5. Tussendoel bij Kerndoel 26: De leerlingen leren structuur en samenhang van aantallen, gehele getallen (…); resultatief tellen.
6. Kerndoel 54: De leerlingen leren beelden, taal, muziek, spel en beweging te gebruiken, om er gevoelens en ervaringen mee uit te drukken en om er mee te communiceren.

Tot besluit

In bovenstaande voorbeelden hebben we mogelijkheden laten zien om specifieke onderwijsdoelen vanuit verschillende disciplines te combineren in vak-integratieve onderwijsactiviteiten. Het realiseren van een toekomstbestendig reken-wiskunde-curriculum dat zich ook richt op bredere (21e eeuwse) vaardigheden kun je als school en als individuele leerkracht dus op verschillende manieren bereiken. Ongeacht het soort vakintegratie dat je kiest, het is vooral belangrijk om steeds rijke onderwijs/leersituaties te creëren denkend vanuit onderwijsdoelen en niet alleen vanuit vakdoelen.

Literatuur

Clevers, H., & Willems, R. (2013). Advies Verkenningscommissie wetenschap en technologie primair onderwijs . Utrecht / Den Haag: PO-Raad / Platform Bèta Techniek.

Gresnigt, R., & Slangen, L. (2015). Integreren op niveau. *JSW, 5 januari*, 32-35.

Gresnigt, R., Taconis, R., van Keulen, H., Gravemeijer, K., & Baartman, L. (2014). Promoting science and technology in primary education: a review of integrated curricula. *Studies in Science Education, 50*(1), 47-84. doi: 10.1080/03057267.2013.877694

Schnabel, P. (2016). *Ons Onderwijs 2032*. Platform onderwijs 2032.

Thijs, A., Fisser, P., & Van der Hoeven, M. (2014). *21e eeuwse vaardigheden in het curriculum van het funderend onderwijs*. Enschede: SLO.

Statistiek in het basisonderwijs

Frans van Galen & Dolly van Eerde, Universiteit Utrecht:
Freudenthal Instituut, Faculteit Bètawetenschappen

Inleiding

We worden overspoeld met statistische uitspraken als: *52 procent van alle Nederlanders is van mening dat ...*, *SuperX tandpasta werkt vijftien procent beter tegen tandplak* en *Oordeel van gasten over dit hotel: 8,2*. Een telefonisch onderzoekje waar vijftig mensen aan mee wilden werken zegt echter weinig over wat 'de Nederlanders' vinden en het verschil tussen een waardering van 7,7 en 8,2 zegt weinig als maar een paar mensen de moeite hebben genomen om een cijfer te geven.

Het is belangrijk dat leerlingen kritisch leren kijken naar uitspraken als de bovenstaande en wat ons betreft zou in het primair onderwijs daarvoor al een basis moeten worden gelegd. Dat gebeurt op dit moment echter niet. Leerlingen leren de procedure voor het berekenen van een rekenkundig gemiddelde, maar er wordt weinig aandacht besteed aan de vraag wanneer een gemiddelde nuttig is, of aan de vraag welke informatie je in feite niet meeneemt in zo'n gemiddelde. Andere centrummaten - mediaan en modus - komen niet aan bod in het basisonderwijs.

Het is duidelijk dat aanpassingen nodig zijn in het reken-wiskundecurriculum, want het huidige reken-wiskundeonderwijs past op veel punten niet bij de wereld van nu. We moeten er rekening mee houden dat computers en andere apparaten steeds meer wiskunde voor ons kunnen doen, en dat ze ook steeds meer wiskunde in ons dagelijks leven brengen. Kwantitatieve gegevens kunnen in een handomdraai worden vertaald in gemiddelden of percentages en worden weergegeven in allerlei grafieken. Wij denken dat in de discussie over gewenste aanpassingen een van de vragen zou moeten zijn hoeveel aandacht nodig is voor statistiek in het basisonderwijs.

In het buitenland is veel onderzoek gedaan rond statistieklessen voor leerlingen in de basisschoolleeftijd. Een voorbeeld is het onderzoek van Lehrer, Kim & Jones (2011), waarin leerlingen in een serie lessen niet alleen zelf centrummaten ontwikkelden, maar ook kwantitatieve maten voor spreiding. Dergelijke onderzoeken maken duidelijk dat leerlingen al op jonge leeftijd statistisch inzicht kunnen ontwikkelen. In Nederland is onderzoek en ontwikkeling tot nu toe gericht geweest op het voortgezet onderwijs. Bakker (2004) deed onderzoek in de eerste en tweede klas. In dit hoofdstuk beschrijven we een aanzet tot onderzoek op de basisschool.

Wij beschrijven in dit hoofdstuk twee lessen waarin leerlingen onderzochten of de kinderen in hun klas groter zouden zijn dan ongeveer even oude kinderen op een school in Jakarta. Een eerste lesontwerp werd beproefd op een school in Utrecht en vervolgens bijgesteld. Wij beschrijven hier de ervaringen bij de tweede try-out in groep 7 van een school in Assendelft[1]. Het beperkte onderzoek rond deze lessen is

[1] Met dank aan Joost Rothuis en Michelle Stolk, die de lessen gaven. De namen van de leerlingen zijn veranderd.

slechts bedoeld als een eerste verkenning van het onderwerp statistiek in het basis-onderwijs. We hopen met het beschrijven van de lessen de discussie te stimuleren.
De eerste les begon met een gesprek over het feit dat Nederlanders veel langer zijn dan mensen in andere landen. Naar aanleiding daarvan stelde de leerkracht de vraag of dat ook te zien zou zijn bij het vergelijken van hun klas met de Indonesische klas. Wij hoopten dat deze vraag zou leiden tot discussies over het typeren van de twee groepen - *de kinderen in onze klas zijn ongeveer 147 centimeter lang* - en over de variatie binnen de groepen. Het (rekenkundig) gemiddelde was in deze groep wel eens aan de orde geweest, maar slechts vrij terloops. Grafieken waren de leerlingen vaker tegen gekomen. De twee lessen die we beschrijven werden op opeenvolgende dagen gegeven. Een paar dagen daarvoor hadden de leerlingen elkaars lengte al opgemeten.

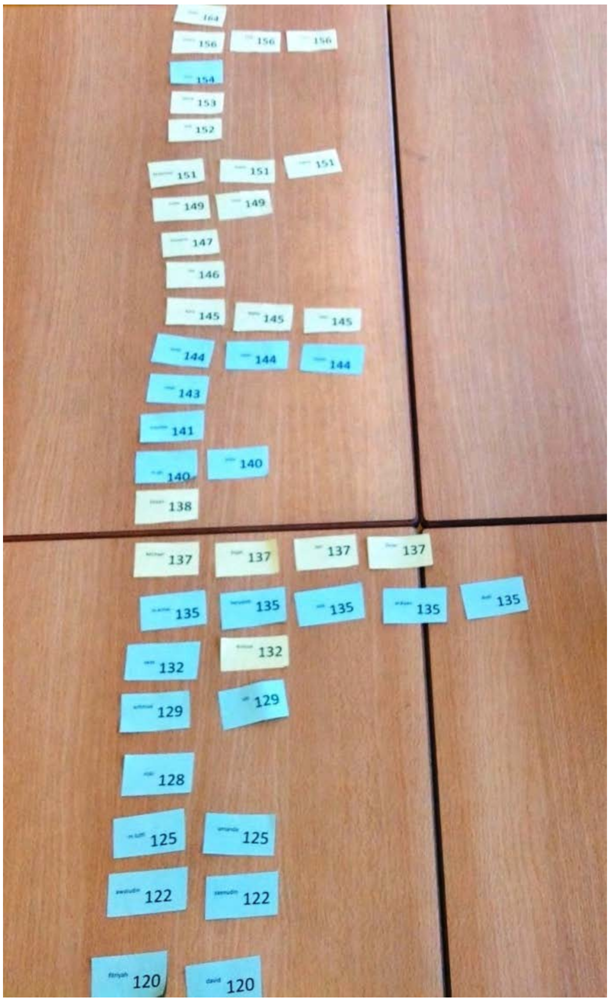
Werken met kaartjes

De leerkracht vertelt dat volgens een krantenbericht Nederlandse mannen de langste mannen ter wereld zijn, en Nederlandse vrouwen bijna de langste vrouwen. Ze laat foto's zien van leerlingen van een Indonesische klas. Dan vraagt ze: *Zouden jullie ook groter zijn dan deze even oude Indonesische kinderen? En hoe zou je uit kunnen zoeken of het klopt wat je denkt?* Nadat hierover wat is doorgesproken verdeelt ze de leerlingen in groepjes van drie of vier. Elk groepje krijgt een set kaartjes waarop steeds de naam en de lengte van een leerling staat; 22 gele kaartjes voor de eigen klas en 23 blauwgroene kaartjes voor de Indonesische leerlingen. De groepjes werken iets meer dan tien minuten aan het probleem. Daarna presenteren ze wat ze gedaan hebben. Aan de hand van een foto op het digibord laten ze zien hoe zij de kaartjes hebben geordend en vertellen ze wat hun conclusie is.

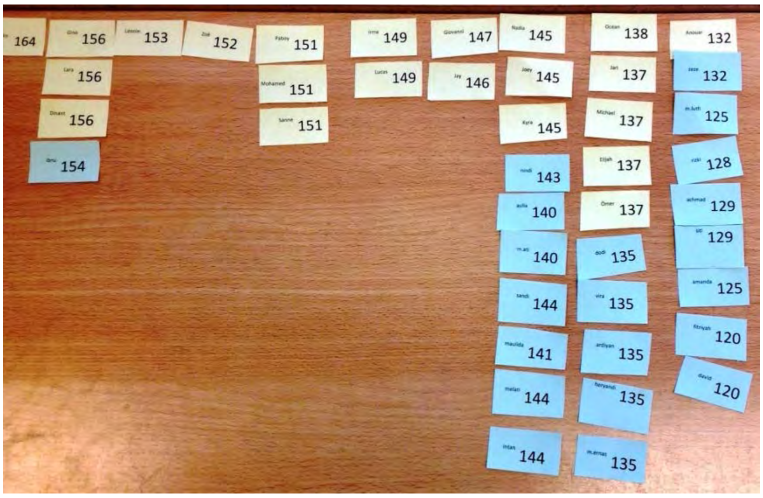
Twee groepjes hebben de Nederlandse en Indonesische kaartjes in twee aparte rijen op volgorde gelegd van klein naar groot. Ze komen in hun uitleg echter niet ver. Een derde groepje heeft de twee klassen ook apart op volgorde gelegd, maar in twee slierten vlak onder elkaar (Afb. 1). Deze leerlingen concluderen dat de kinderen van de eigen klas inderdaad groter zijn, want het grootste Nederlandse kind is groter is dan het grootste Indonesische kind en hetzelfde geldt voor de kleinste kinderen. Mounir wijst ook op de kaartjes in het midden: *De middelste zijn 1,51 meter en zij zijn dan 1,35 meter.* Mounir had eerder al, in het overleg met zijn groepje, geconstateerd dat hij zelf bij de kinderen in het midden hoorde. Dylan legt uit dat je de kinderen in de slierten ook twee aan twee kunt vergelijken; je ziet dan dat de Nederlandse kinderen steeds groter zijn.

Afb. 1. Op volgorde vergeleken.

In drie andere groepjes hebben de leerlingen de kaartjes van beide klassen als één set op volgorde gelegd. Karin en Marieke hebben daarbij de kaartjes met hetzelfde getal (de lengte van leerlingen) steeds naast elkaar gelegd (Afb. 2). Ze vertellen dat je aan de kleuren kunt zien dat de Nederlandse kinderen groter zijn, want de meeste gele kaartjes liggen bovenaan en de meeste donkere kaartjes onderaan. Karin wijst ook aan waar je in de kaartjes-ordening de Indonesische meisjes vindt en waar de Indonesische jongens. Een ander groepje dat ook de kaartjes van beide klassen samen heeft genomen heeft grotere categorieën gemaakt (Afb. 3): een kolom 120 - 132, een kolom 135 - 138, een kolom 140 - 145, een kolom 146 - 147, enzovoort. Waarom de leerlingen precies die indeling kozen kunnen ze niet duidelijk maken. Wel zeggen ze dat je zo goed kunt zien dat de Indonesische kinderen onderaan ‘blijven steken’.



Afb. 2. Dezelfde lengtes naast elkaar.



Afb. 3. In categorieën vergeleken.

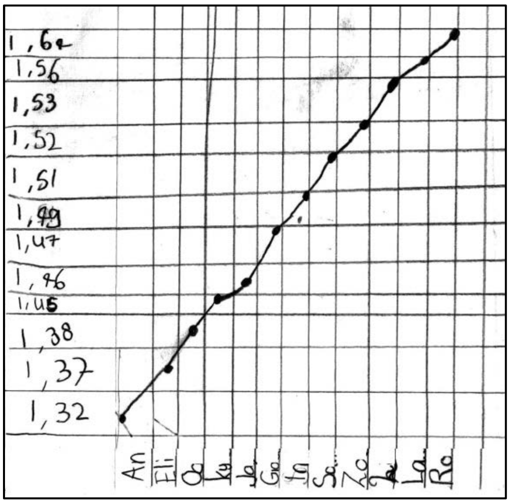
Een grafiek bedenken

De leerkracht vraagt na de bespreking welk ‘rekenhulpmiddel’ je bij dit probleem kunt gebruiken. Lonneke en Roos zeggen, apart van elkaar, dat je het gemiddelde zou kunnen uitrekenen. Als de leerkracht daarop doorvraagt blijkt dat ze allebei daarmee niet het rekenkundig gemiddelde bedoelen, maar dat je kunt kijken waar ongeveer het midden ligt.

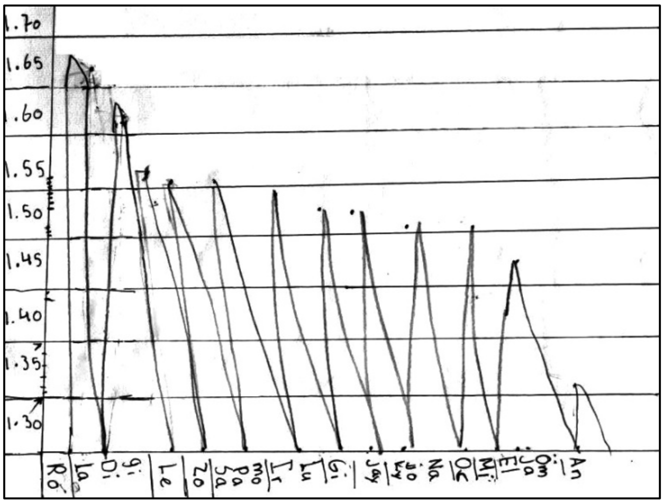
Leerkracht:	*Dus wat voor rekenhulpmiddel zou je kunnen gebruiken?*
Lonneke:	*Het gemiddelde uitrekenen.*
Leerkracht:	*Dan kun je het gemiddelde uitrekenen. Wat is dat, het gemiddelde uitrekenen?*
Lonneke:	*Dat je ongeveer een beetje in het midden zit van de lengtes.*
Leerkracht:	*Ja. Dat is niet wat ik bedoelde, maar dat is een heel goede manier.*
Roos:	*Wij hadden ook het gemiddelde uitgerekend, maar …* (onverstaanbaar)
Leerkracht:	*Dat gemiddelde uitrekenen, hoe hebben jullie dat dan aangepakt?*
Roos:	*Ja, we deden gewoon, het gemiddelde was een beetje daar, het meeste was een beetje 1,35 en tussen de 1,43.*

De leerkracht doelde met haar vraag op het maken van een grafiek als hulpmiddel. De leerlingen krijgen als opdracht om in tweetallen te bedenken hoe je de gegevens in een plaatje of een grafiek zou kunnen weergeven. Ze werken hier een minuut of tien aan. Vrij veel leerlingen snappen echter nog niet goed wat ze moeten doen. Dat is voor de leerkracht aanleiding om de opdracht in de tweede les aan te scherpen.

De leerkracht begint de tweede les - een dag later - met terughalen van de vorige les. Daarna bespreekt ze de opdracht waar de kinderen mee bezig waren en ze perkt hem in: bedenk een grafiek - nu alleen maar voor onze eigen klas - die laat zien dat de kinderen in onze klas niet allemaal even lang zijn.
Bij de bespreking - weer aan de hand van foto's van het leerlingenwerk op het digibord - blijken twee tweetallen niet veel verder te zijn gekomen dan het overschrijven van de getallen. Een derde tweetal heeft de lengtes slechts op volgorde gezet, wat als grafiek een weinig zeggende rechte lijn oplevert (Afb. 4). Van de overige groepjes hebben er drie een grafiek getekend met de lengte op een van de assen, zoals die van afbeelding 5; verticaal staan de lengtematen, horizontaal staan de kinderen op volgorde van groot naar klein.

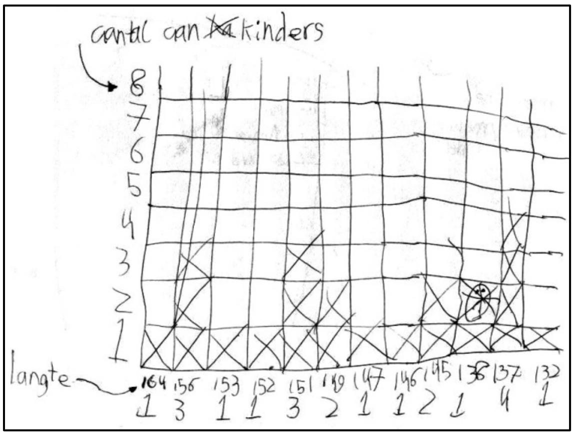


Afb. 4. De lengtes op volgorde.

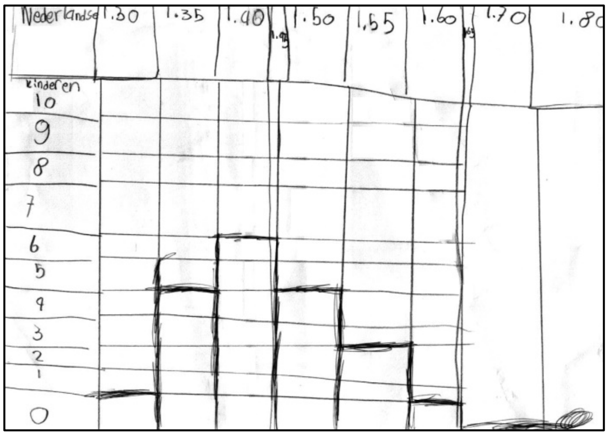


Afb. 5. Anders op volgorde.

Twee groepjes tekenden een frequentiegrafiek (Afb. 6 en 7). Verticaal staat hoe vaak een bepaalde lengte voorkomt. Tussen de grafieken in afbeelding 6 en 7 zit een interessant verschil. In die van afbeelding 6 staan alle voorkomende lengtes op de horizontale as, maar in afbeelding 7 zijn in elke kolom steeds vijf waarden samen genomen: lengte van 1,30 tot 1,35, van 1,35 tot 1,40, enzovoort. De categorieën 1,45 tot 1,50 en 1,65 tot 1,70 hadden de leerlingen blijkbaar eerst overgeslagen. Ze zijn er later - heel smal - tussengevoegd.



Afb. 6. Een frequentiegrafiek.



Afb. 7. Een frequentiegrafiek met categorieën.

Hoeveel centimeter groter?

Na de presentaties zet de leerkracht de volgende vragen op het digibord:

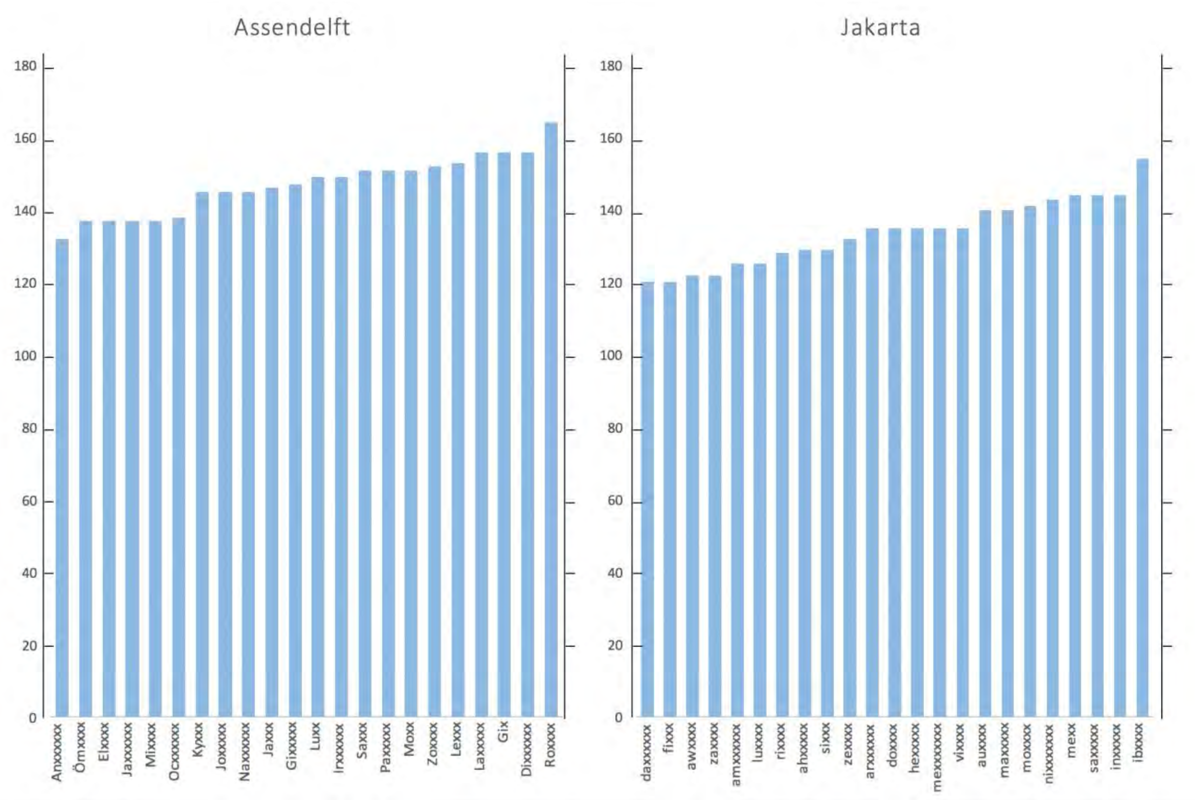
- *Weten we nu of de Indonesische kinderen kleiner zijn? En hoeveel centimeter zijn ze kleiner?*
- *Zou je dat eigenlijk wel kunnen zeggen?*
- *En hoe bereken je het?*

Ze geeft elk groepje een werkblad met de grafieken uit afbeelding 8. Daarbij krijgen de leerlingen een stukje doorzichtig plastic met een lijn erop dat ze kunnen gebruiken als een doorzichtige liniaal.

Terwijl de leerlingen bezig zijn blijkt een groepje van drie meisjes het verschil te willen bepalen aan de hand van de middelste kinderen van elke groep. Een van hen is Lonneke die de vorige dag al de term *het gemiddelde* had genoemd, maar dat omschreef als *dat je ongeveer een beetje in het midden zit van de lengtes*. De grafiek van de eigen klas leidt tot discussie, want daar zijn twee middelste kinderen, met een klein verschil in lengte.

In de nabespreking komen twee aanpakken aan de orde. De eerste is van Najib en Maarten die steeds het verschil zijn gaan berekenen tussen een Nederlands en een Indonesisch kind en uit die verzameling getallen concludeerden dat het verschil ongeveer tien tot vijftien centimeter is.

Najib: *Wij waren nog niet klaar, maar - we gingen het de hele tijd ongeveer uitrekenen, we waren de hele tijd bij twaalf, zeventien, vijftien, twaalf, dertien, zeventien, en als je dat samen bij elkaar doet heb je ongeveer* *tien centimeter en vijftien centimeter. Dus wij zijn ongeveer tien centimeter of vijftien centimeter per kind groter*.



Afb. 8. De grafieken op het werkblad.

De andere aanpak wordt verwoord door Mounir die de twee middelste kinderen heeft vergeleken:

Mounir: *Ik heb net opgemeten hoeveel het bij de middelste is en daar heb je het .. daar bij de middelste, hou maar bij de 1,51. En dat heb je ook bij Jakarta, heb je ook de middelste en daar zit het ook, dus wij zijn eigenlijk 15 centimeter en zo groter.*

Leerkracht: *Jij hebt de middelste opgemeten, mooi. Kun je ook uitleggen waarom?*

Mounir: *Daar zie je echt de gewone kinderen, en van hun, want hier zie je de kleinste en de grootste, maar in de middelste zie je gewone kinderen en daar zitten, zaten eh ....*

Leerkracht: *De meeste zitten in de buurt van het midden*.

Mounir: *Ja*.

Lonneke legt namens de groep van drie meisjes uit dat zij ook de middelsten hebben gemeten en het verschil is volgens hen acht centimeter.
De leerkracht rondt hierna de les af en benadrukt daarbij dat het handig is om naar de getallen in het midden te kijken. Je kunt alle getallen bij elkaar optellen en dan delen door het aantal kinderen, maar je kunt ook alleen de middelste kinderen vergelijken.

Over de lessen

De lessen waren bedoeld om leerlingen de verdeling van lengtes te laten onderzoeken en om hen te laten nadenken over manieren om verschillen zichtbaar te maken, zowel de verschillen tussen de twee klassen als de variatie binnen een klas. Dat zichtbaar maken kan met een grafiek, maar ook door de verdeling met getallen te beschrijven. De lessen lijken op deze punten voor een groot deel van de leerlingen geslaagd:

- Alle kinderen legden de kaartjes op volgorde omdat ze beseften dat dat overzicht gaf. De groepjes die de kaartjes van beide klassen als een geheel ordenden, konden de vraag of de Nederlandse kinderen groter waren overtuigend beantwoorden, want de kleuren lieten zien dat de Indonesische kinderen vooral aan de 'lage' kant zaten.
- De leerlingen keken bij het vergelijken van de twee klassen niet alleen naar de grootste en kleinste kinderen, maar ook naar de kinderen in het middengedeelte.
- De kwaliteit van de getekende grafieken was wisselend; niet alle groepjes leerlingen kwamen met een grafiek die die de verschillen zichtbaar maakte. Er werden echter ook twee soorten grafieken getekend die dat wel doen, een grafiek met de lengtes op een van de assen en een grafiek van de frequentie van die lengtes.

Oorspronkelijk was het werken met de kaartjes vooral bedoeld als een introductie op het vergelijken van de grafieken. Bij de eerste *try-out* bleek echter dat de taak op zich ook heel nuttig was, omdat deze de leerlingen dwong te zoeken naar manieren om de gegevens te ordenen. Ook bleek dat de vraag naar het verschil tussen de klassen in feite al vanuit de kaartjes te beantwoorden was.
Het tekenen van een grafiek was in eerste instantie behoorlijk lastig voor de leerlingen; ze hadden blijkbaar geen duidelijk beeld van wat een zinvolle grafiek zou kunnen zijn. Nadat de leerkracht het woord grafiek genoemd had, tekenden de leerlingen echter toch de twee soorten grafieken waarop we gehoopt hadden: een grafiek van de lengtes en een grafiek van de frequentie van die lengtes. In deze twee verkennende lessen is de leerkracht niet diep ingegaan op de getekende grafieken en op de verschillen ertussen. Ze zouden echter een goed uitgangspunt bieden voor vervolglessen. Een van de discussiepunten zou dan zijn of het belangrijk is hoe je de as met de lengtes indeelt. Je kunt de gevonden waarden simpelweg op volgorde zetten – zoals in afbeelding 4 en 6 – maar een grafiek zegt veel meer als de as de verhoudingen weergeeft. Dat kan door tussen bijvoorbeeld 132 en 137 ruimte over te laten voor de tussenliggende waarden, of door lengtes samen te nemen in even grote categorieën.
We hebben lang nagedacht over welke vraag het meest geschikt was om de behoefte op te roepen aan een, voor elke klas typerend getal. De opdracht om het verschil tussen de twee klassen te kwantificeren werkte goed, in ieder geval voor een deel van de leerlingen.

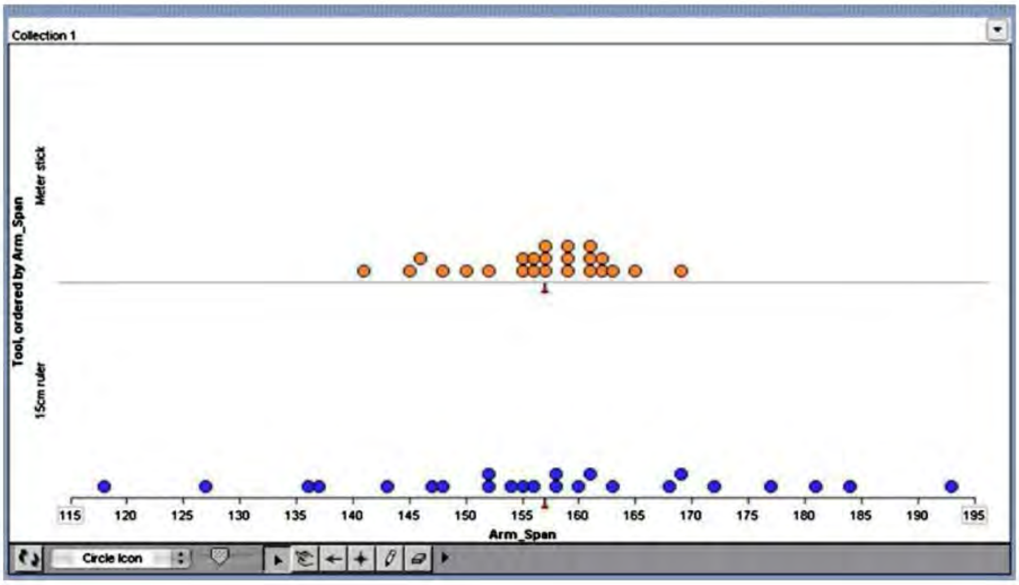
De leerlingen kozen als typerend getal een waarde in het midden van de verdeling, wat laat zien dat kinderen in zo'n situatie intuïtief in de richting van een mediaan denken. Het rekenkundig gemiddelde was in eerdere lessen wel eens aan de orde geweest, maar werd door geen van de leerlingen genoemd. Wij denken dat de mediaan als centrummaat minstens dezelfde plek verdient in het onderwijs als het rekenkundig gemiddelde. De mediaan is concreter, omdat leerlingen kunnen zoeken naar specifieke gevallen die als het ware de hele groep representeren. Het rekenkundig gemiddelde compenseert hoge waarden met lage waarden, maar dat doet de mediaan ook en wel zonder dat er gerekend hoeft te worden. In de praktijk liggen mediaan en gemiddelde doorgaans vlak bij elkaar.

In deze verkennende lessen bleef het redeneren van de leerlingen nog heel informeel en intuïtief en de conclusies van sommige groepjes werden zeker nog niet door alle leerlingen gedeeld. Vervolglessen zouden nodig zijn om het nut van een bepaalde aanpak duidelijker te krijgen en om dit informele denken en redeneren naar een meer formeel niveau van meer vaste procedures te begeleiden.

Herhaald meten als context

Wij kozen voor deze les over verdelingen voor de situatie van het vergelijken van twee groepen. Een andere ingang is herhaald meten (Petrosino, Lehrer, & Schauble, 2003; Lehrer, Kim en Jones, 2011). Metingen hebben altijd een bepaalde mate van onnauwkeurigheid; als een grote mate van precisie wordt gevraagd zal een tweede of derde meting een iets andere waarde geven. Wanneer veel metingen worden gedaan levert dat een verdeling op waarbij de meeste meetwaarden rond de werkelijke waarde liggen, terwijl een klein aantal er ver boven of onder ligt. Centrummaten kunnen binnen een meetcontext worden geïnterpreteerd als indicatoren voor de werkelijke waarde, en spreiding kan worden gezien als de ruis die het meetproces van nature met zich meebrengt.
Een concrete opdracht in de context van herhaald meten is om bij iemand die met gestrekte armen staat de afstand van vingertop tot vingertop te meten. Dat doen leerlingen bijvoorbeeld eerst met een liniaal die maar vijftien centimeter lang is en daarna met een bordliniaal van een meter. Het moeten verplaatsen van de liniaal zorgt voor ruis en de meetresultaten zullen dus nogal uiteenlopen. Als alle leerlingen een keer gemeten hebben worden de metingen geplot (Afb. 9). Lehrer, Kim en Jones (2011) gebruikten hier het programma Tinkerplots voor. De opdracht aan de leerlingen was om een procedure te bedenken die een zo goed mogelijke schatting op zou leveren voor de werkelijke spanwijdte. Ook werd hen gevraagd om een maat te bedenken voor spreiding. Binnen de context van het meten met die twee verschillende linialen was voor de leerlingen duidelijk dat het meten met het kleine liniaaltje een veel grotere spreiding opleverde.
Volgens Lehrer en Schauble (2004) is de ingang via herhaald meten voor leerlingen eenvoudiger dan de ingang via natuurlijke variatie. Dat is deels omdat centrummaten en spreidingsmaten geen duidelijke tegenhanger hebben in de concrete wereld (wat

betekent het dat een plant *gemiddeld* is?) en deels omdat leerlingen moeten gaan redeneren over populaties in plaats van over organismen. In de geschiedenis van de statistiek kwamen centrummaten ook eerder naar voren in het redeneren over meetprocessen dan in het denken over natuurlijke variatie.



Afb. 9. De geplotte metingen.

Bakker (2004) deed onderzoek naar statistiek in de eerste en tweede klas van het voortgezet onderwijs. Hij liet zien dat de context van de levensduur van batterijen - een context in de sfeer van natuurlijke variatie - een goede ingang is voor het leren redeneren over verdelingen. Onze context van lengtemetingen ligt dicht bij die context en leidde tot de redeneringen waarop we hoopten. Wij denken dat lessen rond herhaald meten en lessen rond de variatie binnen groepen elkaar goed kunnen aanvullen.

Inzet van de computer

In ons verkennende onderzoek hebben we er bewust van afgezien om leerlingen zelf met een computerprogramma te laten werken. Bij vervolglessen zou daar echter niet aan te ontkomen zijn. Statistiek gaat altijd over grote aantallen gegevens en de computer is bij uitstek geschikt voor het ordenen en representeren daarvan. Bovendien biedt een computerprogramma in principe veel flexibiliteit; dezelfde dataset kan op verschillende manieren worden weergegeven.
Binnen het onderwijs is er behoefte aan computerprogramma's die aansluiten bij het niveau waarop leerlingen over verdelingen kunnen redeneren. Cobb, McClain en Gravemeijer (2003) en Bakker (2004) gebruikten de *minitools* die op www.wisweb.nl te vinden zijn. Dit zijn echter java-applets die inmiddels op veel computers niet meer gebruikt kunnen worden. Als we inderdaad aandacht willen besteden aan statistiek op de basisschool dan lijkt het gewenst dat er een nieuwe versie komt van deze programma's. Een alternatief is het Amerikaanse 'Tinkerplots' (Konold & Miller,

2005). Het bezwaar van dat programma is dat het ontworpen is voor leerlingen van basisschoolleeftijd tot en met studenten in het hoger onderwijs, wat betekent dat jonge leerlingen makkelijk verdwalen in alle opties die open staan.

Andere doelen

Als wij pleiten voor statistiek in het basisonderwijs bedoelen we niet dat een nieuw vak zou moeten worden ingevoerd. Het gemiddelde en grafieken horen immers al tot de basisschoolstof. Wel pleiten wij voor een andere benadering en voor andere doelen. Het gemiddelde zou niet een door de leerkracht ingebrachte rekenprocedure moeten zijn, maar voor de leerlingen moeten voortkomen uit het onderzoeken van verdelingen. Het is logisch dat dan ook de mediaan aan de orde zal komen, waarschijnlijk zelfs als voorloper van het rekenkundig gemiddelde. Het onderwijs over grafieken zou zich niet louter moeten richten op het leren aflezen van kant en klare grafieken, maar ook op het zelf bedenken en tekenen van grafieken, omdat dat pas maakt dat leerlingen de onderliggende principes gaan begrijpen.

De activiteiten die in dit hoofdstuk beschreven werden, blijken leerlingen te activeren tot een andere manier van denken en discussiëren over centrummaten en grafieken. In de beschreven lessen bleef het redeneren nog op een concreet, informeel niveau. Leerkrachten kunnen leerlingen helpen om hun informeel wiskundig denken, en de daarbij horende taal te ontwikkelen naar een meer formeel niveau.

In ons pleidooi voor statistiek op de basisschool gaat het ons niet om een betere voorbereiding op het vak statistiek in het voortgezet onderwijs, een vak dat niet alle leerlingen krijgen. Wij pleiten voor het zoeken naar een vorm van *statistiek voor iedereen*.

Literatuur

Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education: On symbolizing and computer tools*. Utrecht: CD-ß Press.

Cobb, P., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2003). Learning about statistical covariation. *Cognition and instruction, 21*(1), 1-78.

Konold, C., & Miller, C. D. (2005). *TinkerPlots: Dynamic data exploration*. [Computer software] Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Lehrer, R., Kim, M. J., & Jones, R. S. (2011). Developing conceptions of statistics by designing measures of distribution. *The international journal on mathematics education, 43*(5), 723-736.

Lehrer, R., & Schauble, L. (2004). Modeling natural variation through distribution. *American Educational Research Journal, 41*(3), 635-679.

Petrosino, A. J., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Structuring error and experimental variation as distribution in the fourth grade. *Mathematical thinking and learning, 5*(2-3), 131-156.

Greep op grafieken

Carolien Duijzer, Marja van den Heuvel-Panhuizen, Michiel Veldhuis & Michiel Doorman,
Universiteit Utrecht: Freudenthal Group, Faculteit Sociale Wetenschappen
& Freudenthal Instituut, Faculteit Bètawetenschappen

Inleiding

Grafieken zijn krachtige middelen om gegevens op overzichtelijke wijze weer te geven. We komen ze dan ook veelvuldig tegen in tijdschriften en andere media. Grafieken zijn echter niet altijd even gemakkelijk te interpreteren. Dit geldt zowel voor kinderen als voor volwassenen. Met name grafieken waarin veranderingen in de tijd zijn afgebeeld, zoals bewegingen, vragen om het nodige inzicht. Het zelf met het lichaam ervaren hoe deze grafieken ontstaan en aangepast kunnen worden, lijkt een kansrijke aanpak om het begrijpen van grafieken al bij basisschoolleerlingen te bevorderen. In Beyond Flatland, een door NRO gefinancierd onderzoeksproject, gaan we dit verder onderzoeken. Leerlingen werken hierbij met bewegingssensoren waarmee ze zelf grafieken kunnen construeren. Onze eerste ervaringen binnen dit project, lees je in dit hoofdstuk.

We kunnen geen krant openslaan of we worden wel met een grafiek geconfronteerd. Grafieken kunnen ons informeren over allerhande zaken, bijvoorbeeld het weer, de beursindex, of over de meest recente sportuitslagen. Veel grafieken geven de relatie weer tussen veranderende grootheden 'over tijd'. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de verandering in temperatuur gedurende een bepaalde periode. Begrijpen hoe dergelijke grafieken van veranderende grootheden over tijd in elkaar zitten lukt het best wanneer je deze zelf construeert. In dit hoofdstuk beschrijven we een aantal voorbeelden van taken waarbij kinderen kennismaken met grafieken die ze zelf creëren doordat een bewegingssensor hun bewegingen oppikt. De kinderen hebben aan de taken gewerkt tijdens het Weekend van de Wetenschap in het Universiteitsmuseum van de Universiteit Utrecht .

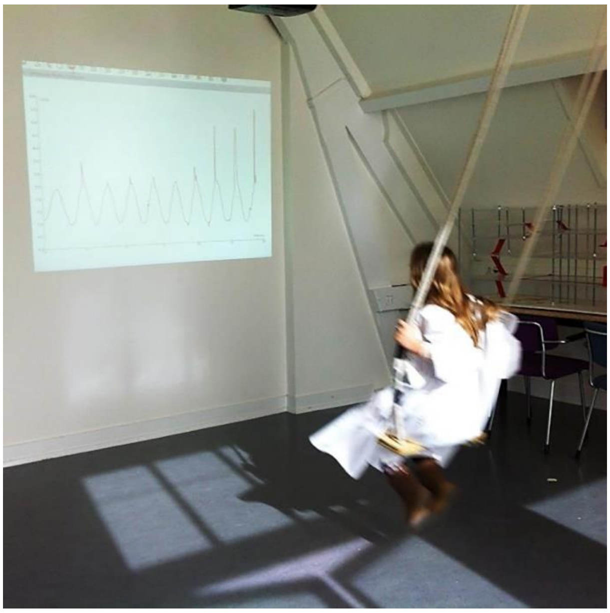
Grafieken maken

Opdrachten waarbij leerlingen zelf grafieken maken, zijn niet vaak te vinden in de reken-wiskundemethodes van het basisonderwijs. Als het over grafieken gaat, ligt de focus meestal op het interpreteren van gegeven grafieken. Het komt dus nauwelijks voor dat kinderen zelf actief aan de slag gaan. Toch is met de nu beschikbare technologie al veel mogelijk. Door gebruik te maken van bewegingssensoren kun je kinderen door te bewegen een grafiek laten maken. Software zorgt er dan voor dat een beweging in *real-time* naar een grafische representatie wordt omgezet. De zo gemaakte grafiek kun je via een beamer of met behulp van het digibord op de muur projecteren. Op deze manier kunnen kinderen een verbinding gaan leggen tussen de door henzelf gemaakte beweging en de vorm van de grafiek (Afb. 1).

Afb. 1. Het leggen van een verbinding tussen beweging en grafiek.

Bij de taken en de sensor die wij hebben gebruikt is deze grafiek een tijd-afstand grafiek met de tijd (in seconden) op de x-as en de afstand tot de sensor (in meters) op de y-as. Het is dan aan de kinderen om te ontdekken welke aspecten van hun bewegingen nu precies zorgen voor veranderingen in de grafiek. Dit kunnen ze bijvoorbeeld uitvogelen door zoveel mogelijk in hun bewegingen te variëren. Een andere beweging geeft namelijk een andere grafiek. Door deze ervaringen leren de kinderen dat in de grafiek het verloop van de afstand over de tijd is af te lezen. Door hierover te redeneren kunnen de kinderen verbanden gaan zien tussen hun eigen bewegingen en de representatie daarvan in de grafiek. Het zien van dergelijke verbanden en hierover bepaalde verwachtingen kunnen opstellen, kunnen we voor kinderen van de basisschool beschouwen als een hogere-orde denkvaardigheid. De ontwikkeling van dit hogere-orde denken wordt gestimuleerd door de sensomotorische ervaringen van de kinderen. De kennis die zo ontstaat is belichaamde kennis. We denken dat deze kennis cruciaal is voor het ontwikkelen van nieuwe, fundamentele concepten. Door de kennis over grafieken al vroeg in het onderwijs te introduceren wordt een stevige basis gelegd voor later.

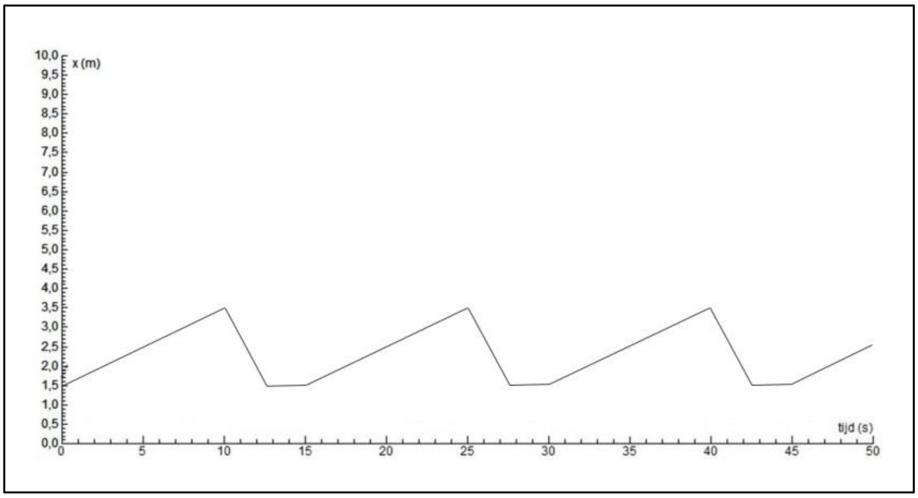
Bewegingen representeren in dynamische grafieken



Afb. 2. Sophie schommelt een grafiek.

Bij de eerste taak die we voor het Weekend van de Wetenschap bedacht hebben, mogen de kinderen gaan schommelen. Op afbeelding 2 is Sophie van tien jaar oud een grafiek aan het schommelen. Bepaalde aspecten van de schommelbewegingen worden opgepikt door de sensor en zijn terug te zien in de grafiek.

Vervolgens gaan de kinderen voor de sensor heen en weer lopen en rennen. Hierbij worden de verschillen en overeenkomsten tussen de grafische representaties van de schommelbeweging en de loopbeweging meer inzichtelijk. Een nieuwe uitdaging is vervolgens het lopen van een op een geplastificeerde kaart gegeven grafiek (Afb. 3). Essentieel bij deze taak is dat kinderen doorkrijgen dat ze, om de stijgende en dalende lijnen in de grafiek te kunnen reproduceren, moeten variëren in de snelheid en richting van hun bewegingen.



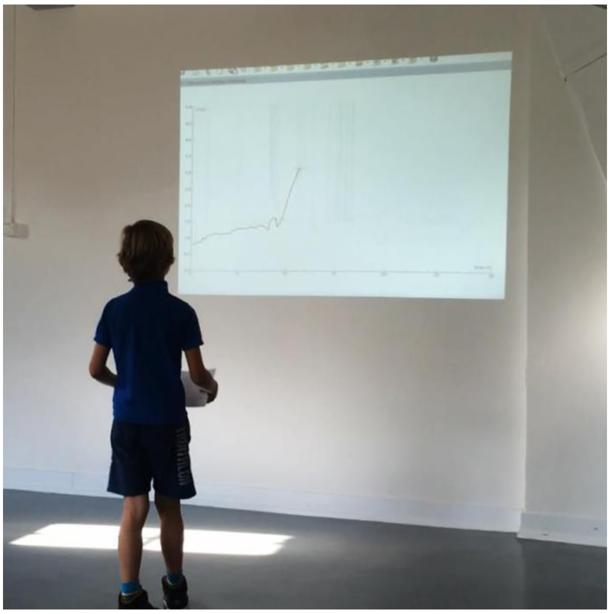
Afb. 3. Een grafiek die de kinderen gaan lopen.

In het hiernavolgende fragment loopt Bas, zes jaar oud, de grafiek van afbeelding 3. Hierbij ontstaat het volgende gesprek met de onderzoeker:

Onderzoeker:	*Kun je de grafiek omhoog laten gaan? Hogere heuvels maken?*
Bas:	*Als ik spring?*
Onderzoeker:	*Oke, laat maar zien.*
Bas:	Bas springt herhaaldelijk op en neer. Er gebeurt niets opvallends in de grafiek. De lijn gaat een beetje omhoog, en weer naar beneden, maar het worden geen hoge heuvels, zoals in het voorbeeld. Bas kijkt vragend achterom naar de onderzoeker.
Onderzoeker:	*Dat klopt niet he? Hij gaat niet omhoog*.
Bas:	Bas schudt nee met zijn hoofd.
Onderzoeker:	*En loop nu eens naar voren*.
Bas:	Bas loopt naar voren, de lijn gaat omhoog (Afb. 4).
Onderzoeker:	*En weer naar achter*.
Bas:	Bas loopt naar achter, de lijn gaat naar beneden. Bas loopt opnieuw naar voren, de lijn gaat omhoog. Bas loopt opnieuw naar achter, de lijn gaat naar beneden. Bas kijkt naar de onderzoeker. Gaat dan verder waar hij gebleven was, hij kijkt naar het voorbeeld, loopt naar voren en dan met een sprongetje iets sneller naar achter. Hij herhaalt deze actie twee keer, tot de tijd op is.

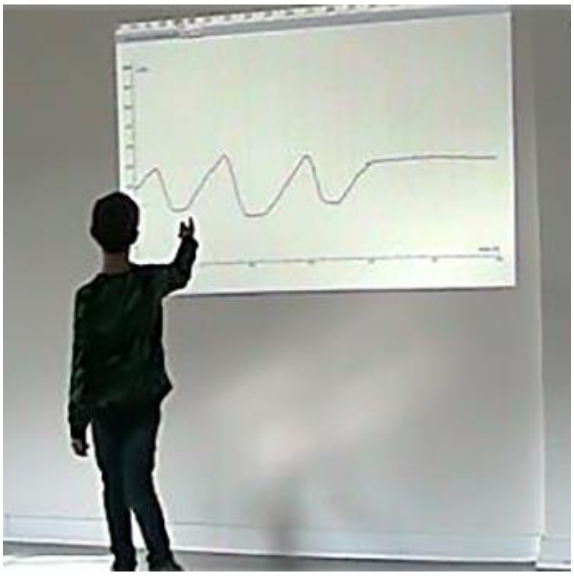
Verband leggen tussen beweging en grafiek

Hier zien we dat Bas moeite heeft met het idee dat naar voren lopen de gewenste verandering in de grafiek teweeg zal brengen, namelijk dat de lijn omhoog zal gaan (de afstand tot de sensor wordt groter). Door te springen in plaats van naar voren te lopen, laat Bas zien dat hij de grafiek in eerste instantie interpreteert als beschrijving van zijn eigen beweging. Bas denkt waarschijnlijk dat als hij zelf omhoog gaat de grafiek ook omhoog gaat. Het verwarrende is dat de gemaakte grafiek wel iets van heuvels laat zien – doordat zijn sprongen niet precies verticaal zijn registreert de sensor kleine bewegingen – maar geen hoge heuvels. Wanneer de onderzoeker Bas middels een aantal aanwijzingen een andere richting instuurt, zien we dat hij eigenlijk toch wel heel goed raad weet met deze situatie. Niet alleen loopt hij sneller naar achter dan naar voren (variatie in snelheid is essentieel voor het lopen van deze grafiek), hij herhaalt dit een aantal keer. Zo zien we dat Bas opeens een verband legt tussen zijn bewegingen en de representatie van zijn bewegingen in de grafiek. Dat kinderen hun bevindingen ook onder woorden kunnen brengen, is terug te zien in het volgende fragment waar de iets oudere Timon, tien jaar oud, aan de taak werkt.



Afb. 4. Bas loopt naar voren, de lijn gaat omhoog.

Timon:	Timon houdt de kaart stevig vast voor zijn neus, en loopt de grafiek door naar voren te lopen en vervolgens iets sneller naar achter. Na drie van dergelijke heuvels gemaakt te hebben blijft Timon stilstaan (dit is de rechte lijn in de grafiek, zie Afb. 5). *Ik ben klaar*.
Onderzoeker:	*Mag je gewoon doorgaan*.
Timon:	Timon doet niets.
Onderzoeker:	*Heb je niets meer te doen?*
Timon:	*Er zijn er niet meer.* Timon wijst naar het voorbeeld in zijn hand.
Onderzoeker:	*O, ze zijn op? Oké, als we deze* (laat het voorbeeld zien) *er nu eens naast houden, wat zou je nog anders kunnen doen?* Onderzoeker loopt met Timon naar de projectie op de muur en houdt het voorbeeld naast de zojuist geprojecteerde grafiek.
Timon:	Timon wijst naar de stijgende lijn van de tweede heuvel. *Ja…ik zou deze nog schuiner kunnen maken.*
Onderzoeker:	*Nog schuiner kunnen maken?*
Timon:	*Ja.*
Onderzoeker:	*Oké, dan mag je dat eens proberen.*
Timon:	Timon loopt langzaam naar voren, en snel naar achter. Hij herhaalt dit opnieuw drie keer, tot de tijd op is (Afb. 6).



Afb. 5. Timon en grafiek 1.

Afb. 6. Timon en grafiek 2.

Bij Timon zien we nog duidelijker dan bij Bas hoe kinderen in staat zijn om een verband te leggen tussen de eigen bewegingen en de daaruit voortvloeiende grafische representaties. De gecontroleerde bewegingen van Timon (langzaam naar voren lopen en sneller naar achter) zijn al in zijn eerste poging zichtbaar. Dat dit nog extremer kan, laat hij tijdens zijn tweede poging zien.

Reflecteren en beredeneren

Hieruit blijkt dat Timon weet welke aspecten van zijn bewegingen hij moet aanpassen, om de gewenste uitkomst in de grafiek te verkrijgen. Hij moet nog langzamer lopen. Timon is hier bezig met het interpreteren van de grafische representatie en formuleert op basis daarvan een bepaalde verwachting. Deze verwachting kan hij vervolgens toetsen door de grafiek nogmaals te lopen. De redenering van Timon getuigt van een hoger denkniveau dan wat Bas laat zien. Het denken van Timon gaat dieper dan de een-op-een vertaling van een beweging naar een grafiek. Timon is hier bezig met het leggen van verbanden en het opstellen en toetsen van verwachtingen; aspecten die onlosmakelijk verbonden zijn met hogere-orde denken. Echter, de manier waarop hij dit onder woorden brengt klinkt misschien nog wat onbeholpen. Toch kunnen we uit zijn acties opmaken dat hij met *schuiner* ook daadwerkelijk een flauwere helling bedoelt.

Bovenstaande voorbeelden laten zien dat kinderen in staat zijn om een verbinding te maken tussen hun eigen beweging en de vorm van de grafiek, maar ook tussen de veranderende grootheden op de x-as en de y-as, die respectievelijk de tijd en de afstand tot de sensor weergeven. Dit komt onder andere tot uitdrukking in het aanpassen van de loopsnelheid. Om een flauw stijgende lijn te maken moeten Bas en Timon langzaam van de sensor vandaan lopen. De sterk dalende lijn vraagt juist om een tegenovergestelde actie. Zo zijn Bas en Timon met hun lichaam betrokken bij weer een ander aspect van beweging, namelijk dat van snelheid. In dit opzicht dragen de sensomotorische acties van Bas en Timon bij aan het maken van de grafieken en aan het leggen van verbanden tussen de gemeten grootheid (hier: afstand), de mate van verandering (hier: snelheid) en de vorm van de grafiek (hier: schuiner).

Ontluikend begrip over het maken van grafieken

In dit hoofdstuk hebben we laten zien hoe door het zelf construeren van grafieken kinderen na gaan denken over wat de verschillende aspecten in de grafiek nu eigenlijk betekenen. De sensomotorische acties van de kinderen vormen hierin het uitgangspunt. Door vragen te stellen over de grafische representaties kregen we meer inzicht in hoe deze kinderen verbanden leggen tussen hun bewegingen en de bijbehorende veranderingen in de grafiek. Hierdoor krijgen we niet alleen meer inzicht in hoe kinderen redeneren over grafieken, maar ook hoe het begrip ervan bevorderd kan worden. Zo zien we onder andere dat kinderen op verschillende manieren reageren op de door henzelf gecreëerde grafieken en op verschillende niveaus redeneren over de grafische representaties. De ervaringen die we met de taken bij het Weekend van de Wetenschap hebben opgedaan laten duidelijk zien dat kinderen al complexe grafische representaties van dynamische data aankunnen en zo hogere-orde denkvaardigheden tentoonspreiden.

Lieggrafieken helpen grafieken doordenken

Ronald Keijzer, Fokke Munk, Hogeschool iPabo, & Barbarella Janus,
Brede School Rembrandt, Amstelveen

Lieggrafieken

Kinderen komen regelmatig in aanraking met grafieken. Dat gebeurt binnen de school, maar vooral ook daarbuiten. Als ze grafieken tegenkomen buiten de deuren van de school, gaat het om grafieken waarin de ontwerper van de grafiek geprobeerd heeft informatie over een aspect van de maatschappij grafisch kort en bondig in beeld te brengen. In het basisonderwijs leren kinderen om dergelijke grafieken te lezen. Ze leren ook betekenis te geven aan informatie die in de grafiek is weergegeven. Dit vraagt naast kunnen aflezen ook kennis en begrip over de manier waarop deze grafische vorm is opgebouwd. Ze leren daarom ook om het ontwerp van de grafiek kritisch te beschouwen. Het gebeurt maar al te vaak dat de ontwerper probeert de opgeslagen informatie iets mooier of iets slechter voor te stellen dan die in werkelijkheid is. De grafiek in afbeelding 1 is hiervan een voorbeeld. Hier probeert de maker van de grafiek het verschil, oftewel de korting groter voor te stellen dan dat deze is, door het onderste stuk van de verticale as weg te laten.

Afb. 1 Een misleidende grafiek.

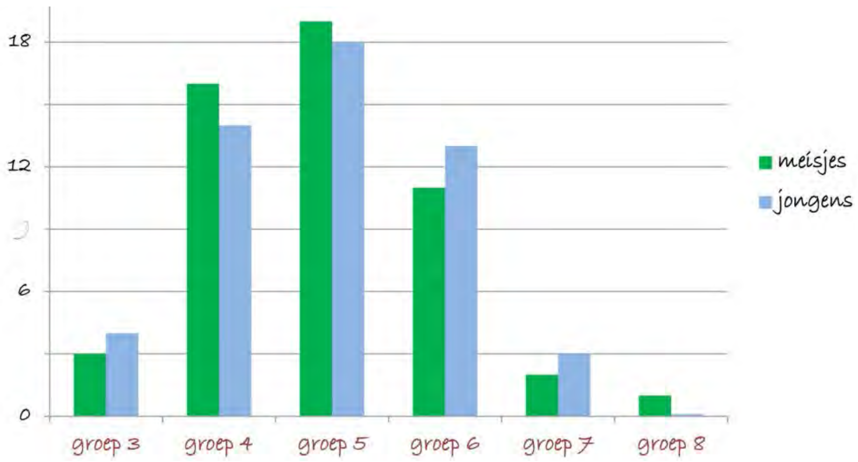
Grafieken die zo gemaakt zijn dat de informatie iets anders lijkt weer te geven dan die is, noemen we lieggrafieken. Het gaat daarbij om grafieken die zo gemanipuleerd zijn dat de waarheid erg veel geweld is aangedaan. Het gaat dan om grafieken met de juiste gegevens en een correcte presentatie ervan. Maar met die presentatie is wel iets aan de hand. Die is zo gekozen dat de argeloze lezer van de grafiek toch op het verkeerde been wordt gezet. En omdat dat steeds meer gebeurt, is het goed leerlingen hiertegen te wapenen.

Eenwieler

De leerlingen in groep 7 van de Brede school Rembrandt in Amstelveen krijgen vandaag les van de rekencoördinator van de school, Barbarella. Zij wil op een speciale manier met hen van gedachten wisselen over hun ervaringen in het reken-wiskundeonderwijs. Juf Astrid, de juf van groep 7, is door Barbarella de klas uitgestuurd: *Ga maar even koffie drinken, we roepen je wel als we klaar zijn.* Juf Astrid zit in het complot en speelt het spel mee. Als ze weg is vertelt Barbarella: *We gaan de juf een beetje voor de gek houden vandaag.* De klas laat merken daaraan graag te willen meewerken.

Barbarella vertelt dat de leerlingen vandaag een bijzondere grafiek gaan maken, namelijk een lieggrafiek. Omdat de leerlingen dat nog nooit gedaan hebben, kijkt Barbarella met de klas eerst naar een gewone staafgrafiek over eenwielers (Afb. 2).

Ze bespreekt de grafiek met de leerlingen, door samen te kijken naar de weergegeven informatie. De leerlingen laten merken dat ze goed begrijpen wat de maker van de grafiek wil aangeven. Een van hen meldt: *De jongens van groep 3 hebben er drie, juf*. Een ander geeft aan: *De jongens hebben in drie klassen meer eenwielers, groep 6, groep 3 en groep 7.* Ook zien de leerlingen dat de populariteit van eenwielers groot is in groep 4, 5 en 6. Dat herkennen ze ook wel een beetje. In groep 7 ben je hier eigenlijk een beetje te groot voor.



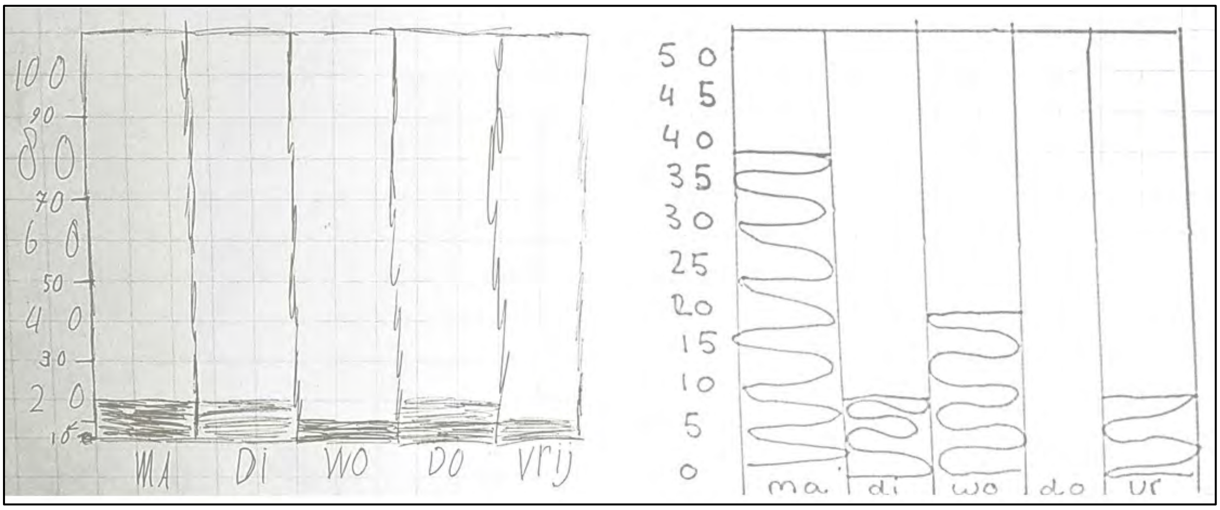
Afbeelding 2: Aanleiding om te praten over een grafiek.

Als blijkt dat iedereen goed begrijpt wat de eenwielergrafiek wil zeggen, zet Barbarella met de leerlingen een stap in de richting van een lieggrafiek: *We gaan nu de grafiek een beetje veranderen. Dat doen we zo dat de gegevens hetzelfde blijven, maar dat het beeld iets anders vertelt.* Barbarella vertelt de leerlingen dat je een dergelijke grafiek een lieggrafiek noemt en vraagt de leerlingen te bedenken hoe ze van de grafiek een lieggrafiek kunnen maken: *Wat zou je kunnen veranderen om het beeld van de grafiek anders te laten lijken?*
Dat blijkt geen makkelijke vraag voor de leerlingen. Hugo suggereert dat je de staven breder kunt maken. Thijs vult aan: *Dan lijkt het alsof kinderen veel meer eenwielers hebben, maar het zijn er evenveel*. Barbarella vervormt de grafiek op het digibord zo dat de staven veel breder worden. De leerlingen zijn het er over eens dat het zo lijkt dat het om veel meer eenwielers gaat.

Zelf maken

Na deze eerste kennismaking met een lieggrafiek, gaan de leerlingen er zelf een maken. er moet eerst een gewone grafiek gemaakt worden om daarna deze te vervormen. Barbarella vertelt waar de grafiek over moet gaan: *Je gaat in tweetallen een grafiek maken die laat zien hoeveel rekenwerk je iedere dag van de week moet maken.* Ze vertelt dat dat eerst een eerlijke grafiek moet zijn en dat ze daarna moeten bedenken hoe je de grafiek zo kunt veranderen dat het een lieggrafiek wordt: *De lieggrafiek moet in beeld brengen dat je veel te veel opgaven in een week moet maken.*

De leerlingen gaan gelijk aan de slag. Ze willen graag zichtbaar maken dat ze veel te veel moeten werken tijdens de rekenlessen. Ze pakken hun rekenboek en gaan daarin na welke opgaven er de afgelopen week gemaakt zijn. Dat leidt al snel tot enige verwarring, want tel je iedere losse opgave of tel je de opgavennummers. De keuze voor het meetellen van iedere afzonderlijke opgave is snel gemaakt want de opgavenummers in het boek bevatten meestal een rijtje van tenminste vijf aparte opgaven. Dat laatste kies je natuurlijk als de grafiek moet laten zien dat er wel heel veel opgaven worden gemaakt. Als de leerlingen zijn uitgeteld inventariseert Barbarella de aantallen en noteert ze op het bord. Met deze getallen mogen de kinderen de grafieken maken, voor iedere dag in de week een staaf, waarbij de leerlingen goed zichtbaar maken dat ze niet allemaal iedere dag evenveel doen. Zo laat Sarah in haar grafiek zien dat ze het maken van opgaven over de week spreidt, terwijl uit Fleur’s grafiek naar voren komt dat zij vooral maandag, dinsdag en woensdag actief is (Afb. 3).



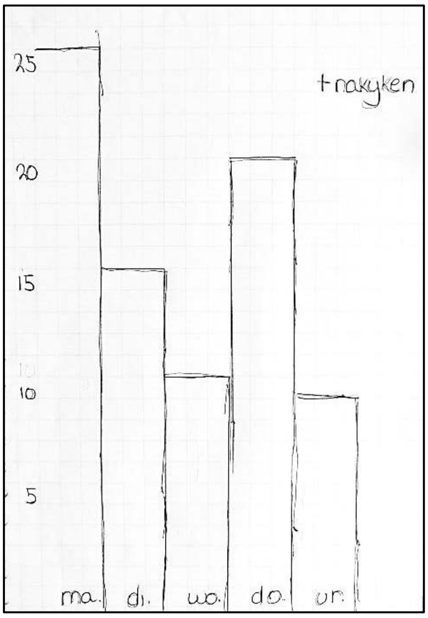
Afb. 3: Grafiek van Sarah (links) en van Fleur (rechts).

Heroverwegen

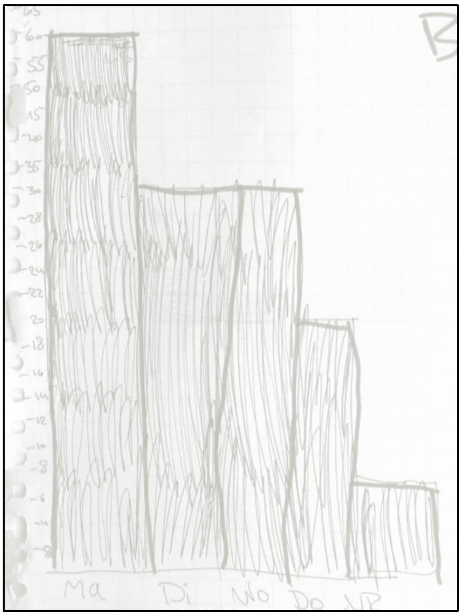
Hoewel het om een redelijk gesloten opdracht gaat, ontstaan er zeer verschillende staafdiagrammen. Deze verschillen hebben te maken met hoe de leerlingen het maken van opgaven over de week spreiden, maar ook met de keuze van de getallen op de verticale as. Die zijn vaak zo gekozen dat de grafiek inderdaad geen lieggrafiek is. Barbarella bespreekt de grafiek van Sarah met de rest van de groep: *Sarah heeft eigenlijk een heel eerlijke grafiek gemaakt, want zo lijkt het helemaal niet dat zij veel opgaven heeft gemaakt. Hoe zouden we Sarah kunnen helpen hier een lieggrafiek van te maken?*

Julia heeft wel een antwoord op deze vraag: *Je moet niet tot 100 gaan, want zoveel opgaven maak je helemaal niet*. De juf vraagt door. Tot welk getal kun je de as laten lopen als je wilt laten zien dat het wel veel opgaven zijn. Dat antwoord hebben de kinderen wel paraat. Je maakt op een dag maximaal 25 opgaven, dus als de verticale as tot 25 loopt, dan lijkt het of het om veel meer opgaven gaat.

Juf Barbarella vertelt dat de echte juf over een kwartiertje terug is: *Jullie moeten haar laten zien dat je echt veel opgaven maakt*. Ze vraagt de leerlingen om in dat kwartier een nieuwe grafiek te maken, een echte lieggrafiek. De leerlingen willen graag laten zien dat ze erg hard moeten werken en gaan graag nog even met de grafiek aan de slag. De verticale grafiek wordt daarbij zo geschaald dat staven die het aantal opgaven laten zien bijna blad vullend zijn (Afb. 4). Sommige leerlingen interpreteren de tweede opdracht iets anders. Ze zijn zo overtuigd dat ze moeten liegen met de grafiek, dat ze in hun grafiek de werkelijk echt geweld aandoen. Zo maakt Bon wel een mooie volle grafiek, maar het aantal opgaven is nu wel erg groot geworden (Afb. 5).



Afb. 4. Nieuwe grafiek.



Afb. 5. Grafiek van Bon.

Voordat de echte juf weer terug is, stuurt Barbarella vier meisjes naar het digibord met de opdracht om een overtuigende lieggrafiek te maken over het aantal opgaven. Als juf Astrid weer terug komt in de klas krijgt ze meteen een lesje van de kinderen. De leerlingen tonen met enige trots de grafiek op het digibord aan juf Astrid. Die is onder de indruk van het vele rekenwerk dat ze de kinderen laat doen. Ze belooft hen te zullen kijken of het ook een beetje minder kan.

Groep 5

De vrijdag na het maken van de lieggrafiek in groep 7 staat in de eigen klas van Barbarella het maken van een grafiek op het programma. Het gaat om een eerste verkenning van lijngrafieken. Barbarella geeft hier een iets andere draai aan. Ze gaat ook met groep 5 aan de slag met een lieggrafiek. Omdat dit voor de kinderen een eerste verkenning met het maken van grafieken is, is enige uitleg nodig. De kinderen bekijken eerst samen met de juf de opgaven in de methode. Die gaan over de temperatuur in verschillende maanden en hoe je die dan per maand in een grafiek zet. Dat kan anders!

Jongens en meisjes, we gaan iets anders onderzoeken. We gaan eens kijken hoeveel opgaven jullie maken in een week en dan gaan we die in een grafiek zetten. Dan kunnen we aan jullie vaders en moeders laten zien hoeveel we eigenlijk werken in een week! En misschien kunnen we dan wel laten zien dat jullie veel te veel doen.

Dan blijkt dat deze context de kinderen in groep 5 minder aanspreekt dan die in groep 7. Ties geeft aan dat hij eigenlijk nog wel meer opgaven wil maken. Elena vult aan: *Waarom zouden we dat doen? We moeten toch gewoon opgaven maken? Anders word je toch niet slim?*

Barbarella laat zich door deze opmerkingen niet uit het veld slaan. Ze vraagt, zoals ze een paar dagen eerder in groep 7 deed, de kinderen eerst een gewone grafiek te maken: *Gaan jullie eerst maar eens in tweetallen tellen hoeveel opgaven jullie eigenlijk moeten maken in een week. En elke opgave telt.*

De kinderen gaan aan het werk en alle opgaven van de rekentaak worden minutieus geteld. De kinderen willen geen fouten maken in deze opdracht. Joep wil daarom weten of hij de een-ster-opgaven moet meetellen, omdat hij die nooit doet en Lucas vraagt zich af of het Plusboek meetelt. Gezamenlijk wordt besloten dat alleen de opgaven van de twee- en de drie-ster-taken worden geteld, maar dat de werkboeken niet meetellen.

Na al het telwerk is het tijd om de grafieken te maken. Hier gaan de kinderen individueel mee aan de slag. Er ontstaan mooie grafieken en Barbarella besluit om de grafieken van Noortje en Livna met de groep te bespreken. Splinter wil wel reageren op de grafiek van Noortje (Afb. 6). Hij ziet dat Noortje op maandag heel veel doet en op woensdag eigenlijk al klaar is. Noortje vult aan en zegt dat ze dan lekker veel tijd heeft om op donderdag en vrijdag aan haar pluswerk te beginnen. Verschillende sterke rekenaars herkennen zich hierin en geven aan dat hun grafiek lijkt op die van Noortje.

Afb. 6. De grafiek van Noortje.

De grafiek van Livna is anders. Livna vertelt dat zij het fijn vindt om iedere dag eigenlijk hetzelfde aantal opgaven te maken: *Dan weet ik nog waar ik ben de dag daarna.* Parker roept dat zijn grafiek er weer anders uitziet en houdt zijn grafiek omhoog. Hij vertelt dat hij altijd eerst moet opstarten: *Op maandag heb ik meestal niet zo'n zin om al hard te werken. Dus dan werk ik gewoon wat meer op donderdag en vrijdag*.

Barbarella ziet dat de kinderen de grafieken goed begrijpen en wil daarom toch een stapje zetten in de richting van een lieggrafiek, in de verwachting dat de leerlingen daarin nu wel mee willen. Ze vertelt dat ze de grafieken zo gaan veranderen dat het lijkt dat het nog veel meer opgaven zijn. Dus dat je eigenlijk een beetje gaat liegen. Ze krijgt de kinderen daar echter niet in mee. Ze vinden het een heel raar idee om grafieken te maken die niet precies weergeven wat er aan de hand is. Ze zien eigen geen reden om dat te doen en vinden het ook niet

eerlijk: *Juf, ik ga dat echt niet doen. Ik vind mijn grafiek goed. Ik ga hem niet anders maken* en *Ik mag echt niet liegen van mijn moeder*.
Voor groep 5 is een lieggrafiek een stap te ver. Dat neemt niet weg dat het lesdoel gehaald is. De kinderen hebben kennis gemaakt met het maken van grafieken. Bovendien leverde dit Barbarella ook nog eens waardevolle informatie over hoe de kinderen individueel hun weektaak maken. Voortaan krijgen de kinderen die pas op donderdag wat gaan doen, hun pluswerk op de maandag. Want als je in twee dagen honderd opgaven kan maken en je toetsresultaten goed zijn, heb je vast behoefte aan wat uitdagender werk!

Grafieken doordenken

De 21e eeuw wordt nog wel eens aangeduid als de informatiemaatschappij. Kinderen moeten leren op gepaste wijze met al de beschikbare informatie om te gaan. Het bewerken en ordenen van de informatie is een manier om de informatie snel toegankelijk te maken. Een grafiek is zo'n ordening die informatie toegankelijk maakt. Grafieken verbeelden informatie. Dat doen ze om duidelijkheid te scheppen, maar daarin worden wel accenten gelegd. en in dat laatste geval kan, als je niet oppast, een dergelijk grafiekbeeld leiden tot verkeerde conclusies. Daarom zal het kunnen gebruiken van grafieken steeds belangrijker worden en is er een noodzaak daar in het basisonderwijs regelmatig bij stil te staan. Dat kan bijvoorbeeld door met de leerlingen een lieggrafiek te maken. Daarvoor kies je bij voorkeur een situatie die voor hen zeer bekend is en waarin het zelfs aantrekkelijk is met de grafiek een beetje te liegen. Dat brengt namelijk het gesprek snel op wat je duidelijk wilt maken en hoe je de grafiek zo kunt manipuleren om precies dat naar voren te laten komen wat jij graag wilt laten zien. Als je op die manier de wereld in beeld brengt, ben je niet per se aan het liegen. Je doordenkt manieren om in een representatie je boodschap te verhelderen. Als je dat regelmatig zelf doet, kun je waarschijnlijk ook bedenken hoe anderen dat doen. En dat maakt dat als anderen jou willen misleiden met echte lieggrafieken, je hen gemakkelijk kunt ontmaskeren.

Tips

- Laat leerlingen grafieken maken van situaties die voor hen betekenisvol zijn.
- Bespreek met leerlingen wat ze met de grafiek willen aantonen of laten zien.
- Ga met leerlingen na hoe je een grafiek zo kunt aanpassen of vervormen dat je beter zichtbaar maakt wat je zichtbaar wilt maken.
- Laat jezelf en de leerlingen inspireren door opvallende lieggrafieken en ga samen na hoe je op het verkeerde been gezet wordt.

Verder lezen en inspiratie opdoen?

De 12e Grote Rekendag: *Kijk mijn klas! Grafieken en verbanden.*
http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03397/.

Juf, deze puzzel is een verhaaltje!
Denkprocessen versterken met gerichte ontwikkelingsmaterialen

Aafke Bouwman & Annemarieke Kool, CPS Onderwijsontwikkeling en advies

Inleiding
Gerichte ontwikkelingsmaterialen zijn van alle tijden en in iedere kleutergroep te vinden. Ze zijn bedoeld om een of meerdere ontwikkelingsgebieden te stimuleren. Kinderen vinden ze vaak saai, omdat deze materialen weinig uitdagen tot denken en redeneren. Het gebruik van apps maakt deze materialen een stuk aantrekkelijker, maar dragen apps bij aan het verinnerlijken van getalbegrip en creatief denken binnen het rekenen-wiskunde als een aspect van de 21e eeuwse vaardigheden? In dit hoofdstuk krijgt u mogelijkheden aangereikt, hoe kleuters uitgedaagd kunnen worden om met gerichte ontwikkelingsmaterialen aan de slag te gaan.

Voorbeelden uit de praktijk

Voorbeeld 1
Maartje gebruikt een *arbeid naar keuze* bord waarop kinderen twee per week verplicht kiezen uit de kast met gerichte ontwikkelingsmaterialen. Maartje: *Een grote groep kinderen pakt niet uit zichzelf ontwikkelingsmateriaal. Daarom moeten ze van mij met deze materialen werken, zodat ik kan zien wat ze al kunnen en weten. Ik controleer met het kind of de opdracht goed is gemaakt, voordat ze iets naar eigen keuze mogen doen. De meeste kinderen doen lang over de opdracht en ik moet in de buurt zijn, anders doen ze niets.*

Voorbeeld 2
Kitty heeft een lotto klaargezet en nodigt Sjors en Wahid uit samen met haar op het puzzelkleed te gaan zitten. Ze heeft een telspel klaargezet. Kitty: *Op welke drie manieren kunnen jullie mij laten zien hoeveel euro's ik moet betalen voor mijn nieuwe voetbal? De voetbal kost vier euro.* Sjors zoekt het cijfer 3 en 1, Wahid zoekt een strook met vier stippen. Kitty: *Waarom heb je deze allemaal gepakt? Wat zou er gebeuren als de cijfers op zijn?* Sjors en Wahid overleggen en pakken andere stroken, stapeldopjes en stippenkaarten om de vier (euro) op verschillende manieren te leggen. Sjors haalt ook ander materiaal als kurken en puzzelstukken tevoorschijn.

Functie van ontwikkelingsmaterialen
In kleutergroepen is het werken met zogenaamde ontwikkelingsmaterialen een onderdeel van het curriculum. Deze materialen zijn specifiek gemaakt om een of meerdere ontwikkelingsgebieden, zoals de waarneming of logisch denken te stimuleren. Het ontwikkelingsmateriaal is op grond van materiaalkenmerken ingedeeld in drie categorieën:

- **Ongevormde materialen** zoals zand, klei en water. Kinderen verkennen het materiaal en ontdekken zo de eigenschappen van het materiaal.
- **Vormgevende materialen** zoals mozaïek, blokken, kralenplanken en stokjes en ringen, maar ook papier en tekenmaterialen. Kinderen vervormen en bewerken het materiaal om een idee met behulp van het materiaal en bijbehorende technieken zichtbaar te maken. Nellesteijn & Jansen-Vos (2005) delen materialen als blokken en mozaïek in een aparte categorie in, namelijk constructie- en compositiemateriaal.
- **Gerichte ontwikkelingsmaterialen** zoals lotto's (kaarten op een rij leggen van klein naar groot), puzzels, werkbladen en materialen die de ontluikende geletterdheid en gecijferdheid stimuleren. Ze zijn doelgericht, omdat de opdracht en oplossing van het materiaal is ingebouwd. (Brouwers, 2010). Dat betekent dat het materiaal een eenduidige bedoeling heeft en niet naar eigen inzicht gebruikt worden. Gerichte ontwikkelingsmaterialen worden in de praktijk ook wel speelleermaterialen genoemd. Deze term is misleidend, omdat van kenmerken van spel (onder andere flexibiliteit, eigen regels en handelingen) geen sprake is. Wel wordt er volgens vaste stappen geleerd en dat draagt ook bij aan ontwikkeling. Daarom gebruiken wij de term gerichte ontwikkelingsmaterialen.

Fröbel (1782-1852) en later Montessori (1870-1952) introduceerden vormgevende en gerichte ontwikkelingsmaterialen ooit als functietraining van onder andere waarneming, logisch ordenen en ruimtelijk inzicht. De inhoud van het curriculum bestond destijds grotendeels uit het werken met deze materialen. Los van de didactische aanpak worden veel van deze materialen, zoals de blokken, vouwbladen, mozaïek, kleurenspoelen, schuurpapieren cijfers en geometrische figuren in het huidige rekenwiskunde onderwijs volop gebruikt. Met name gerichte ontwikkelingsmaterialen zijn in de loop van de jaren duurzamer en aantrekkelijker geworden door materiaal, vormgeving en kleurgebruik. Ook worden verschillende functies en ontwikkelingsgebieden gecombineerd, waardoor differentiatie mogelijk is. Interactie en samenspelen wordt gestimuleerd door gezelschapsspellen, waarmee een win en verlies element is toegevoegd.

Functie in de 21^e^ eeuw

Uit onze observaties blijkt dat de meeste kleuters graag werken met ongevormde ontwikkelingsmaterialen, omdat zij de handelingen en regels bepalen, hun fantasie kunnen gebruiken en het materiaal creatief inzetten ten behoeve van het spel wat ze spelen. Een deel van de kleuters werkt met vormgevende materialen zoals mozaïek, blokken en kralen werken, omdat ze daarmee patronen en figuren kunnen leggen en probleemoplossend denken wordt gestimuleerd. Een minderheid gaat graag met gerichte ontwikkelingsmaterialen aan de slag, omdat het doel, de oplossing en het eindresultaat vooraf duidelijk zijn.
Veel pedagogen stellen dat een kind zich ontwikkelt wanneer het actief en handelend bezig is. Dit gebeurt doordat het kind zelfstandig met het materiaal aan de slag kan,

en het materiaal bijdraagt aan het creatieve proces. De didactische aanpak bij gerichte ontwikkelingsmaterialen draagt niet bij aan creativiteit en probleemoplossend denken van kleuters, aspecten van het leren in de 21^{e} eeuw. In de praktijk zien we dat de leerkracht de handelingen voordoet en het kind oefent door nadoen en uiteindelijk zelfstandig uitvoert.

We gaven al eerder aan dat kinderen ook leren van deze didactische aanpak, maar dat de betrokkenheid vaak laag is. Kinderen kiezen deze materialen alleen omdat het een verplicht onderdeel is van bijvoorbeeld een weektaak, kieskast of keuzebord. Overigens is de term *arbeid naar keuze* van Montessori niet toevallig gekoppeld aan werken met gerichte ontwikkelingsmaterialen: het is *werken* en geen spelen.

U kunt de betrokkenheid van de kinderen verhogen en creatief en probleemoplossend denken binnen de reken-wiskunde ontwikkeling stimuleren door gerichte ontwikkelingsmaterialen te koppelen aan denk stimulerende vragen.

Denk stimulerende vragen

Denk stimulerende vragen zijn ontwikkeld door Marion Blank (1973, 2002) en zijn ondersteunend in het (creatieve) denkproces. Deze vragen kunnen het werken met ontwikkelingsmaterialen verrijken. Door het laten ervaren van de wereld om hen heen *(Hoe voelt klei, droog en nat papier? Hoe ziet zand eruit als ik er water bij doe?)* leren kinderen (reken)taal te geven aan hun ervaringen in het werken met ongevormde materialen. *Welke volgorde kies jij voor je kralenpatroon* en *Wat gebeurt er met de gele driehoek als ik deze omkeer?* zijn bijvoorbeeld vragen als met vormgevende ontwikkelingsmaterialen wordt gewerkt.

Door het stellen van passende vragen krijgt het kind de mogelijkheid om zijn gedachten hierover in (reken)woorden om te zetten. Blank onderscheidt vier niveaus van abstract taalgebruik; voor elk niveau zijn vragen geformuleerd (Tabel 1).

Hoewel Blank deze vragen heeft ontwikkeld voor kinderen met een taalachterstand, bieden ze - vanwege hun eenvoudige opbouw in vier niveaus - leerkrachten handvatten tijdens het werken met gerichte ontwikkelingsmaterialen binnen het domein ontluikende gecijferdheid. De focus ligt daarbij op interactie en het gebruik van rekentaal. De afbeeldingen van bijvoorbeeld lotto's en puzzels zijn zowel realistisch als schematisch en kunnen gekoppeld worden aan levensechte ervaringen tijdens spel in de hoeken. Denk stimulerende vragen zijn daarbij een manier om:

- via de materialen rekentaal op gang te brengen en te stimuleren;
- verbindingen te leggen met ervaringen;
- schematische weergaven te maken van een ordening die tijdens het spel is ontstaan.

Tabel 1. Vraagniveaus van Marion Blank, samengesteld uit diverse bronnen (onder andere Van Bokkem en Van der Velden, 1994)

Van concreet: **herhaling en minder variatie met hulp, begeleiding en voordoen, besloten en veilig**		**Naar abstract:** **meer variatie, zelfstandig, ruimte en vrijheid**	
Niveau 1 (leeftijd 2-3) *Kijk naar* Benoemen	**Niveau 2 (leeftijd 3-4)** *Praat over* Delen van, categorieën, ordenen	**Niveau 3 (leeftijd 4-5)** *Denk na* Herordenen, voorspellen	**Niveau 4 (5 jaar >)** *Redeneer over* Problemen oplossen en beredeneren
• zoek hetzelfde plaatje • wat is dit? • wat zie je daar? • laat me…zien • is dit… of…. • wie is dit? • wijs aan…. • zeg eens..	• zoek een plaatje dat../ waarop… • wat gebeurt er? • wie is dat? wanneer doe je / ga je…? • waar is de…? • waar is dit voor? • waarom zijn ze verschillend? • wat is nog meer…? • wat kunnen ze nog meer? • noem iets dat…. • zoek iets dat…… • welke kleur / vorm heeft deze?	• wat gebeurt er dan? • wat gaat er gebeuren? • hoe heeft hij…? • hoe zou hij het ook kunnen doen? • waarin lijken ze op elkaar? • welke vind jij het mooist? • vertel me, welke is niet…? • hoe voelt hij zich? • wat hebben ze gedaan? • waar zie je iets dat….net als…. • welke volgorde zou jij…	• wat gebeurt er als..? • waarom pak je die…? • waarom gebeurde dat? • wat kon hij doen? • wat zou je doen als….? • waarom is het gemaakt van…? • hoe weet je dat…? • waarom doet hij niet…? • waarom vind je die leuk? • als je… was wat zou jij dan doen? • wat kunnen we (niet) gebruiken om… • waarom kunnen we dat (niet) gebruiken om…

Terug naar onze praktijkvoorbeelden

Uit de aanpak van Kitty (voorbeeld 2) blijkt dat deze jongens door de gestelde vragen meer betrokken zijn geraakt bij het uitvoeren van de opdracht met ontwikkelingsmateriaal, gericht op tellen en hoeveelheden. Een lotto of puzzel krijgt meer betekenis als een kind een verbinding kan maken met afbeeldingen of vanuit een handelende situatie, zoals in spel. We geven nog enkele voorbeelden:

Voorbeeld 3

Marlies speelt in de winkel en heeft als onderdeel van haar spel een rij gemaakt van grote naar kleine boodschappen. Marlies: *Ik doe eerst de grote dozen in de tas, want dat doet mama ook*. Leerkracht Monica biedt op een later moment vervolgens een lotto aan, waarop afbeeldingen gesorteerd moeten worden van groot naar klein. De boodschappen liggen ook op de tafel, zodat Marlies een verbinding kan maken met de boodschappen en de lottoafbeeldingen. De vraag uit niveau 3: *welke volgorde van de boodschappen kun je nog meer maken*, zorgt ervoor dat Marlies de lottoafbeeldingen van klein naar groot neer legt.
Monica vervolgt met: *Wat gebeurt er met de boodschappen als je de twee grootste dozen weghaalt* (niveau 4)? Marlies haalt vervolgens twee lotto kaarten met de grootste afbeeldingen erop weg en legt de kaarten onder de twee grootste dozen. *Nu zijn er van allebei drie: groot, beetje kleiner en klein*.

Marlies pakt zelf andere boodschappen en maakt een nieuwe sortering van groot naar klein bij de lotto kaarten.

Voorbeeld 4
Monica ondersteunt de ontwikkeling van chronologische volgorde (tijdsbesef) van Cees met behulp van een oorzaak-gevolg lotto. Cees kiest een set van drie kaarten. Hij kiest een set uit en vertelt zijn ervaring bij de afbeeldingen. Monica legt samen met hem de 3 kaarten in de juiste volgorde: *Kijk; nadat je een schop tegen de bal had gegeven, ging de bal door de voorruit van jullie huis. Daarna werd de ruit gemaakt. Dat zie je ook het laatste kaartje*.
Monica gebruikt de vraag uit niveau 3: *wat gebeurt er dan en daarna*. Deze vragen helpen Cees om rekentaal te gebruiken als *eerst, daarna, als laatste*. Cees: *Juf, deze puzzel is een verhaaltje!*

Een app of materiaal of beide?

Apps maken deel uit van het hedendaagse curriculum. Er is inmiddels een enorme variëteit aan apps, waarin de handelingen die een kind met materialen als kaartjes, pionnen en puzzelstukken doet, zijn vervangen door schuifbewegingen. Veelal klinkt er een geluid of muziek als de opdracht goed is uitgevoerd en ziet het geheel er aantrekkelijk uit. Apps blijken uit onze observaties in eerste instantie de motivatie voor de keuze van gerichte materialen te versterken. Kinderen waarderen vooral de aantrekkelijke omgeving en het gebruiksgemak. De inhoud van de gerichte opdrachten wordt impliciet meegenomen, waardoor na verloop van tijd doelen gerealiseerd worden.
Een overweging van leerkrachten is dan ook het gebruik van apps in plaats van of naast materialen. Handelingen als het pakken en opruimen van de materialen zijn met het gebruik van apps niet nodig en dankzij het schuiven op het beeldscherm is het leggen en sorteren eenvoudig uit te voeren.

Onderzoek (Spitzer, 2014) geeft aan dat sensomotorische activiteiten (handelend bezig zijn) samenhangen met de ontwikkeling van rekenkundige vaardigheden op latere leeftijd. Getallen en begrippen worden door de hersenen op verschillende manieren verwerkt: via de motoriek door het gebruik van vingers en materialen, als onderdeel van een reeks of ordening en als woorden in het taalcentrum van de hersenen. Getalbegrip alleen via apps leren, draagt onvoldoende bij aan ruimtelijke inzicht, reken en wiskundige problemen. Handelen is de manier voor kleuters om eigenschappen en begrippen al doende te leren. Interactie is cruciaal om denken en redeneren te versterken en de ontwikkeling te monitoren.
Het inzetten van apps kan in onze optiek dan ook het gebruik van materialen niet vervangen. Apps kunnen wel ondersteunend worden gebruikt. Juist de begeleidende leerkracht, die vragen stelt waardoor het denken en redeneren over rekenkundige aspecten wordt gestimuleerd is de sleutel om de betrokkenheid in het werken met gerichte ontwikkelingsmaterialen te stimuleren.

Tips om meer betrokkenheid van kinderen met gerichte ontwikkelingsmaterialen te halen

- Bekijk welke vragen uit de niveaus aanzetten tot handelen en welke vervolgvragen het handelen verder stimuleren.
- Bekijk welke vragen aanzetten om specifieke rekenaspecten te ontwikkelen.
- Zoek gerichte ontwikkelingsmaterialen die elkaar kunnen aanvullen en complexer maken.
- Laat kinderen samen met het materiaal werken om interactie te bevorderen.
- Verbind spel en ontwikkelingsmaterialen waar dat kan.
- Laat kinderen eerst het materiaal en mogelijkheden ervaren, voordat ook apps worden ingezet.
- Stel ook vragen bij het gebruik van apps.

Literatuur

Blank, M. (1973).*Teaching and learning in the preschool: A dialogue approach*. Columbus, OH: Merrill.

Blank, M. (2002). Classroom discourse: A key to literacy. In: K. Butler & E. Silliman (Eds.), *Speaking, reading en writing in children with learning disabilities: New paradigms in research and practice* (pp. 151-173). Malwah. NJ: Erlbaum

Bokkem, van, M. & Velden, van der, I.M. (1994). *DGM in de praktijk: een handboek bij de denkstimulerende gespreksmethodiek van Marion Blank*. Rotterdam: Partners Training & Innovatie.

Bottger, S. Langbein, J & Memelink, D. (2016) *Materialen doen ertoe!* Esstede, Heeswijk-Dinther.

Brouwers, H. (2010) *Kiezen voor het jonge kind*. Coutinho, Bussum.

Nellesteijn, B. & Jansen-Vos, F. (2005) *Het materialenboek. Een rijke leeromgeving in de onderbouw*. Van Gorkum, Assen.

Spitzer, M. (2014). *Digitale dementie. Hoe wij ons verstand kapot maken.* Uitgeverij Atlas Contact

Het stimuleren van een wiskundige attitude

Erica de Goeij, Marnix Academie, & Wil Oonk,
Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut

Inleiding

Op de basisschool doen kinderen wiskundige kennis op, ontwikkelen ze wiskundige vaardigheden en groeit hun wiskundig inzicht. Maar het kwartet is dan nog niet compleet. Om het leren van rekenen-wiskunde op een hoger plan te brengen, is naast aandacht voor kennis, vaardigheden en inzichten ook het ontwikkelen van een wiskundige houding of attitude van belang (Afb. 1). De kenmerken van een wiskundige attitude (zie de bijlage bij dit hoofdstuk) komen sterk overeen met wat tegenwoordig 21e eeuwse vaardigheden worden genoemd. We laten aan de hand van enkele praktijkvoorbeelden rond probleem oplossen met magische vierkanten zien, hoe de leerkracht de wiskundige attitude van kinderen kan stimuleren.

Afb. 1. Een kwartet van kennis, vaardigheden, inzicht en attitude in wiskundige leeractiviteiten.

Het HSA-vierkant in de bovenbouw

Aan leerlingen van groep 7 en 8 leggen we het onderstaande HSA-vierkant (Afb. 2) voor met de vraag wat hen opvalt als ze dit vierkant bestuderen. Sommige kinderen hebben een brede belangstelling voor rekenen-wiskunde en laten meteen een onderzoekende houding zien; ze zijn nieuwsgierig naar de getallen in het vierkant en willen graag begrijpen wat het idee is achter de plaatsing van de getallen in het vierkant. Ze ontdekken dat steeds een getal uit de bovenste rij en uit de onderste rij bij elkaar opgeteld 145 is (1 + 144, 142 + 3, 11 + 134, enzovoort) en dat hetzelfde geldt voor de som van de getallen op de tweede en op één na laatste rij (120 + 25, 27 + 118, 110 + 35, enzovoort). De kinderen tekenen lijnen en cirkels op het blad om hun ontdekkingen te noteren. In de kantlijn verschijnen opgaven en getallenrijen. We zien ook kinderen die controleren of in de 144 vakjes de getallen 1 tot en met 144 allemaal één keer voorkomen. Andere kinderen weten niet zo goed wat ze aan moeten met de open vraag die is gesteld. Eigenlijk valt hen niet zoveel op aan dit vierkant en hebben ze geen idee waar en hoe te beginnen. Zij krijgen een hint van de leerkracht, die hen uitnodigt om de twaalf getallen van een rij eens bij elkaar op te tellen en dit ook voor andere rijen te doen.

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

Afb. 2. Het HSA-vierkant.

In de groep zien we verschillen tussen leerlingen als we kijken naar de attitude die zij tonen bij het bestuderen van dit getallenvierkant. De leerlingen die plezier hebben in het oplossen van wiskundige problemen, doelgericht te werk gaan, notities maken, die reflecteren op hun vondsten en hierover in gesprek gaan met medeleerlingen komen zelfstandig verder in het beantwoorden van de vraag wat opvalt aan dit getallenvierkant. Anders is dat bij hun klasgenoten die eigenlijk weinig of geen interesse hebben in het vak, zichzelf nauwelijks vragen stellen en niet zijn ingesteld op het vinden van structuren en patronen. Regelmatig ontbreekt het deze leerlingen ook aan wiskundetaal om het gesprek erover met een medeleerling aan te gaan.

Wat is een HSA-vierkant?

Het HSA-vierkant is een magisch vierkant en staat voor een ***H**eel-**S**peciale-**A**ttractie* en dankt zijn naam ook aan de makers ervan: Jesse **H**oekstra (17 jaar), Willem **S**chilte (17 jaar) en Petra **A**lkema (15 jaar). In het voorjaar van 2007 kwam het vierkant in het nieuws nadat deze jonge mensen, na het volgen van een masterclass over Franklin-vierkanten, erin waren geslaagd een magisch vierkant van twaalf bij twaalf te ontwerpen waarin de magische som van de getallen in een rij of in een kolom steeds gelijk is. Eén van de voorwaarden die Benjamin Franklin (1706-1790) ooit bedacht voor magische vierkanten. Tellen we alle twaalf getallen in een rij bij elkaar op, dan levert dit de magische som van 870 op. Dit geldt voor alle rijen, maar ook voor alle kolommen. De twaalf getallen in een kolom zijn bij elkaar opgeteld eveneens 870. Sterker nog, ook de diagonalen hebben een som van 870. Vijf leerlingen ontdekten dit zelf nadat ze van de leerkracht de tip hadden gekregen om de som van de rijen te berekenen. Zij hebben zich verwonderd over de steeds weer terugkerende som van 870 en waren daarmee gemotiveerd om verder te gaan zoeken naar nog meer van deze bijzonderheden.

Nadat de leerlingen van groep 7 en 8 ruim de tijd hebben gekregen zelf ontdekkingen te doen in het HSA-vierkant, is het tijd voor een nabespreking. Verschillende kinderen brengen individueel of in een tweetal naar voren wat zij in het vierkant hebben ontdekt. Met behulp van een PowerPoint toont de leerkracht ook enkele mooie, verrassende kenmerken van het HSA-vierkant. De verwondering is groot als door één van de leerlingen wordt ingebracht dat de som van de beide diagonalen 870 is. Maar het kan helemáál niet meer stuk als de leerkracht hier nog aan toevoegt dat een afgebogen diagonaal ook deze magische som kent. En niet alleen de afgebogen diagonaal die in een hoekpunt start, maar ook de afgebogen diagonalen die verderop in de rij starten (Afb. 3).

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	**27**	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	**131**	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	**105**	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	**80**	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	**91**	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	**54**	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	**65**	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	**40**	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	**14**	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	**118**	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

1	142	**11**	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	**33**	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	**128**	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	**103**	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	**77**	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	**90**	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	**55**	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	**68**	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	**42**	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	**17**	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	**112**	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	**134**	9	137	7	140	6	133	10	143	4

Afb. 3. De getallen in de afgebogen diagonalen leveren ook de magische som van 870 op.

In de groep wordt ook ontdekt dat vier getallen die met elkaar een vierkant vormen altijd een som van 290 hebben. Bijvoorbeeld 1 + 142 + 120 + 27, maar ook 82 + 71 + 39 + 98. In de nabespreking weet de leerkracht de verwondering opnieuw te wekken door ook de bijzonderheden uit afbeelding 4 in te brengen. Twaalf getallen die de letter H vormen leveren steeds de magische som van 870 op. Waar de letter ook wordt gemaakt in het vierkant, altijd is de som 870. Dit geldt ook voor de letter O. Daarbij zijn nog meer bijzonderheden vast te stellen. Niet alleen de twaalf getallen in de gekleurde vakjes zijn bij elkaar opgeteld 870, dit geldt ook voor de twaalf getallen die binnen de O liggen (83 + 64 + 87 + 50 + 93 + 53 + 58 + 95 + 52 + 92 + 62 + 81). En tevens gaat dit op voor de twaalf getallen die net buiten de O liggen (48 + 99 + 73 + 41 + 103 + 66 + 72 + 97 + 46 + 79 + 104 + 42). Waar de O ook op deze manier in het vierkant wordt weergegeven, de magische som van 870 komt steeds weer terug.

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

1	142	11	136	8	138	5	139	12	135	2	141
120	27	110	33	113	31	116	30	109	34	119	28
121	22	131	16	128	18	125	19	132	15	122	21
48	99	38	105	41	103	44	102	37	106	47	100
73	70	83	64	80	66	77	67	84	63	74	69
60	87	50	93	53	91	56	90	49	94	59	88
85	58	95	52	92	54	89	55	96	51	86	57
72	75	62	81	65	79	68	78	61	82	71	76
97	46	107	40	104	42	101	43	108	39	98	45
24	123	14	129	17	127	20	126	13	130	23	124
25	118	35	112	32	114	29	115	36	111	26	117
144	3	134	9	137	7	140	6	133	10	143	4

Afb. 4. De magische som komt ook op deze manieren terug in het HSA-vierkant.

Tijdens de nabespreking is bij de leerlingen niet alleen de verwondering over de bijzonderheden in dit HSA-vierkant gegroeid, maar ook hun bewondering voor de ontdekkers ervan is groot. Ze vinden het razend interessant dat Jesse, Willem en Petra erin zijn geslaagd 144 getallen zo in een vierkant te plaatsen dat de besproken kenmerken er allemaal in naar voren komen.[1]

Wiskundige attitudevorming

Het HSA-vierkant is een mooi voorbeeld van een open probleem dat kinderen uitnodigt om te gaan onderzoeken. In de bijlage bij dit hoofdstuk zijn kenmerken van wiskundige attitudes opgenomen, gegroepeerd in vijf categorieën: een algemene houding ten aanzien van wiskunde; een reflectieve houding; een onderzoekende houding; een communicatieve houding; en een doelgerichte houding (Oonk & De Goeij, 2006). In deze categorieën zijn 21e eeuwse vaardigheden als kritisch denken, probleemoplossen, samenwerken, communiceren en de creativiteit herkenbaar. Van de vijfendertig sub kenmerken komen er bij de leerlingen in de hiervoor beschreven lesactiviteit opvallend veel naar voren, zoals verwondering, betrokkenheid, nieuws-

[1] Helaas is het Jesse, Willem en Petra niet gelukt om ook aan Franklins voorwaarde te voldoen dat de som van een halve rij, maar ook van een halve kolom, de helft van de magische som, dus 435, moet opleveren. Een wiskundige heeft inmiddels het bewijs geleverd dat het onmogelijk is om dit voor het magisch vierkant van twaalf bij twaalf voor elkaar te krijgen. Zie voor het boeiende verhaal: http://www.kennislink.nl/publicaties/tieners-vinden-multi-magisch-vierkant.

gierigheid, een drang naar willen begrijpen, het zoeken naar alternatieve oplossingsaanpakken en het reageren op elkaars oplossingen.
Een wiskundige attitude ontwikkelen kinderen niet zomaar tijdens het maken van rekenkundige en wiskundige vraagstukken. Het is de leerkracht die de ontwikkeling van deze attitude bewust kan stimuleren. Zo zagen we bij het HSA-vierkant dat juist ook een nabespreking kansen biedt om verwondering op te roepen en kinderen meer nieuwsgierig te maken naar de getallenwereld en de mogelijkheden daarbinnen. In een nabespreking kunnen kinderen wiskundetaal gebruiken en benutten om te komen tot dieper inzicht en alternatieve aanpakken. Er liggen ook kansen om met de leerlingen gesprek te hebben over bijvoorbeeld het belang van efficiëntie en nauwkeurigheid. Kortom, voor het ontwikkelen van een wiskundige attitude is een interactieve nabespreking waarin de leerkracht de passende houding voorleeft, noodzakelijk.
Overigens leren de kinderen door de HSA-activiteit verder nog, dat binnen de wiskunde steeds nieuwe ontdekkingen worden gedaan en dat bijvoorbeeld nog altijd wordt gezocht naar (nieuwe) bewijzen. Dit is een kant van de wiskunde die in rekenwiskundemethoden eigenlijk geen plek heeft. Door juist ook eens aandacht te besteden aan onopgeloste problemen (De Goeij, 2012) krijgen kinderen een breder beeld van de wiskunde. Ook van de wiskunde, zoals die eigenlijk 'in het echt' is.

We gaan nog even verder met de magische vierkanten, maar nu in de middenbouw. We laten zien hoe de leerkracht in een lessenserie over tovervierkanten een wiskundige attitude kan voorleven en bijsturen.

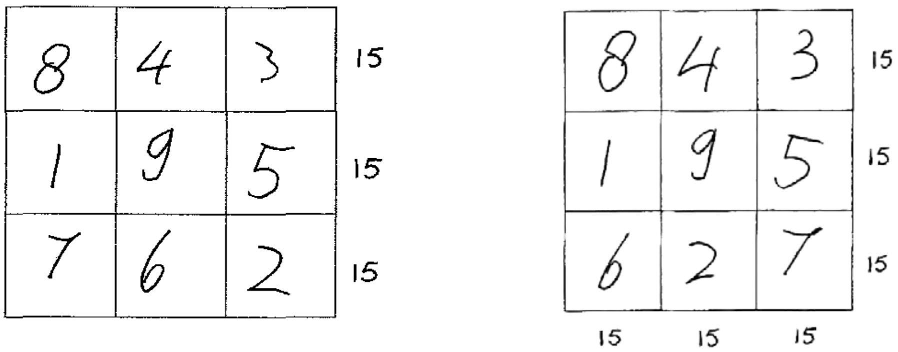
Tovervierkanten in de middenbouw

In de middenbouw maken leerlingen kennis met tovervierkanten (De Goeij & Treffers, 2004). We zoomen in op drie wiskundige attitudes, te weten:

- zelfvertrouwen tonen tijdens het oplossen van (wiskundige) problemen (algemene houding)
- het eigen denken en handelen in beschouwing nemen (reflecterende houding)
- efficiëntie nastreven (doelgerichte houding).

De leerlingen gaan op zoek naar een magisch vierkant van drie bij drie en leggen in eerste instantie de getallen 1 tot en met 9 (op kaartjes) zodanig in het vierkant dat de som van de getallen in elke rij 15 is. Ze ontdekken dat wanneer je twee rijen kloppend hebt, de derde rij ook altijd een som van 15 heeft. De leraar stimuleert een onderzoekende houding door zichzelf hardop af te vragen hoe dat nu toch kan. Die vraag is moeilijk te beantwoorden voor de kinderen. Ze hebben wel ideeën over de wijze waarop je de getallen 1 tot en met 9 bij elkaar kunt optellen. Enkele kinderen die gericht zijn op efficiëntie, stellen voor om eerst de grootste getallen uit de rij bij elkaar op te tellen. Dit brengt je sneller bij de orde van grootte van het antwoord. De leerkracht wil graag een alternatieve aanpak meegeven en nodigt de kinderen uit om de getallenrij eens te bekijken en op zoek te gaan naar een patroon. Die ontdekken

de kinderen ook; de verliefde harten[2] zijn namelijk verstopt in de rij: 1 en 9, 2 en 8, 3 en 7, 4 en 6. Daarmee kun je snel rekenen.
We zien een leerkracht die kinderen verantwoordelijkheid en zelfstandigheid geeft in het ontdekken van een handige manier om getallen bij elkaar op te tellen. De kinderen worden niet in het diepe gegooid, maar krijgen ook tips of een denkrichting aangereikt. Daarmee groeit hun vertrouwen in het kunnen oplossen van wiskundige problemen. Door de kinderen te vragen hoe zij hebben gedacht en hoe het sneller kan of op een manier die minder foutgevoelig is, wordt een reflecterende en doelgerichte houding gestimuleerd. De weg naar een antwoord op de vraag hoe het nu toch kan dat de laatste drie getallen altijd 15 opleveren, is nu grotendeels bewandeld. Als er twee rijen zijn gevuld, ligt er al 30 op tafel. In totaal leveren de getallen een som van 45 op, dus 15 over.
In afbeelding 5 zien we het werk van Hannah. Zij heeft een vierkant gevonden waarin elke rij een som van 15 heeft. De volgende opdracht is het vierkant zo te maken dat niet alleen de rijen, maar ook de kolommen de magische som van 15 hebben. De helft van de klas schuift alle kaartjes van het vierkant en probeert via *trial-and-error* tot een gewenst resultaat te komen. Hannah behoort tot de groep kinderen die efficiënt te werk gaan en de getallen van de rijen bij elkaar houdt. Door binnen de onderste rij getallen te verwisselen komt zij op eenvoudige wijze tot een oplossing.



Afb. 5. Hannah gebruikt een efficiënte manier om tot een vierkant te komen waarin de rijen en de kolommen dezelfde magische som hebben.

Een nabespreking waarin het gesprek gaat over een handige strategie nodigt kinderen uit te reflecteren op hun eigen oplossingswijze en die te vergelijken met die van bijvoorbeeld Hannah. Het is de leerkracht die door het stellen van vragen deze reflectieve en doelgerichte houding kan stimuleren:

- Hoe ben jij gekomen tot een vierkant waarin de rijen en de kolommen een som van 15 hebben?
- Wie heeft het anders gedaan?
- Wie heeft een snelle manier gevonden?
- Wat is het voordeel van deze manier?
- Wat maakt deze manier moeilijk?

[2] Zie het hoofdstuk van Julie Menne.

- Wie heeft een manier gevonden om de getallen handig bij elkaar op te tellen?

Als afsluiting van de lessenserie over tovervierkanten gaan de kinderen op zoek naar het magische vierkant van drie bij drie waarin niet alleen de rijen en de kolommen een magische som van 15 kennen, maar ook de beide diagonalen. Met het verhaal van Koning Vierkant worden de kinderen meegenomen in het vinden van het getal dat in het midden van het vierkant moet liggen om aan de gestelde te eisen te voldoen. Ze ontdekken dat een aanpak van *trial-and-error* veel tijd kan kosten en dat het loont om na te denken over het effect van een extreem getal in het midden van het vierkant, bijvoorbeeld de negen. Zou die in het midden kunnen liggen? Waar laat je dan de acht? Is er een plek in het vierkant waarbij de negen en de acht niet samen op een rij, kolom of diagonaal liggen? Deze denkwijze, waarin het verhaal sturend is, neemt kinderen spelenderwijs mee in een wiskundige oplossing met efficiëntie als aandachtspunt.

Tot besluit

Als we terugkijken op de lessen rond het HSA-vierkant en de tovervierkanten kunnen we concluderen dat de leerkracht een belangrijke rol speelt in het stimuleren van een wiskundige attitude. Het belangrijkste is dat de leerkracht deze attitude zelf voorleeft. Dus bijvoorbeeld zelf nieuwsgierig is naar wiskundige inhoud, zelf doorvraagt om inzicht en begrip te vergroten, zelf op zoek gaat naar alternatieve oplossingsmanieren, zelf efficiëntie en nauwkeurigheid nastreeft, zelf wiskundetaal gebruikt en notaties/schema's/tabellen inzet om grip te krijgen op de wiskundige materie. Sommige kinderen hebben die nieuwsgierigheid al, maar anderen hebben daarin een voorbeeld nodig.

We hebben ook gezien wat de kracht is van een open probleem waarin kinderen denkruimte krijgen, ruimte voor onderzoeken en ontdekken. Daar waar kinderen vastlopen in dit proces is het de leerkracht die met een reflectie-oproepende vraag of een hint de leerling weer verder kan helpen. Maar ook medeleerlingen kunnen daarin een rol van betekenis hebben als er ruimte is voor samenwerken en samen praten over wiskunde.

In een nabespreking liggen volop kansen voor het stimuleren van een wiskundige attitude. Verwondering en nieuwsgierigheid kunnen worden geprikkeld en leerlingen leren welke vragen je kunt stellen om tot dieper inzicht te komen. Een nabespreking leent zich ook uitstekend om een doelgerichte houding aan te leren en tot niveauverhoging te komen. En dat is – in het kort – waar we naar streven in het reken-wiskundeonderwijs. Een vakgebied met volop kansen voor het ontwikkelen van 21e eeuwse vaardigheden.

Verder lezen?

De Goeij, E. (2012). In het spoor van Collatz. *Volgens Bartjens, 32*(1), 8-11.

De Goeij, E. & Treffers, A. (2004). Tovervierkanten. *Willem Bartjens, 23*(3), 28-32.

Oonk ,W. & De Goeij, E. (2006). Wiskundige attitudevorming. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 25*(4), 37-39.

Bijlage bij *Het stimuleren van een wiskundige attitude*

Overzicht wiskundige attitudes	
Categorieën	**Sub kenmerken**
Algemene houding ten aanzien van wiskunde	• zelfvertrouwen tonen tijdens het oplossen van (wiskundige) problemen • bijvoorbeeld durf en doorzettingsvermogen laten zien • plezier in het maken van wiskundige opgaven • zelfstandigheid en verantwoordelijkheidsgevoel • brede belangstelling • verwondering • betrokkenheid • …
Reflecterende houding	• het eigen denken en handelen in beschouwing nemen • terugkijken en anticiperen op eigen en andermans (denk) activiteiten • heuristisch denken, jezelf vragen stellen • aandacht voor relativering • kritisch zijn op het gebruik van wiskunde • …
Onderzoekende houding	• de wil om diepgaander te begrijpen • nieuwsgierigheid • aandacht voor objectiviteit • gericht zijn op alternatieve aanpakken • alert zijn op doodlopende paden en die durven te verlaten • aanpassingsvermogen • gericht op raadplegen van informatiebronnen • drang naar inzicht • meerdere oplossingsvarianten bedenken en toepassen • oplossingen c.q. redeneringen van anderen - medestudenten, leerlingen, experts - volgen of voortzetten • wiskunde in situaties herkennen en toepassen • wiskundetaal en wiskundige activiteiten[3] gebruiken • creativiteit tonen bij het oplossen van wiskundige problemen • …
Communicatieve houding	• wiskundetaal gebruiken in samenwerking met anderen • actief luisteren • gericht op informatie delen • aanpassingsvermogen • oplossingen c.q. redeneringen van anderen - medestudenten, leerlingen, experts - volgen of voortzetten • …
Doelgerichte houding	• efficiëntie nastreven • gericht op nauwkeurigheid, volledigheid, structurering, eenvoud • beslistheid en consequentie • 'mooie' getallen, handige strategieën of passende referentiematen gebruiken • materialen, schema's of modellen inzetten bij het oplossen en uitleggen van de oplossingen • wiskundetaal adequaat gebruiken • …

[3] Onder wiskundige activiteiten verstaan we bijvoorbeeld structureren, generaliseren, vergelijken, ordenen, concretiseren, visualiseren en systematisch werken.

Een didactisch tovervierkant

Open opgaven - vrije producties

Adri Treffers, Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut

Inleiding

Vanaf 1980 heeft zich in het Nederlandse rekenonderwijs de overgang van procedurele naar conceptuele rekenmethodes voltrokken.[1] Uit drie grootscheepse Cito-onderzoeken in de periode 1987-1997 bleek dat de leerlingen met de conceptuele methodes – traditionele en moderne – op vrijwel alle rekendomeinen aanzienlijk hoger scoorden dan ze met de procedurele rekenboeken deden.[2] Dit betekent echter niet dat er nu niets meer te wensen overblijft. Met name ten aanzien van de zogenoemde open opgaven, waarvan de antwoorden (en soms ook de vragen) niet op voorhand vaststaan, hebben de moderne rekenboeken de didactische mogelijkheden nog niet volledig benut. De oorzaak daarvan ligt mede in het feit, dat het kunnen maken van vrije of eigen producties bij dergelijke open vraagstukken, niet expliciet in de *Kerndoelen basisonderwijs* (OCW, 1993) werd opgenomen - dit in tegenstelling tot de leerdoelen van de *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool* (Treffers, De Moor & Feijs, 1989; Treffers & De Moor, 1990) die er wel expliciet aandacht aan schonken.
Bij het denken over de toekomst van het rekenonderwijs is het daarom dienstig dit type opgaven nog eens onder de aandacht te brengen, te beginnen met de betrekkelijk korte historie ervan.

Open opgaven in traditionele rekenmethodes (1960-1990)

In tegenstelling tot wat nogal eens wordt beweerd, kunnen de traditionele rekenmethodes uit de periode 1875-1975 niet onder één noemer worden geplaatst, maar dienen ze grofweg in drie richtingen uiteen gelegd te worden, namelijk die van de procedurele, conceptuele en duale methodes.

Procedurele methodes

Eerst kunnen dan kennen is het adagium van de procedurele rekenmethodes. De leerstof staat daarin centraal. Het is zaak om de rekenstof nauwkeurig uit te lijnen, dat wil zeggen te splitsen in moeilijkheden; elk onderdeel wordt tot in de kleinste details uiteengerafeld. Aan herhaling wordt veel aandacht besteed: oefening baart kunst en kunde. Aan inzicht als basis voor het inoefenen, zoals in het geval van de tafels bijvoorbeeld, wordt weinig waarde toegekend. Het gaat allereerst om het memoriseren van rekenfeiten, het automatiseren van bewerkingsschema's en het

[1] Dit artikel bevat fragmenten uit *Weg van het cijferen. Rekenmethodes vanaf 1800 tot heden* (Treffers, 2015).
[2] De vergelijkende scores van de traditionele, procedurele methode *Naar Zelfstandig Rekenen* en de traditionele, conceptuele methode *Nieuw Rekenen* staan op p.128 van *Weg van…* vermeld. En die van *Naar Zelfstandig Rekenen* met de moderne, conceptuele methode *Wereld in Getallen* op p.190.

herkennen van opgaventypen bij het maken van toepassingen. De procedurele aanpak is eensporig, regelgeleid en werkt zo snel mogelijk naar één efficiënte standaardmethode toe om een bepaald opgavetype op te lossen.
Toepassingen komen pas aan het eind van de leergang aan bod, en dan nog maar in bescheiden mate. Handig, flexibel (hoofd)rekenen en schattend rekenen staan niet op het programma. De standaardrecepten van het cijferen voor de vier basisbewerkingen met gehele getallen, kommagetallen en breuken, worden achtereenvolgend na groep 4 ingeoefend. Daaraan voorafgaand worden voor het rekenen tot tien, twintig en honderd de bewerkingen eveneens volgens een vast voorschrift uitgevoerd, te beginnen bij het splitsen bij tien voor het optellen onder de twintig. De opgave 6 + 7 bijvoorbeeld dient via 6 + 4 + 3 berekend te worden, en niet volgens 6 + 6 + 1 of 5 + 1 + 5 + 2, alvorens een ‘weetje’ te worden. Ook in het aanvankelijke rekenen is er geen of weinig aandacht voor levensechte rekensituaties.

Conceptuele methodes

De conceptuele rekenmethodes verschillen op vrijwel alle genoemde aspecten van de procedurele methodes. Hun didactische leidraad luidt *eerst kennen dan kunnen, eerst denken dan doen*. De leerstofopbouw is niet zo sterk geatomiseerd als die van de procedurele methodes. Aan inzicht wordt ook bij het aanleren van rekenfeiten en procedures veel waarde toegekend. Mede om deze reden komen niet meteen de meest verkorte vormen van de cijferalgoritmen aan bod. Toepassingen staan, als basis voor de begripsvorming, al aan het begin van de leergangen. Getalinzicht, flexibel (hoofd)rekenen en soms ook schattend rekenen krijgen, naast het cijferen, een centrale plaats. Kinderen worden in de gelegenheid gesteld om, binnen het kader van welomschreven doelstellingen, zelf methoden te ontwikkelen, op hun eigen niveau te werken, en soms zelfs zelf opgaven te ontwerpen. En tot slot: de relaties tussen de vier basisoperaties en tussen de leerstofdomeinen van verhoudingen, breuken, procenten en meten worden hecht verankerd.

Duale methodes

De duale methodes ten slotte bevatten in de verschillende leergangen elementen van beide: de leergang van hoofdrekenen bijvoorbeeld kan volgens het conceptuele model zijn uitgelijnd en die van het cijferen puur procedureel.

Open opgaven en vrije producties in methodes

Op grond van het voorgaande viel niet te verwachten dat in de procedurele en deels ook de duale methodes een plaats voor open problemen werd ingeruimd, en dat was ook inderdaad niet het geval. Maar wel lag het in de rede dat conceptuele methodes als die van Versluys en Van Pelt uit de negentiende eeuw en van een duale methode als van Diels & Nauta uit de eerste helft van de twintigste eeuw, een passende collectie open opgaven zouden bevatten. Dit laatste bleek evenmin het geval, want pas met de uitgave van de conceptuele methode *Functioneel Rekenen* van Reijnders & Snijders (1958-1959) werd voor het eerst in de geschiedenis van het

rekenonderwijs het maken van vrije producties gevraagd.[3] Deze methode was geïnspireerd door de ideeën van de denkpsychologische school van Kohnstamm.
Al in deeltje 2, bestemd voor de tweede helft van leerjaar 1 (groep 3), van deze methode krijgen leerlingen de opdracht zelf vragen bij een gegeven antwoord te bedenken. In de volgende deeltjes voor groep 4 tot 8 worden daar nog andere typen van vrije producties aan toegevoegd.

> Het zelf bedenken van sommetjes over gegeven getallen, het zelfstandig opsporen van relaties tussen bepaalde gegevens en getallen, en het bedenken van vraagstukjes bij gegeven abstracties zijn functiemogelijkheden van de intelligentie en het onderwijs dient ook deze functies zo goed mogelijk te laten functioneren.

De auteurs spreken in dit verband van *verschillende richtingen uit kunnen denken*, dat wil zeggen van kale opgave naar toepassingsprobleem, en omgekeerd. Als voorbeelden van een en ander noemen ze:

- Zelf sommetjes bedenken bij een gegeven getal, zeg 72;
- Een vraagstukje ontwerpen met 40 + 25; 40 22; 7 x 6; of 24 : 6 als oplossing;
- Vragen formuleren bij een opgave als ‘Zus koopt in een fruitwinkel 6 appels van 5 c per stuk en 8 peren van 7 c per stuk; ze heeft 1 gulden’.

De laatstgenoemde opgave wordt een vraagloos vraagstuk genoemd.
Vanaf het einde van de jaren vijftig verscheen naast *Functioneel Rekenen* nog *Boeiend Rekenen* van Wanders & Böhncke (1958) met eveneens aandacht voor vrije producties bij open vraagstukken. Ook de laatste functionele traditionele methode *Nieuw Rekenen* van Bruinsma e.a. (1969) bevat open opdrachten als:

1. Bereken op verschillende manieren: 7 x 98
2. Maak zelf sommen.
Om een weiland staat een hek.
Het weiland is lang 120 m, breed 80 m.
3. Maak vijf vermenigvuldigingen. De uitkomst is steeds 450.
4. Gevarieerd oplossen van een opgave als:
Moeder koopt bij de groenteboer:
1 bloemkool voor 4 dubbeltjes = … c
2 kroppen sla van 1 kwartje = … c
Samen voor … c
Zij betaalt 1 gulden. Zij krijgt terug … c
Met welke geldstukken kan de winkelier dat teruggeven?

[3] Ook Rombouts vindt variatie in de vraagstukjes belangrijk. *Het verdient sterke aanbeveling, niet alleen telkens van concrete gevallen uit te gaan en telkens weer tot zulke gevallen terug te keren, maar ook, naar aanleiding van een gegeven stof, de leerlingen zelf vraagstukjes te laten samenstellen. De nodige getallen en andere gegevens kunnen uit prijslijsten en dergelijke – die in de klas aanwezig moeten zijn – worden opgezocht* (Rombouts, p.146). Hij beschouwt het zoeken naar open opdrachten als taak van de leraar en neemt vrije producties niet systematisch in zijn methode op. Vandaar dat we de methode van Reijnders & Snijders in dit verband als eerste noemden.

Opgave 1 zet kinderen op het spoor van handig rekenen en cijferen. De overgang van splitsend en van kolomsgewijs naar cijferend rekenen zou volgens de handleiding bij vermenigvuldigen in enkele lessen als volgt kunnen verlopen.

98	98	98
7 x	7 x	7 x
630	56	686
56	630	
686	686	

Afb. 1. Nieuw Rekenen (1969).

Daarnaast zal vooral de handige rekenwijze $7 \times 98 = 7 \times 100 - 7 \times 2 = \ldots$ in de vrije producties van de leerlingen opduiken. De open opgaven, die tot in de middenbouw een passende plaats krijgen toegewezen, verdwijnen in de bovenbouw naar de achtergrond.
Tegelijk met *Nieuw Rekenen* verscheen de functionele methode *Rekenen voor de basisschool* (Van Gerven, 1969) – een methode die mede door de turbulente ontwikkelingen op de methodemarkt al rond 1980 uit het fonds werd gehaald. Het volgende citaat uit de handleiding van deze methode vat goed samen hoe in de traditionele, conceptuele (i.c. functionele) methodes na 1960 over verschillende soorten opdrachten werd gedacht, waaronder die van het nieuwe type open (vrije) opgaven:

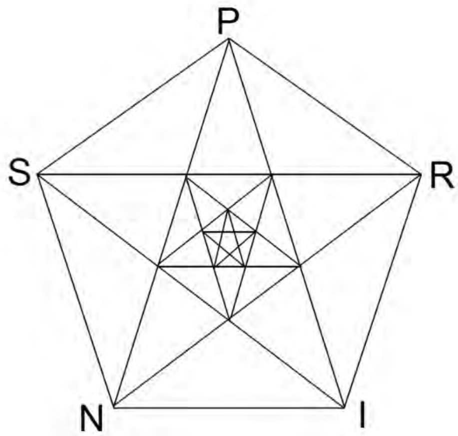
> Aan de verschillende soorten vraagstukjes is veel aandacht besteed: het vraagloze vraagstuk, het volledige vraagstuk (met vraag), het vrije vraagstuk of rekenprobleem en het zelf samenstellen van vraagstukken aan de hand van een berekening (15c + 25c) worden beurtelings aan de orde gesteld.

In het voorgaande zijn, behoudens het gangbare type, van alle genoemde soorten vraagstukken enkele voorbeelden gegeven. Daarbij hebben we wel de kanttekening gemaakt dat er in de traditionele methodes uit de periode 1960-1980 aan de praktische realisering van het nieuwe concept nog wel het een en ander schortte. Zo worden bijvoorbeeld binnen het domein van het kale cijferen, met een totale tijdsduur van een heel schooljaar, in geen enkele traditionele methode stelselmatig open opdrachten opgenomen - een parade van duizenden gesloten opgaven zonder één open vraagstuk!
Zal dit tekort in de moderne methodes van na 1990 zijn opgeheven? Voordat deze vraag zal worden beantwoord, gaan we eerst in op de nationale kerndoelen waarop de nieuwe methodes zijn geënt.

Vrije producties en nationale kerndoelen (1990-1993)

In 1971 stelde het project *WISKunde Op de BASisschool* (Wiskobas) zich ten doel een alternatief te ontwikkelen voor de formele *New Math* waarvoor Nederlandse uitgeverijen eind jaren zestig veel belangstelling kregen. Dit alternatief is het zogenoemde realistische rekenonderwijs dat meer dan het procedurele rekenonderwijs en de New Math op de realiteit en de werkelijkheid van kinderen betrokken is. In de periode 1971-1981 ontwikkelde het Wiskobas-team met en in het onderwijsveld eerst een grote verzameling rijke problemen en thema's, en vervolgens (aanzetten tot) nieuwe leergangen voor verschillende onderwerpen van rekenen, meten en meetkunde. Vanaf het eind jaren zeventig gingen Wiskobas-publicaties en ideeën over realistisch rekenonderwijs als inspiratiebron voor enkele nieuwe methodes fungeren. Eind jaren tachtig werden de rekendoelen voor het eerst in de vorm van een ontwerp van nationale kerndoelen gevat, dat onder auspiciën van de NVORWO onder de titel *Proeve van een Nationaal Programma* (Treffers, De Moor & Feijs, 1989; Treffers & De Moor, 1990) verscheen. Het beschrijvingsmodel van de Proeve volgt de drieslag: onderwijsprincipes; algemene onderwijsleerdoelen; en concrete leerdoelen.

De vraag is nu hoe het maken van vrije producties in deze triade tot uitdrukking komt. De *onderwijsprincipes* van het realistische rekenonderwijs zijn kort via de volgende vijf trefwoorden te benoemen: productie (*P*); reflectie (*R*); interactie (*I*); niveau (*N*); en structuur (*S*). Deze *prinsprincipes* kunnen op grote, middelgrote en kleinere onderwijsblokken worden betrokken: op leergangen, lessenseries, lessen en lesonderdelen met betrekking tot het leren van begrippen, procedures, toepassingen en methoden – zie de krimpende vijfhoek (Afb. 2).



Afb. 2. Samenhang prinsprincipes.

Het *productieprincipe* luidt daarin, kort samengevat, als volgt:

> Kinderen leveren een cruciale bijdrage aan zowel de vorm als de inhoud van het onderwijsleerproces. Hun eigen producties hebben niet alleen betrekking op de specifieke manieren waarop ze de leerstof verwerken, maar ook op het feit dat ze zelf opgaven bedenken en oplossen.
> Deze productieve inbreng kan echter alleen gehonoreerd worden indien het startpunt van het onderwijs bij betekenisvolle, realistische problemen ligt. Naarmate kennis, vaardigheden en inzichten toenemen, gaat echter ook de formele rekenwereld in toenemende mate tot de realiteit, de leefwereld van de kinderen behoren, en kunnen de eigen producties ook op het maken van formele rekenopgaven betrokken worden.

Van de acht algemene onderwijsleerdoelen van de Proeve heeft er één betrekking op vrije producties:

> Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat leerlingen eigen producties maken en leren reflecteren op hun aanpakken.

In Proeve-2 wordt het concrete leerdoel van de vrije productie met onder meer de volgende voorbeelden uit het aanvankelijke rekenen toegelicht. Kinderen van groep 3 kregen de opdracht om aftrekopgaven te maken waar 3 of 5 uitkwam. Mark, die eigenlijk nooit goed meedeed met rekenen, raakte nu wel geboeid en produceerde tientallen opgaven van 4 – 1 tot 27 – 24. En Jon toonde dat hij veel meer kon dan de juf in de verste verten vermoedde: 6 – 1; 8 – 3; 17 – 12; 30 – 25; 100 – 95; 2000 – 1995; 10000 – 9995 en … 3 – 8 = min 5.
De ontwikkelaar-onderzoeker Van den Brink (1989, p. 135) ging nog een stap verder:

> Het maken van eigen producties in de oefenfase (zelfstandig bedenken van opgaven en dergelijke) wordt door de kinderen zeer gewaardeerd. Deze activiteit kan in een ruimer kader worden geplaatst door de kinderen een rekenboek te laten ontwerpen voor de kinderen die het volgende jaar naar groep 3 gaan. Hierdoor komen de eigen producties in een ander licht te staan: je maakt ze ten behoeve van anderen die ze ook gaan gebruiken. 'De kinderen van volgend jaar' werken hier als een zingevende en daardoor stimulerende context.[4]

Tot zover enkele voorbeelden van vrije producties die in Proeve-2 werden beschreven.[5] In de *Kerndoelen basisonderwijs* (OCW, 1993) werden de concrete leerdoelen van de Proeve vrijwel onverkort overgenomen. Alleen het leerdoel van de vrije producties binnen de onderscheiden leerstofdomeinen viel af, met als argument dat het hier niet om een doel maar om een didactisch middel ging. Om dezelfde reden werd ook het genoemde algemene onderwijsleerdoel geschrapt.
In de Kerndoelen zijn er van de acht algemene doelen uit de Proeve slechts vijf geselecteerd, die in 1998 zelfs tot drie werden teruggebracht.

---

[4] Zie ook het hoofdstuk van Maarten Molenkamp.
[5] In de bovenbouw gebeurt iets dergelijks met het rekenen in het Land van Acht aan de hand van figuurtjes uit de tekenfilms van Walt Disney. Zij willen met hun acht vingers op een vergelijkbare manier leren tellen en rekenen zoals wij dat met onze tien vingers doen en daarbij de getallen op een overeenkomstige wijze in een positiesysteem noteren, alleen niet tien- maar achttallig. Het is de bedoeling dat de kinderen uit groep 8 deze achttallige telrij en de bijbehorende notatiewijze met elkaar uitvinden, en vervolgens eenvoudige opgaven leren maken en daarna leren cijferen. Daarbij krijgen ze steeds gelegenheid om zelf opgaven te produceren die in de volgende les besproken worden. De speurtocht door het Land van Acht is geen productleerdoel, maar een procesleerdoel, een middel om over het eigen leerproces van vroeger in het tientallige positiesysteem na te denken. De kinderen blijken buitengewoon veel plezier aan dit rekenkundige uitstapje te beleven. Het onderwijs is interactief: er wordt individueel en in kleine groepjes gewerkt, maar er zijn ook momenten dat de hele groep bijeen is om instructie te krijgen, voorstellen te bespreken en te discussiëren. De leerkracht speelt hierin een cruciale rol. Soms is die terughoudend, een andere keer stuurt zij/hij het leerproces bij of geeft de kinderen volledig de vrije hand.

De leerlingen leren:

- wiskundetaal gebruiken
- praktische en formele rekenproblemen oplossen
- aanpakken te onderbouwen en te beoordelen.

Hiermee wordt het leren problemen op te lossen als hét algemene kerndoel van het rekenonderwijs aangemerkt: kinderen moeten leren dat bij het rekenen niet alleen routinematig toepassen maar vooral ook nadenken vaak nodig is om problemen uit het leven van alledag en formele opgaven te kunnen oplossen. Dit algemene kerndoel kan uiteraard alleen gerealiseerd worden met een positieve wiskundige attitude en via de concrete leerdoelen uit de rekendomeinen waartoe de basisvaardigheden, cijferen, verhoudingen en procenten, breuken en kommagetallen, en meten en meetkunde behoren. Het algemene doel van de vrije producties werd, zoals gezegd, geschrapt omdat er geen onderscheid in product- en procesdoel werd gemaakt. Het volgende voorbeeld over cijferend aftrekken laat nog eens zien hoe belangrijk dit onderscheid is.

Maak een makkelijke, een wat moeilijkere en een moeilijke opgave.

● ● ●
● ● ● -
―――――
● ● ●

De opgave is een concretisering van het algemene doel betreffende het maken van vrije producties en het reflecteren op de eigen aanpak. Impliciet wordt de kwestie van het *lenen* aan de orde gesteld, waaronder het problematische lenen van nul. In de klassikale nabespreking kan achtereenvolgens het niet lenen, het één en het twee keer lenen uitgebreid worden toegelicht. *Waarom vind je deze voorbeeldopgave eenvoudig, die gewoon en de derde moeilijk?* Deze kernvraag kan leiden tot het reflecteren op de moeilijkheidsgraad van de eigen producties. Hetzelfde geldt voor het rekenen met lenen, dat op verschillende manieren kan gebeuren. De vijf prins-principes komen in het maken en het interactief, klassikaal nabespreken van deze open opgave helder tot uitdrukking. De vraag is nu of met dergelijke open opgaven een welomschreven productdoel wordt nagestreefd, of dat zij louter als didactisch middel fungeren:

- Is het zelf bedenken van rekenvragen en berekeningen via open opdrachten geen procesleerdoel-op-zich, ook al kan het tegelijkertijd als didactisch middel worden aangemerkt?
- Hebben didactische middelen op zichzelf genomen geen persoonlijke en vakspecifieke - zeg vormende - werking en waarde?
- Genereert niet ieder *hoe* tegelijk ook een *wat*?

Het antwoord van de Proeve-auteurs op deze vragen luidt driewerf *ja, dat is wel het geval*. Anders gezegd: de verwijdering van het algemene productiedoel uit de officiële kerndoelen was vakdidactisch bezien, niet verantwoord. Het gevolg voor de methode- en toetsontwikkeling bleek ingrijpend: de open opgaven werden niet systematisch in de nieuwe methodes verwerkt, de aanzet tot de didactische vernieuwing in de periode 1950-1990 stokte.

Terug naar de toekomst

Open opdrachten kwamen, zoals we eerder zagen, tot 1950 niet of nauwelijks in de rekenmethodes voor. En ze werden vervolgens na 1990 betrekkelijk weinig, laat staan systematisch, aangeboden. Dit is opmerkelijk, omdat ze mede een krachtig didactisch middel vormen, waarmee het plezier in rekenen verhoogd kan worden en de opbrengst ervan verbeterd.[6]
In het volgende zal deze vaststelling feitelijk worden onderbouwd aan de hand van het eerdergenoemde cijferende aftrekken – niet bepaald het meest aansprekende onderwerp, maar juist daarom uitermate geschikt om het pleidooi voor vrije producties kracht bij te zetten. We kiezen de methode *Pluspunt* (Van Beusekom, 2010) als voorbeeld, maar voegen er direct aan toe dat wat daarover wordt opgemerkt, onverkort op alle andere methodes van toepassing is. Welnu, de goed uitgelijnde leergang van cijferend aftrekken wordt in de tweede helft van groep 6 begonnen en voor dit type opgaven aan het einde ervan afgesloten - in de volgende leerjaren wordt ze onderhouden en uitgebreid met grotere getallen en kommagetallen.
Van de honderd opgaven in deel 6 van het lesboek en het (tweede) opdrachtenboek staan er zeventig in de directe vorm, zoals:

$$\begin{array}{r} 5\ 9\ 3 \\ \underline{2\ 0\ 7-} \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

Van die collectie is er zegge en schrijve één open:

> Maak 6 aftreksommen met de kaartjes 3, 5, 7, 9, 0 en 2.
> Gebruik in elke som elk cijfer 1 keer.
> Reken de sommen onder elkaar uit.

Een open opgave als de volgende wordt node gemist.

[6] Zie bijvoorbeeld Selter (1994) en Menne (2001).

Maak een makkelijke, een wat moeilijkere en een moeilijke opgave.

•	•	•	
•	•	•	-
2	4	5	

De overige dertig opgaven zijn opgaven met twee of drie open plaatsen die opgevuld moeten worden om de aftrekopgave kloppend te maken:

7	0	•			8	2	7	
•	4	6	-		•	•	•	-
3	6	1			6	6	9	

Dit zijn interessante *vlekopgaven*, zoals ze wel worden genoemd, vanwege de vlekken die op de plaatsen van de bedekte cijfers staan. Maar geen enkele ervan bevat de open opdracht om ze zelf te ontwerpen: een makkelijke, een niet zo makkelijke en een uitgesproken moeilijke aftrekopgave. Ook de algemene open vraag kan worden gesteld om zoveel mogelijk cijfers van de volgende aftrekopgave weg te laten (te bedekken) om de oorspronkelijke opgave te kunnen terugvinden.

6	3	7	
2	8	9	-
3	4	2	

Daarna kunnen de leerlingen zelf verschillende vlekopgaven met drie open plaatsen construeren. Ontdekken ze dat er, algemeen gesproken, willekeurig één cijfer per kolom bedekt kan worden? Met deze vraag en de open opdrachten die daar uit voortvloeien, worden de algemene doelen van het maken van vrije producties en die van het probleemoplossen met elkaar verbonden.

Al met al kan vastgesteld worden dat de weldoordachte leergang van Pluspunt nog met een tiental open opdrachten van vrije producties verrijkt kan worden. Dezelfde conclusie geldt uiteraard voor het cijferende optellen, vermenigvuldigen en delen, en voor een combinatie van de vier basisbewerkingen. Van de laatste, samengestelde categorie tot slot een klassiek voorbeeld, bestemd voor leerlingen van groep 8 … en voor de lezer!

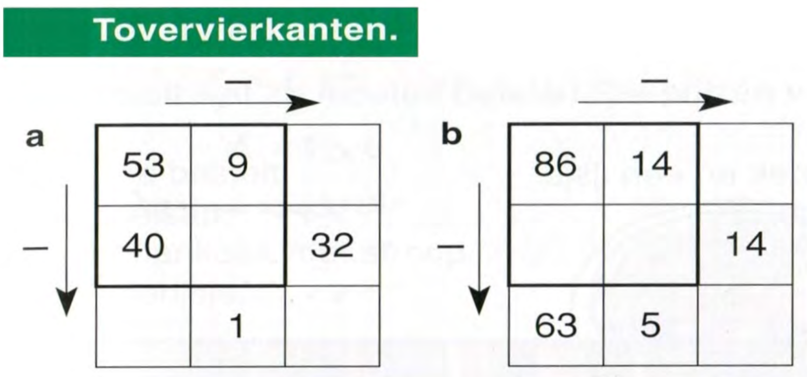
Vul de negen stippen met de cijfers 1 tot en met 9 zodanig in, dat het verschil van de twee producten zo klein mogelijk wordt.

Deze opgave is in twee opzichten open: het kleinst mogelijke verschil blijft ongenoemd, maar ook als dat wel zou gebeuren door te eisen dat de uitkomsten gelijk moeten zijn, dan nog blijven er meerdere oplossingen voor dit klassieke probleem over.[7]

Besluit

Tot zover enkele aantekeningen over de vrije producties in de leergang van het kale, cijferende aftrekken. Het zal duidelijk zijn er dat bij het maken van toepassingsopgaven c.q. contextproblemen ook speelruimte voor open opgaven bestaat. De categorie van de vraagloze vraagstukjes, die eerder werden genoemd, zijn daar een voorbeeld van. De actuele methodes bevatten daarnaast nog tal van andere tekstuele en figurale vormen om vraagstukken in te kleden en die bieden zelfs nog meer mogelijkheden voor het maken van vrije producties in de domeinen van basisvaardigheden, cijferen, verhoudingen, procenten, breuken, kommagetallen, meten en meetkunde. Om daar enigszins zicht op te kunnen krijgen, kan men het beste een methode ter hand nemen en per pagina of blok nagaan welke opgaven open zijn - want die staan er meestal wel degelijk in - en waar mogelijkheden liggen om ze op zinvolle wijze open te maken.

Maak de opgaven. Ontwerp daarna zelf nieuwe tovervierkanten.



Afb. 3. Dit vierkant komt uit De Wereld in Getallen (3e editie) (Huitema e.a., 2001), maar dan wel zonder de open opdracht om zelf een tovervierkant te ontwerpen.

[7] In Gardner (2006, p.65 en p.77) wordt dit probleem van de beroemde recreatieve puzzelontwerper Dudeney, uit de negentiende eeuw, besproken. Er zijn elf oplossingen met een verschil van nul. Een tip: de grootste gelijke uitkomst wordt verkregen door in de twee-maal-drie vorm de cijfers 1 tot en met 5 te plaatsen!

Het zou te ver voeren om hier - meer dan in het voorgaande met het cijferen gebeurde - over mijn eigen ervaringen tijdens die speurtocht te berichten. Maar mijn meest belangwekkende ervaring wil ik de lezer niet onthouden: er blijkt zich een nieuw didactisch venster te openen! In het volgende probleem neemt dit rekenvenster, doeltreffend en veelzeggend, de modelvorm van een tovervierkant aan (Afb. 3).

Mijn algemene aanbeveling voor het rekenonderwijs van de toekomst luidt: vergroot bij het oefenen van basale rekenvaardigheden, bij het probleemoplossen, en bij de combinatie ervan, de eigen inbreng van kinderen door middel van vrije producties via open opdrachten.

Verder lezen?

Weg van het cijferen: http://adritreffers.nl/.

Literatuur

Bruinsma, B. (red.) (1969). *Nieuw Rekenen. Algemene Inleiding*. Baarn: Bosch en Keuning

Diels, P.A., & J. Nauta (1939). *Richtlijnen voor het rekenonderwijs op de lagere school*. Groningen: Wolters.

Gardner, M. (2006). *The Colossal Book of Short Puzzles and Problems*. New York: Norton.

Huitema, S. e.a. (2001). *De Wereld in Getallen (3e editie)*. Den Bosch: Malmberg.

Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100* (diss.).Utrecht: Freudenthal Instituut.

OCW (1993). *Kerndoelen basisonderwijs*. Den Haag: Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen.

Rombouts, S. (1948). *Geef Acht! Nieuwe Rekencursus voor de Handleiding voor derde en volgende leerjaren.* Tilburg: R.K. Jongensweeshuis

Selter, Ch. (1994). *Eigenproductionen im Arithmetikunterricht* (diss.). Wiesbaden: Deutsche Universitätsverlag..

Treffers, A., De Moor, E., & Feijs, E. (1989). *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1. Overzicht einddoelen*. Tilburg: Zwijsen

Treffers, A. & De Moor, E. (1990). *Proeve van een Nationaal Programma rekenen-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. (2015). *Weg van het cijferen. Rekenmethodes vanaf 1800 tot heden*. Utrecht: Universiteit Utrecht.

Van Beusekom, N, e.a. (2010). *Pluspunt*. Den Bosch: Malmberg.

Van den Brink, J. (1989). *Realistisch rekenen aan jonge kinderen* (diss.).Utrecht: OW&OC.

Van Gerven, J., (1969). *Rekenen voor de basisschool*. Den Bosch: Malmberg.

Van Pelt, D. (1903). *Overzicht der methode gevolgd in 'De Nieuwe Rekencursus'*. Tiel: Mijs.

Versluys, J. (1889). *De methodiek van het rekenen.* Amsterdam: W. Versluys.

Wanders, W. & S. Böhncke (1958).*Boeiend rekenen*. 's Hertogenbosch: Malmberg.

Zandvoort, R.; H. Venekamp & N. Kuipers (1955-1970). *Naar Zelfstandig Rekenen*. Groningen: Wolters Noordhoff.

Productief oefenen

Julie Menne, Menne Instituut

Inleiding

Productief oefenen is een krachtig didactisch middel dat inzetbaar is door de gehele basisschool. Het combineert eigen producties van leerlingen met oefenen en bevordert zodoende het leren van basiskennis- en vaardigheden. Doordat leerlingen creatief nadenken over de leerstof, komen ze bovendien tot dieper inzicht. In dit artikel wordt per cluster van twee groepen een voorbeeld gegeven van een productieve oefenles. Hiermee wordt duidelijk wat onder productief oefenen in het algemeen en het laten maken van eigen producties in het bijzonder wordt verstaan.

Groep 1&2: Bekerbal

Om alvast even te oefenen voor de naderende sportdag heeft de leerkracht *Bekerbal* meegenomen. Dit bestaat uit zestig bekers in zes verschillende kleuren.[1] Ze laat tien bekers van eenzelfde kleur zien. Wie kan er een toren bouwen met deze bekers? Nadat kinderen spontaan de bekers zijn gaan tellen en in en op elkaar hebben gestapeld, vraagt de leerkracht of ze een toren volgens de principes van het halfsteensverband kunnen bouwen. Dat lukt (Afb. 1).

Afb. 1. Lisa bouwt een toren met tien bekers volgens halfsteensverband.

Het is een driehoek geworden, concludeert Simon. De leerkracht trekt met haar vinger langs de zijden en telt hardop: *Een, twee, drie, drie hoeken. Ja, de toren heeft de vorm van een driehoek*. De andere kinderen zien het nu ook. *Hoeveel bekers zitten er in de toren?*, *Als dit een rij is (wijst de onderste laag aan), hoeveel rijen telt de toren dan?*, *Hoeveel bekers staan er in elke rij?* Ze beweegt haar vinger van de onderste rij naar de bovenste rij. De kinderen tellen: *Vier, drie, twee, een*. Dan kondigt ze aan zogenaamd de bal te gaan gooien en dan moeten de kinderen zeggen hoeveel bekers er zijn omgegooid. Ze vraagt de kinderen de ogen te sluiten, hun hoofd op de knieën te leggen en te denken aan de driehoek. *Zie je de driehoek met vier rijen nog aan de binnenkant van je ogen? Dan is het goed*. Als niemand kijkt, haalt ze vier bekers weg en verstopt deze achter haar rug. *Hoeveel zijn er weg?* Tamara weet het: *Vier*. De leerkracht vraagt dan: *Hoeveel zijn er over?* Verschillende kinderen zeggen *Zes!* als antwoord. *Ja, want samen zijn het tien bekers*, vult de

[1] De bekers maken deel uit van de kist *Rekenmaterialen oefenlessen groep 1&2.*

leerkracht aan. Hiermee lijkt de kous af, maar de leerkracht vraagt: *Wijs eens aan waar jij denkt dat er bekers zijn weggehaald*. Volgens Tamara zijn de bekers van de onderste rij weggenomen (Afb. 2).

de onderste rij weggenomen.

Zij heeft goed aan de oorspronkelijk driehoek gedacht. De leerkracht verklapt dat ze de bekers niet van de onderste rij heeft afgehaald, maar van het trappetje. Om te laten zien wat ze bedoelt, voegt ze aan de zijkant van de toren van onder naar boven per laag een beker toe. Vervolgens herhaalt ze de oefening een paar keer. Bij de vraag hoeveel bekers er zogenaamd zijn omgegooid, brengt ze de oorspronkelijke vorm van de toren in herinnering. Door hieraan te denken kunnen kinderen eenvoudig achterhalen hoeveel er weg zijn. Ze tellen (verkort) wat er niet meer is. De leerkracht vraagt als er slechts een, twee of drie bekers blijven staan, hoe je makkelijk kunt bepalen hoeveel er zijn omgegooid. *Door terug te tellen kun je ook bepalen hoeveel er weg zijn*.
Vervolgens krijgen de bekers een plaats in de rekenhoek. Hier kunnen kinderen in groepjes de oefening naspelen. De leerkracht intervenieert daarbij door te vragen een toren te bouwen met twee verschillende kleuren bekers. Vervolgens stelt ze vragen over de opbouw. *Hoeveel blauwe, hoeveel roze bekers?*, *Welke opgaven passen daarbij?* (Afb. 3) (4 + 1 = 5; 3 + 2 = 5; 5 + 5 = 10; 10 – 5 = 5; …)

Afb. 3. Welke opgaven passen erbij?

Of ze vraagt bijvoorbeeld de toren groter te maken door het toevoegen van zogenaamde trappetjes. *Hoeveel bekers heb je voor elke volgende trap nodig?*, *Hoeveel bekers houd je over?*

Productief versus reproductief

In deze voorbeeldles komen twee voorbeelden van productief oefenen naar voren. Zo is er sprake van een flexibele aanpak. De leerkracht gaat door op wat de kinderen inbrengen. Simon ziet er een driehoek in en de leerkracht brengt bij het bepalen van het aantal weggehaalde bekers het beeld van de driehoek in herinnering. Tamara meent dat de onderste rij is weggehaald en de leerkracht laat zien dat een trappetje weghalen evenveel bekers telt als het weghalen van de onderste rij. Door de kinderen te laten experimenteren met de bekers en de interventies daarbij, is deze oefening voortbrengend en scheppend, ook een kenmerk van productief oefenen. In onderstaand overzicht staan de belangrijkste verschillen tussen productief en reproductief oefenen in kernwoorden.

Afb. 4. De toren groter gemaakt.

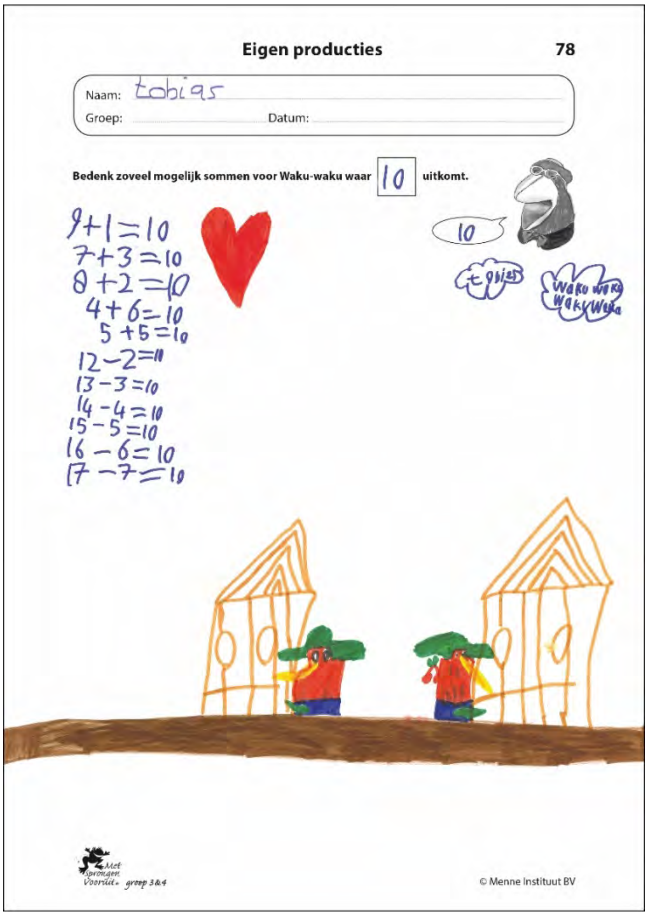
Productief versus Reproductief oefenen	
Flexibele didactische aanpak	Strakke methodische regels
Voortbrengend	Nabootsend
Beoefenen	Inoefenen
Flexibiliseren	Automatiseren
Meersporig, gevarieerd rekenen	Eensporig, receptmatig rekenen
Uitprinten	Inprenten

Groep 3&4: Waku-waku zegt: *Tien!*

De kinderen kennen de verliefde harten uit hun hoofd en de leerkracht staat met een handpop aan haar hand voor de groep.[2] *Dit is Waku-waku en hij kan alleen maar tien zeggen. Om hem nu slim te laten lijken bedenk je zoveel mogelijk opgaven waar tien uitkomt.*[3]

[2] Een verliefd hartenpaar bestaat uit twee hartjes die elk een getal bevatten en aan elkaar vastzitten. De twee hartjes zijn samen tien. Een hartenpaar kan open en dicht worden geklapt. Dus als een kind slechts één hart ziet, kan het bedenken wat op het andere hart staat. In totaal zijn er zes paren: 5 en 5; 6 en 4; 7 en 3; 8 en 2; 9 en 1; en 10 en 0. De verliefde harten maken deel uit van de kist *Rekenmaterialen oefenlessen groep 3&4*.

[3] Waku-waku maakt deel uit van de kist *Rekenmaterialen oefenlessen groep 3&4.*



Afb. 5. Werkblad 78: Waku-waku zegt: Tien![4]

Wie alleen aan de verliefde harten denkt, is snel klaar. De leerkracht oefent daarom eerst mondeling. Ze laat Waku-waku ja knikken als de opgave al is gezegd en nee schudden als het antwoord geen tien is. Wellicht is er een kind dat aan opgaven als: *elf eraf één* of *twintig eraf tien* denkt. Op het rekenrek kan aan de rest van de kinderen worden getoond dat dit inderdaad tien is. Eraf-opgaven kunnen dus ook. *Als je aan eraf-opgaven denkt, zijn de mogelijkheden oneindig*, zegt de leerkracht. Ze noteert de opgave *11 – 1* op het bord. Vervolgens schrijven de kinderen zoveel mogelijk opgaven voor Waku-waku op (Afb. 5). De opgaven van de mondelinge bespreking laat ze op het bord staan. De zwakkere rekenaars zullen ze overschrijven en dit als aanmoediging ervaren.

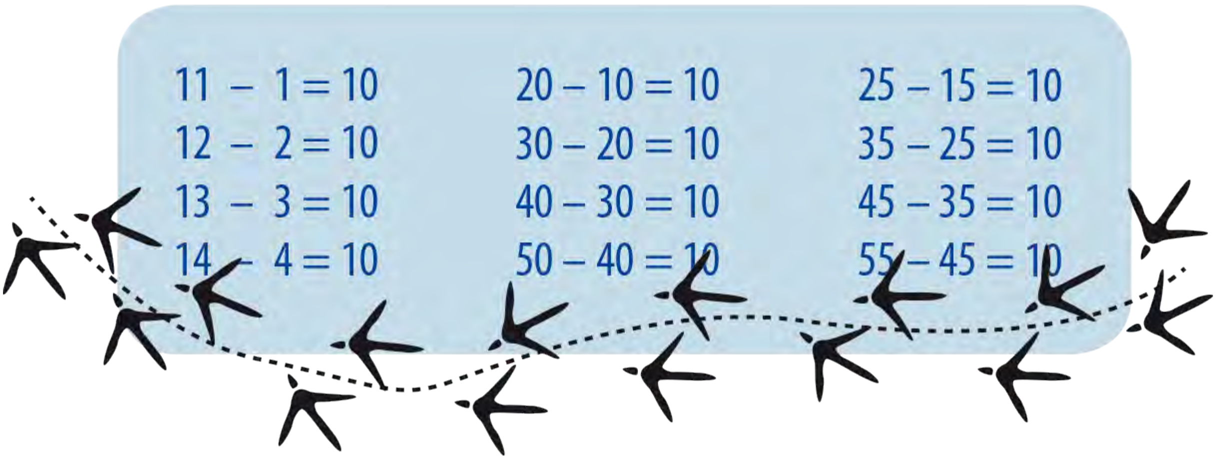
Alle eigen gemaakte producties dienen als matras voor zijn bed in de klas. Hoe meer velletjes met opgaven, hoe zachter Waku-waku ligt en des te beter hij slaapt. En hoe meer uitgerust Waku-waku is, des te meer hij van de kinderen kan leren. In dit voorbeeld bevestigt de leerkracht een doosje met het getal *10* aan de muur. Ze maakt bovenin dit doosje een gleuf. Gedurende de week waarin de kinderen opgaven moeten maken waar tien uitkomt, kunnen ze hun producties in het doosje met *10* posten. Waku-waku houdt de wacht bij de producties. Er is voor een bed met een matras en een deken gezorgd. Na verloop van tijd breidt het aantal doosjes aan de muur zich uit. Waku-waku leert namelijk ook nog andere getallen zeggen (Afb 6).

Afb. 6. Waku-waku leert steeds meer getallen.

[4] Dit werkblad zit in de werkbladenmap die deel uitmaakt van de kist *Rekenmaterialen vervolg groep 3&4*.

Eigen producties generen weer nieuwe producties

Van tijd tot tijd analyseert de leerkracht het werk van de kinderen. Ze zet eigen producties van kinderen die volgens een bepaalde systematiek werken op het bord. Onder de rijtjes tekent ze de pootafdrukken van Waku-waku (Afb. 7). Hij heeft zogenaamd de rest van de rijtjes uitgeveegd. De kinderen krijgen de opdracht een rijtje te kiezen en deze zo lang te maken als ze kunnen.

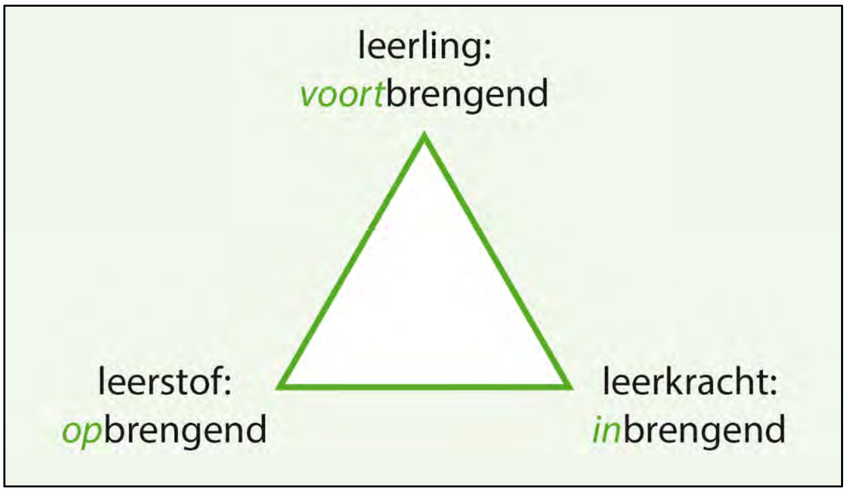


Afb. 7. Waku-waku heeft met zijn pootjes de rest van de rijtjes uitgeveegd. Kies een rijtje uit en maak hem zo lang je kunt.

De leerkracht verwoordt hoe je kunt weten wat de volgende opgave in een rijtje moet zijn: *Elf eraf één is tien wordt gevolgd door twaalf eraf twee is tien en daarna komen dertien eraf drie is tien en veertien eraf vier is tien. Het aftrektal en de aftrekker worden allebei telkens met eentje opgehoogd. De volgende moet dus vijftien eraf vijf is tien zijn. Dat het verschil telkens tien blijft is ook logisch, want als je allebei op dezelfde dag een jaartje ouder wordt, blijft de een altijd hetzelfde aantal jaren ouder dan de ander.*

Eigen producties als didactisch middel

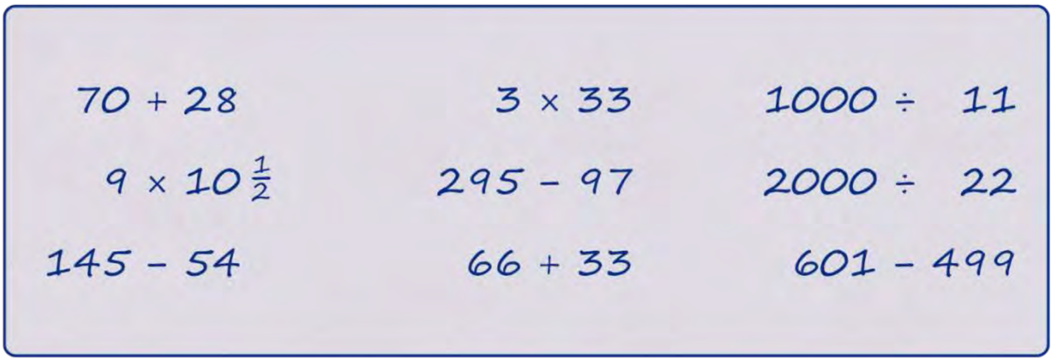
Met het laten maken van eigen producties heeft de leerkracht een didactisch middel in handen waarmee de essentie van het productief oefenen in de praktijk kan worden gebracht. Zij heeft een inbrengende rol en bedenkt dat Waku-waku bijvoorbeeld *tien* kan zeggen. De kinderen hebben een voortbrengende rol en produceren zoveel mogelijk opgaven waar tien uitkomt. Voor de leerstof is dit opbrengend. Kinderen ontdekken structuren in de telrij, eigenschappen van operaties, de relatie met andere operaties en strategieën voor het handig en verkort oplossen van opgaven. Ook raken ze vertrouwd met de formele opgaventaal en worden basisfeiten met behulp van eigen producties (verder) ingeslepen. Eigen producties bestaan hier hoofdzakelijk uit het bedenken van opgaven door de kinderen. De kern van het productieve oefenen – het zogenaamde productivisme – ziet er in de didactische driehoek als volgt uit (Afb. 8):



Afb. 8. Didactische driehoek van het productivisme.

Groep 5&6: Vreemde eend in de bijt

De leerkracht kondigt aan dat het getal van de dag *ongeveer honderd* is. *Wie weet een opgave waar ongeveer honderd uitkomt? Schrijf maar op je wisbordje*.[5] Ze geeft als tip dat ze aan de vrienden van honderd kunnen denken en daar dan iets van af kunnen halen of bij kunnen doen. Gedacht kan dus worden aan *50* + *51* of *38* + *60*. *Wie weet een aftrekopgave waar ongeveer honderd uitkomt?* De kinderen houden hun wisbordje omhoog en ze noteert een aantal opgaven van de kinderen op het bord. Ze komen met opgaven als *101 – 2* en *200 – 101*. Dit doet haar besluiten ook naar aftrekopgaven met grotere getallen te vragen. *1000 – 901* en *543 – 444* zijn daar voorbeelden van. *Tussen welke getallen moet het antwoord liggen zodat we nog kunnen spreken van ongeveer 100?* De kinderen kiezen als ondergrens negentig, dus – *10*, dan moet de bovengrens + *10*, dus honderdtien zijn. Vervolgens krijgen ze de opdracht om opgaven met *ongeveer 100* als uitkomst te noteren op hun wisbordje. Dit mogen ook keer- en deelopgaven zijn. *Maar let wel, er moet één vreemde eend in de bijt tussen zitten. Deze hoort er niet bij*. Voorbeelden van opgaven met uitkomst ongeveer 100 en een vreemde eend in de bijt zijn:

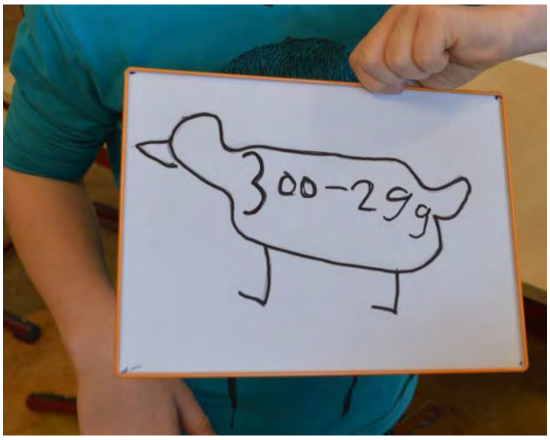


Afb. 9. '295 – 9' is de vreemde eend in de bijt, omdat hier niet 'ongeveer 100' uitkomt.

[5] De wisbordjes en stiften maken deel uit van de kisten *Rekenmaterialen oefenlessen groep 3&4*, *5&6* en *7&8* en zijn ook los verkrijgbaar.

Wie de voorkant heeft volgeschreven, tekent op de achterkant van zijn wisbordje een eend en noteert daar de opgave in die op de voorkant als vreemde eend in de bijt geldt. Vervolgens zoeken de kinderen die klaar zijn bij elkaar de vreemde eend in de bijt. Dit gaat volgens de coöperatieve werkvorm *Mixen en fixen*: de kinderen lopen door het lokaal met hun wisbordje en een hand in de lucht ten teken dat ze vrij zijn. Als ze iemand tegenkomen die ook vrij is, begroeten ze elkaar met een *high five*. Vervolgens laten ze elkaar de voorkant van hun wisbordje zien en wijzen ze bij elkaar de vreemde eend in de bijt aan (Afb. 10, 11). Voordat ze de wisbordjes omdraaien leggen ze uit waarom ze dat denken. Tot slot bedanken ze elkaar met een *high five* en lopen allebei verder op zoek naar een ander vrij kind waarvan ze de vreemde eend nog niet hebben opgezocht. In de nabespreking stelt de leerkracht aan de orde hoe je de vreemde eend in de bijt kan vinden zonder van elke opgave het precieze antwoord te berekenen. In een volgende oefenles herhaalt ze deze oefening met andere mooie, ronde getallen zoals duizend en tweehonderdvijftig.

Afb. 10. Wie klaar is, loopt rond en zoekt bij een ander kind de vreemde eend in de bijt.

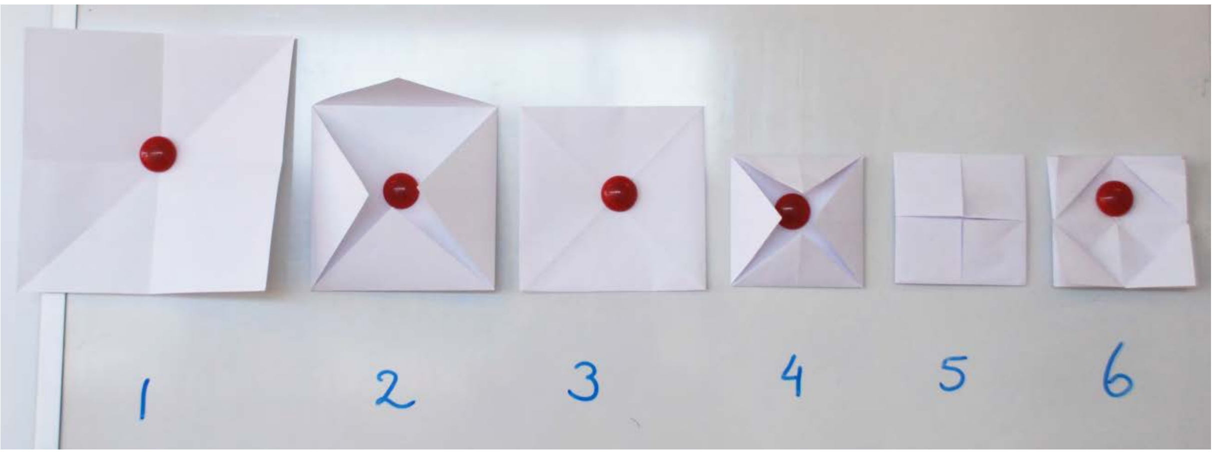


Afb. 11. Ter controle wordt het wisbordje omgedraaid. De vreemde eend is zichtbaar.

In deze productieve oefenles staat het gebruik maken van regels voor afronden bij bewerkingen centraal. Het algemene doel van schattend rekenen is dat kinderen eind groep 6 getallen tot 100.000 kunnen afronden volgens de standaardregel en ze kunnen van afgeronde getallen aangeven in welk gebied het oorspronkelijke getal gelegen heeft. Ook kunnen ze optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen in dit getallengebied waarbij ze afronden volgens de standaardprocedure. Het laten maken van eigen producties heeft hierbij een aantal belangrijke voordelen. Deze voordelen worden toegelicht aan de hand van de voorbeeldles voor groep 7&8: *Breukenhapperen*.

Groep 7&8: Breukenhapperen

De kinderen hebben samen met de leerkracht een breukentafel ingericht en zodoende kennisgemaakt met uitspraak en notatie van breuken, een aantal aspecten van breuken (deling, maat en deel-geheel) en modelcontexten voor breuken (pizza, schaakbord, schaal tank, verzameling poppetjes). Ze zitten echter nog steeds in de fase van de begripsvorming omtrent breuken en de leerkracht besluit het begrip verder te verdiepen aan de hand van het laten maken van een breukenhappertje. Van een vierkant vel papier vouwen de kinderen het happertje aan de hand van de vouwreeks (Afb. 12).



Afb. 12. Vouwreeks voor het happertje.

Het vouwsel verkregen bij stap 6 draaien ze om en vervolgens tekenen ze voor elk half driehoekje een opdracht. In totaal moeten er acht opdrachten worden getekend. De antwoorden worden achter de betreffende driehoekjes geschreven. De vraag moeten ze zelf onthouden. De leerkracht heeft een voorbeeld-happertje gemaakt waarop elk model (cirkel, rechthoek, strook en groep) vertegenwoordigd is. Ze bespreekt haar happertje voordat de kinderen aan de slag gaan. De vraag bij de vijf smileys (groepjesmodel) waarvan er vier lachen luidt: *Welk deel van de smileys lacht?* ($\frac{4}{5}$)

Afb. 13. Op het breukenhappertje tekenen de kinderen acht opdrachten. De antwoorden noteren ze achter. de opdrachten.

Als er een aantal kinderen klaar is kan het *Mixen en fixen* beginnen. Dit gaat zoals beschreven bij de oefenles: *Vreemde eend in de bijt*. Nieuw is dat een gevormd paar eerst de code kraakt en dan een opdracht kiest. Het ene kind noemt daartoe een breuk (met in de noemer minimaal 2 en maximaal 10), bijvoorbeeld $\frac{1}{6}$.

Het andere kind vult tellend met breuken aan tot 1, in dit voorbeeld:

$\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$ en $\frac{5}{6}$, (want $\frac{1}{6}$ + $\frac{5}{6}$ = 1).

Hij beweegt hierbij op elke tel met zijn duimen en wijsvingers in de daarvoor bedoelde driehoekjes het happertje van de ene stand (er zijn vier tekeningen te zien) naar de andere stand (er zijn vier andere tekeningen te zien). Op de laatste tel wordt gestopt en kiest het ene kind een opdracht van de vier opdrachten die nu te zien zijn. De ander stelt de vraag die hierbij hoort. Het antwoord wordt gecontroleerd door het happertje te openen. Hierna wisselen ze van rol.

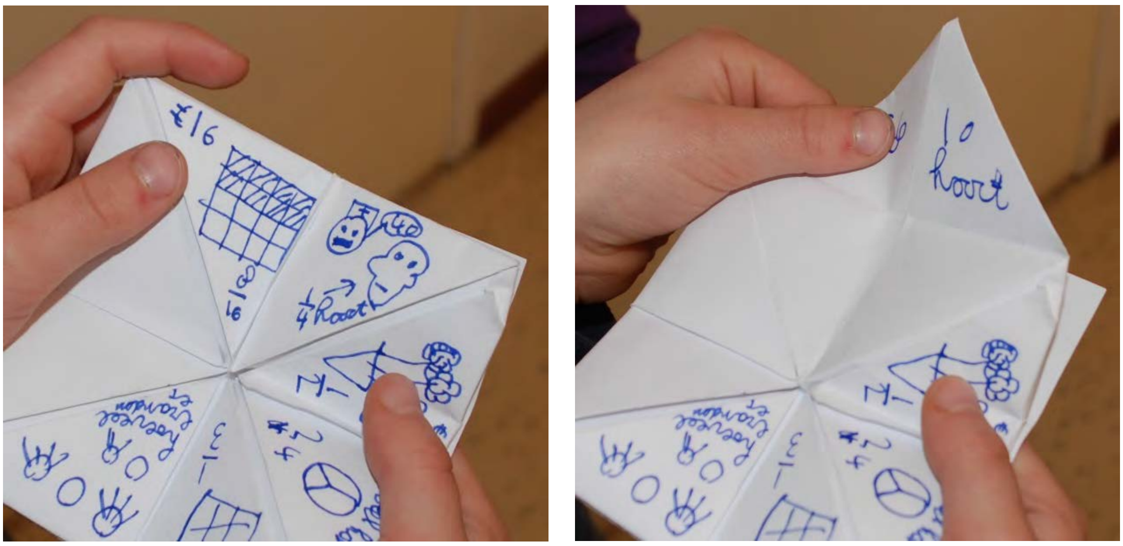
In de nabespreking worden opmerkelijke opdrachten interactief, klassikaal besproken. *Kijk nog eens naar de opdracht met de zes poppetjes waarvan er twee rood zijn en vier groen* (Afb. 13). *Welk deel is rood?*

Dat is $\frac{2}{6}$, maar ook $\frac{1}{3}$!

Tot besluit: voordelen eigen producties

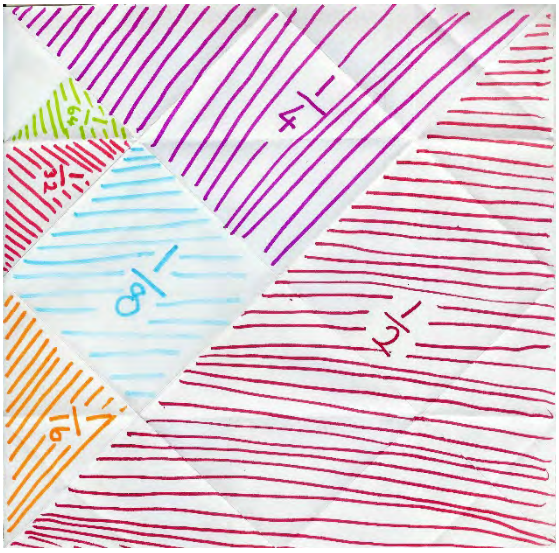
In reguliere methoden ontbreken productieve oefenlessen en het laten maken van eigen producties veelal. Wat is nu het voordeel van zo'n les, vergeleken met een methodegebonden les? Het laten maken van eigen producties:

- Geeft inzicht in wat kinderen kunnen.
  Tekenen ze de voorbeelden alleen maar na? Of kunnen ze erop variëren? Lukt het om de opdracht erbij te verzinnen of hebben ze steun aan woorden op het bord zoals *Welk deel van …?* Kunnen ze met kommagetallen, procenten en verhoudingen ook een happertje maken?
- Sluit aan op de zone van de naaste ontwikkeling.
  Gaat deze oefening goed dan kan er ook eens een breukenhappertje worden gemaakt waar de breuk als operator fungeert (Afb. 14). Als dit niet lukt, moet wellicht terug gestapt worden naar het maken van een happertje waarmee de tafels van vermenigvuldiging ingeoefend kunnen worden.



Afb. 14. De dokter zegt: Veertig. De patiënt hoort voor één vierde deel en antwoordt: Tien!

- Biedt mogelijkheden om te differentiëren.
Inhoudelijke differentiatie: Ieder bedenkt naar eigen kunnen een happertje. Voor kinderen wie dat willen is er een voorbeeld-happertje.
Organisatorische differentiatie: Als er zes à tien kinderen klaar zijn met het vullen van hun happertje kan het rondlopen en oplossen van elkaars happertje reeds beginnen. Niet iedereen hoeft acht opdrachten te bedenken. Als je in beide standen twee opdrachten hebt, valt er tijdens Mixen en fixen ook al wat te kiezen.
- Helpt kinderen sneller door de leerstof.
Bij het maken van happertjes kruipen de kinderen in de rol van methodemakers. Dit betekent dat ze boven de leerstof uitstijgen. In korte tijd boeken ze meer leer-rendement dan wanneer ze slechts volgen van wat iemand anders voor hen heeft bedacht.
- Maakt schrappen in de methode eenvoudiger.
Alles is aan de orde geweest: soorten breuken, aspecten van breuken, model-contexten / ondersteunende modellen.
- Werkt stimulerend en motiverend.
Alleen al het vooruitzicht te mogen rondlopen als je happertje af is, zorgt voor enthousiasme en vlijt.
- Genereert weer nieuwe producties.
Laat het happertje openvouwen en vraag : $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ en: $\frac{1}{64}$ op de achterkant te arceren (Afb. 15). Wat valt op? Tot hoever kun je doorgaan?



Afb. 15. Opengevouwen happertje met een voorbeeld van oplossing.

Menne Instituut

Onder de naam *Met Sprongen Vooruit* geeft het Menne Instituut gerichte cursussen in de reken-wiskundedidactiek. Er zijn cursussen voor leerkrachten in groep 1&2, 3&4, 5&6 en 7&8. Kenmerkend voor de cursussen is dat leerkrachten zich bekwamen in het geven van productieve oefenlessen. Deze oefenlessen geven ze al direct na de eerste bijeenkomst, drie keer per week, steeds gedurende een kwartier. De lessen passen in de leerlijnen en zijn dus inzetbaar naast elke reken-wiskunde-methode. Doordat de lessen interactief van aard zijn en eigen producties de rode draad vormen, vervullen ze binnen de kortste keren zelfs een kartrekkersfunctie op reguliere reken-wiskundemethoden. Cursus- en rekenmaterialen ondersteunen de leerkracht hierbij. Ze dragen bij aan de benodigde vakdidactische kennis, vaardigheden, inzichten en attitude om goede productieve oefenlessen te kunnen geven. Meer informatie vindt u op http://www.metsprongenvooruit.nl/.

Cijfersoep

Creatief oefenen van de basisbewerkingen tot 100

Inge Dingemans

Het automatiseren van optel- en aftrekopgaven tot 20 en de tafels van vermenigvuldiging tot 100 is essentieel voor de verdere rekenontwikkeling. Zonder oefening en herhaling beklijft deze kennis niet. Maar is het uit het hoofd leren van bijvoorbeeld de tafels nog wel van deze tijd? Hoe lang worden de hersenen op hoofdrekengebied nog uitgedaagd? Rekenmachines, computers en internet laten delen van onze hersenactiviteit en geheugen naar mijn idee verwaarloosd achter. Met andere woorden: de toename van automatisering van onze leefwereld leidt tot een afname van geautomatiseerde rekenkennis in ons hoofd. Ik bedacht het spel *Cijfersoep* om het oefenen van hoofdrekenen voor kinderen meer betekenis te geven en aantrekkelijker te maken.

Het belang van oefenen bij hoofdrekenen

In het rekenonderwijs worden vaardigheden constant verdiept en verder uitgebreid op basis van eerder opgedane kennis. Zo is hoofdrekenen in de onderbouw essentieel voor het oplossen van opgaven met grote getallen in de bovenbouw (Oonk e.a., 2011). Het goed en snel kunnen hoofdrekenen tot 100 is belangrijk omdat het de verdere rekenontwikkeling kan bepalen. Effectief leren hoofdrekenen op basis van begripsvorming en inzicht helpt voorkomen dat leerlingen later grijpen naar methodes waarvoor minder inzicht vereist is (bijvoorbeeld cijferen) (Bandstra e.a., 2013). Ook het protocol ERWD (Van Groenestijn, Borghouts & Janssen, 2011) stelt dat de leerlingen die het automatiseren en memoriseren van optel- en aftrekopgaven tot 20 en keeropgaven tot 100 niet voldoende beheersen, kunnen stagneren in de algemene rekenvaardigheid. Het protocol pleit dan ook voor veel meer aandacht voor begripsvorming en goede procedurele kennis voordat tot automatiseren wordt overgegaan. Daarnaast is hoofdrekenen de basiskennis die ervoor zorgt dat het werkgeheugen niet overmatig belast wordt. Wanneer de basis van hoofdrekenen ontbreekt, moet de leerling extra deelstappen nemen tijdens het oplossen van een opgave. Zeker bij zwakkere leerlingen kan dit leiden tot verlies van overzicht en vervolgens tot het maken van fouten (Desoete e.a., 2010).
Uit het bovenstaande kunnen we vaststellen dat er ook in de toekomst nog voldoende aandacht voor hoofdrekenen zou moeten zijn. De fase van automatiseren (steeds efficiënter en sneller de juiste procedurele kennis toepassen tot het een automatisme wordt) en memoriseren (uit het hoofd leren) leidt nog vaak tot 'tafels stampen' en eindeloze opgavenrijtjes maken. Dit soort rekenwerk doet weinig voor de intrinsieke motivatie van veel leerlingen. In interactieve lessen moet de leerkracht eerst voldoende aandacht besteden aan de betekenisverlening, vervolgens leert zij de juiste procedures aan en daarna is het tijd om te gaan oefenen. Als leerkracht heb ik ervaren dat het spelenderwijs oefenen van opgaven helpt om de intrinsieke moti-

vatie te bevorderen. Een spel maakt de meeste leerlingen enthousiast en maakt de leertaak meer betekenisvol voor hen.

Puzzelend hoofdrekenen met Cijfersoep

Het spel Cijfersoep helpt kinderen (en volwassenen) het hoofdrekenen op een speelse manier te oefenen door opgaven te maken met de warboel van cijfers uit de soep. In plaats van het uitrekenen van een gegeven opgave, is opgaven maken met Cijfersoep meer een puzzel. Het is de bedoeling om de cijfers uit de pan goed te combineren tot getallen die opgaven en uitkomsten vormen. Het doel is om de zo hoog mogelijke uitkomsten te vinden, aangezien deze de punten vormen. Het spel leert geen nieuwe vaardigheden binnen het hoofdrekenen, maar helpt opgedane vaardigheden te verbeteren door oefening. Waar een spelronde slechts vijf opgaven bevat, betekent dit niet dat er maar vijf opgaven uit het hoofd berekend moeten worden. Dit zou kunnen, maar het spelelement om telkens de hoogste uitkomst te ontdekken daagt uit tot meer.

Afb. 1. Het materiaal van Cijfersoep.

Het spel gaat als volgt. Eerst kiezen de spelers een opgavenbord. Er is een bord voor elk van de hoofdbewerkingen optellen en aftrekken, vermenigvuldigen of een combinatie hiervan. Ieder opgavenbord bevat tevens een vraagteken, waarbij de speler zelf de rekenbewerking mag invullen. Iedere speler pakt vervolgens zonder te kijken tien cijferblokjes uit de pan. Het zoeken naar opgaven kan nu voor alle spelers tegelijk beginnen. De spelers zoeken in hun cijfers naar zowel de opgave als de bijpassende uitkomst. Deze leggen zij neer op het opgavenbord bij de juiste rekenbewerking, waarbij er op willekeurige volgorde gewerkt mag worden. De cijferblokjes die gelegd zijn kunnen niet meer veranderd worden. Als iedere speler een opgave gelegd heeft, controleren de spelers elkaars opgaven. Voor de volgende opgave worden de cijferblokjes van de speler weer aangevuld tot tien stuks. Op deze manier zijn er vijf rondes om opgaven te zoeken. Als de opgavenborden vol zijn, telt iedere speler de uitkomsten van de gelegde opgaven op. Het totaal van deze uitkomsten wordt vergeleken met de andere spelers, waarbij de hoogste score wint.

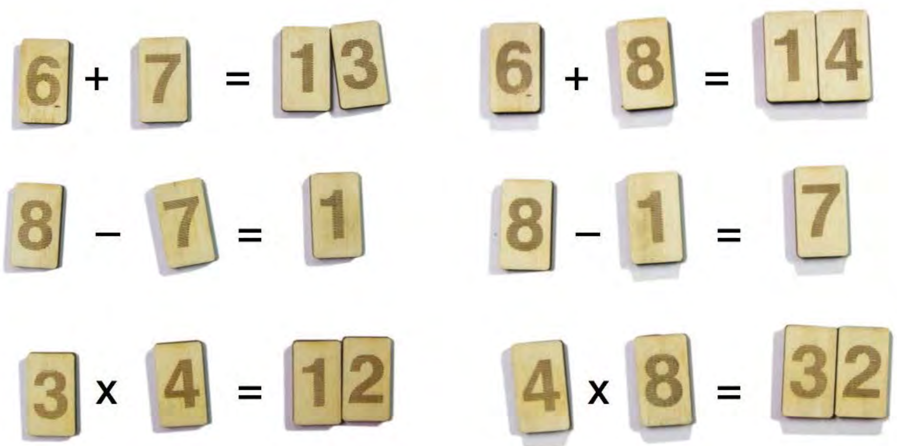
In het voorbeeld hieronder is te zien hoeveel redeneren er nodig is bij het kijken naar slechts tien cijfers.

Voorbeeld

Afb. 2. Getallencombinatie.

Met deze tien getallen zijn, zelfs zonder joker, vele combinaties mogelijk. Hoe besluit je welke je inzet? Let wel op de regel: in de opgave mogen de getallen niet groter zijn dan tien, in de uitkomst mag dat wel.

- Optelopgaven:
  Je wilt iets met de 8 en 7, de hoogste getallen, maar in de cijfercombinatie zie je de uitkomst 15 niet staan. 6 + 7 = 13 is een hoge score voor de optelopgave, maar 6 + 8 = 14 is de hoogst mogelijke uitkomst. Alhoewel, misschien kan je deze getallen beter inzetten voor een andere bewerking, aangezien de score 20 het hoogst haalbare is binnen de optelopgaven.
- Aftrekopgaven:
  Bij een aftrekopgave moet je niet een te groot deel wegnemen van het eerste getal, want dat kost punten. Je berekent bijvoorbeeld 8 – 7 = 1 of 8 – 1 = 7. Het kan allebei, maar een slimme speler kiest voor de opgave die de meeste punten oplevert. Op zoek naar de hoogste uitkomst probeer je verschillende manieren uit.
- Keeropgaven:
  4 × 3 = 12 of 4 × 8 = 32. Met drie dezelfde cijfers zijn twee opgaven mogelijk met een groot verschil in de hoogte van de uitkomst. Het verschil zit 'm in het vierde getal dat je erbij kiest. De uitkomst 32 is echter nog niet zo hoog binnen de mogelijkheden met keeropgaven waarbij de uitkomst 81 de hoogst mogelijke is. Kun je een opgave met een nog hogere uitkomst ontdekken?



Afb. 3. Enkele van de verschillende mogelijkheden van opgaven die uit de tien cijfers gevormd kunnen worden.

Ander perspectief op oefenen van hoofdrekenen

Cijfersoep doet een beroep op verschillende vaardigheden die de huidige samenleving van onze leerlingen vraagt. Ten eerste nodigt het spel uit tot creatief en

flexibel denken. Hoewel je misschien snel een opgave met antwoord tussen de cijfers ziet staan, daagt het spel uit tot het blijven zoeken naar de opgave met de hoogst mogelijke uitkomst. Er is een geluksfactor: je hebt geen invloed op de cijfers waar je mee moet werken. Verder is het aan de spelers om de cijfers zo te combineren dat ze bij elke gevraagde rekenbewerking tot het beste resultaat leiden. Daarnaast is er sprake van redeneren in denkstappen: wat je doet, hoe je begint, welke cijfers of bewerking je het eerste inzet, heeft consequenties voor het vervolg van je spel. Cijfers die je inzet mag je namelijk niet hergebruiken en je weet niet welke cijfers je er nog bij gaat pakken. Hoe besluit je dan welke opgave je eerst uitwerkt? En op welke manier zet je de jokers slim in?
Als kinderen in tweetallen werken van ongeveer gelijk rekenniveau zal er discussie ontstaan over welke cijfers eerst gebruikt moeten worden en welke je beter kunt bewaren. Dit overleg is heel waardevol. Maar ook als de leerlingen individueel spelen is samenwerking mogelijk. Wanneer een speler vastloopt kan een andere speler zeggen welke uitkomst hij ziet staan. Hierdoor kan de speler die vastloopt bedenken wat de opgave compleet maakt, waardoor deze uiteindelijk zelf toch succes kan ervaren. Leerlingen kunnen in dit spel ook leren hoe ze elkaar kunnen corrigeren als dat nodig is, omdat foute opgaven tot oneerlijk spelverloop leiden.

Kennis en geluk

Cijfersoep is een spel dat in beweging blijft; alle spelers zijn bezig in hun eigen denkproces. Daarnaast zal er optimaal geoefend worden in de speeltijd; de spelers hoeven niet op elkaar of op hun beurt te wachten. Door de verschillende opgavenborden is het spel op meerdere niveaus te gebruiken. Het spel is gemaakt voor kleine groepen kinderen, waardoor het bijvoorbeeld geschikt is als activiteit in een rekencircuit, maar ook in grote groepen kan iedereen actief meespelen (zie daarvoor de uitleg hieronder). Individueel spelen is een optie, maar dan is het verbeteren van de eigen *highscore* de enige *funfactor*. Hoewel de eerste vaardigheden in het hoofdrekenen in groep 3 worden geleerd, is het spel meer geschikt voor leerlingen vanaf groep 4. Eind groep 4 beheersen de meeste leerlingen verschillende bewerkingen (optellen, aftrekken en vermenigvuldigen) en hebben zij zich de juiste procedures daarvoor al meer eigen gemaakt. Dit helpt hen bij het redeneren over de keuze van bepaalde opgaven. Waar goede hoofdrekenaars misschien een voorsprong lijken te hebben, hoeven zij niet altijd te winnen doordat er een geluksfactor in het spel is. Niemand kan namelijk invloed uitoefenen op welke cijfers (of het aantal jokers) er gepakt worden.

Cijfersoep nu al in de rekenles?

Voor de echte Cijfersoep is het fysieke spel nodig, maar dat is nog niet op de markt. Gelukkig is het gemakkelijk een variant van Cijfersoep in de klas uit te proberen. Het verschil is dat in het werkelijke spel iedere deelnemer een eigen cijfercombinatie heeft, waarbij door het leggen van een opgave telkens cijfers weggelegd worden en deze worden aangevuld voor nieuwe. Dit principe behoeft extra tactiek gedurende het spel in hoe je cijfers inzet. De klassikale variant is korter en kan bijvoorbeeld gedaan worden tijdens een introductie, afsluiting of als *energizer* tijdens een rekenles. Het spel kan in groepjes (die samen één deelnemer zijn) of individueel gespeeld worden vanaf groep 4. Hieronder vindt u de regels voor een klassikale variant.

Voorbereiding

Laat eerst de deelnemers tien cijfers noemen, trek tien cijfers uit een grabbelton of bedenk zelf een manier om een combinatie van tien cijfers te verkrijgen. De cijfers worden in het geval van meerdere rondes telkens vervangen voor nieuwe. Schrijf de cijfers op het bord, maar zorg dat deze nog niet zichtbaar zijn voor de klas. Eventueel kan de keuze gemaakt worden om een joker te gebruiken. Dit maakt het spel voor sommige leerlingen makkelijker, maar voor de fanatiekelingen misschien juist lastiger omdat er nog meer keuzes in de opgavenmogelijkheden zijn. Spreek de tijd af en zet een timer. Als de cijfers in beeld komen krijgt de klas een aantal minuten de tijd om te speuren.

Werkvormen

Er zijn twee spelvariaties mogelijk:

	Doel	**Bewerking**	**Winnaar**
1	Zoek naar de opgave met een zo hoog mogelijke uitkomst.	Spreek een rekenbewerking af: werk je met min, plus of keer opgaven?	De winnaar is de leerling of groep die de opgave met het hoogste antwoord heeft gevonden. Bij meerdere rondes schrijft de leerling of groep de opgave en uitkomst op. Aan het einde worden alle uitkomsten opgeteld en wint de hoogste score.
2	Zoek zoveel mogelijk opgaven met goede uitkomsten.	Rekenbewerking kan worden afgesproken, maar alle bewerkingen gebruiken is ook mogelijk.	De winnaar is de leerling of groep die de meeste opgaven heeft opgeschreven binnen de gegeven tijd. Voor beide spelvormen geldt dat andere leerlingen kunnen controleren of de opgaven van de winnaar juist zijn.

Tot slot

Goed kunnen hoofdrekenen en goede kennis van de basisbewerkingen is essentieel voor een goed verlopende ontwikkeling van verdere rekenvaardigheden. Graag daag ik dus mijn leerlingen uit tot het blijven oefenen van hoofdrekenen, maar dan wel op een betekenisvolle en plezierige manier. Mijn educatieve soep vol opgaven die geoefend kunnen worden staat in ieder geval klaar.

Literatuur

Bandstra, P., Danhof, W., Faber, S., Minnaert, A., & Ruijssenaars, W. (2013). *Rapport Rekenproject Leerbaarheid van Hoofdrekenen*. Groningen: Steunpunt Taal en Rekenen.

Desoete, A., Ghesquière, P., De Smedt, B., Andries, C., Van den Broeck, W., & Ruijssenaars, A.J.J.M. (2010). Dyscalculie: Standpunt van onderzoekers in Vlaanderen en Nederland. *Logopedie, 23*(4), 4-9.

Oonk, W., Keijzer, R., Lit, S., Den Engelsen, M., Lek, A., & Van Waveren Hogervorst, C. (2011). *Kerninzichten: rekenen-wiskunde in de praktijk*. Groningen/Houten: Noordhoff Uitgevers.

Van Groenestijn, M., Borghouts, C., & Janssen, C. (2011). *Protocol Ernstige RekenWiskunde-problemen en Dyscalculie*. Assen: Van Gorcum.

Mijn les in groep 6

Creatief en kritisch denken bij rekenen-wiskunde

Maarten Molenkamp, De Tweemaster, Nieuwleusen

Inleiding

Afgelopen schooljaar heeft groep 5 van openbare basisschool *de Tweemaster* in Nieuwleusen meegedaan aan het onderzoek *Creatief en kritisch denken bij rekenen-wiskunde*, uitgevoerd door het Kohnstamm Instituut van de Universiteit van Amsterdam. Dit onderzoek sloot goed aan bij mijn wens: *Hoe kan ik mijn reken-onderwijs boeiender en 'ontdekkender' maken?* Dit leek me de ultieme kans om de strakke lessen uit de reken-wiskundemethode meer los te kunnen laten. In de methode ligt de focus vooral op het toewerken naar het juiste antwoord en veel minder, of zelfs niet, op het stimuleren van creatief en kritisch denken bij rekenen-wiskunde. Slechts een minderheid van de opdrachten lokt uit tot zelf nadenken over hoe je iets gaat aanpakken of nodigt uit tot een open leerproces waarbij ruimte is voor verschillende strategieën. Tijd voor verandering!

Even wennen

We begonnen klein. Ik paste bijvoorbeeld een bepaalde opgave aan of maakte zelf een thematisch werkboekje. Zo wilde ik de leerlingen alvast kennis laten maken met het anders denken bij rekenen, en afstappen van het idee dat altijd maar één goed antwoord mogelijk is. Ik liet de leerlingen bijvoorbeeld schatten hoe zwaar zij dachten dat de meester zou zijn. Het antwoord werd niet bekend gemaakt. Wel bespraken we hoe leerlingen tot hun schatting waren gekomen. Een ander voorbeeld is dat ik de leerlingen zoveel mogelijk opgaven liet bedenken met als antwoord twaalf. Ze moesten dan opdrachten bedenken voor zwakke, 'gemiddelde' en sterke rekenaars. Ik merkte dat de leerlingen dit in het begin erg lastig vonden. Ze vroegen om veel sturing en begeleiding. Opvallend was dat mijn rekenzwakke leerlingen zich veel meer lieten zien tijdens deze lessen en dat juist mijn rekensterke leerlingen vaak nog moeite hadden met het anders denken.

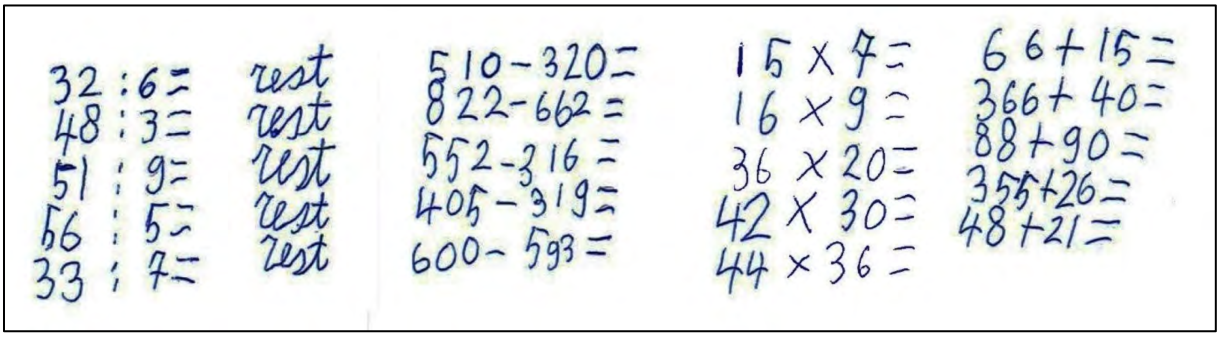
Terwijl ik de leerlingen steeds vaker stimuleerde om creatiever en kritischer te denken bij rekenen, werd het ook tijd voor de eindopdracht van het Kohnstamm onderzoek: een vrije les geven, waarbij de leerlingen met zo min mogelijk uitleg zelf gaan denken en rekenen. Aangezien het schooljaar ten einde liep had ik bedacht om een les te geven die te maken had met de overgang naar groep 6. In deze les wilde ik zowel het creatief vermogen als het kritisch denken van de leerlingen stimuleren. Het werken aan de volgende doelen zou centraal staan: het onderzoeken, het leggen van verbanden, het spelen met ideeën, het ontwerpen van een nieuw product en nieuwe oplossingen, het samenwerken en ten slotte het samen kritisch kijken naar het werk. Deze doelen heb ik gehaald uit de algemene *rubric* voor creativiteit en kritisch denken van het Kohnstamm Instituut, die gebaseerd is op eerder onderzoek van Spencer, Lucas en Claxton (2012).

Mijn les in groep 6

De les werd gestart met een korte introductie: *Volgend schooljaar gaan jullie allemaal naar groep 6. Dat is natuurlijk reuze spannend en anders. Ook het rekenen zal anders worden. Wie heeft al een idee wat jullie volgend schooljaar gaan leren?*
Sommige leerlingen wisten al een beetje wat ze konden verwachten, terwijl anderen nog geen idee hadden. Na het uitwisselen van ideeën kregen de leerlingen een kopie van een leeggemaakte bladzijde uit het lesboek Ze mochten die ochtend in tweetallen zelf een reken-wiskundeles bedenken, die gegeven zou kunnen worden in groep 6.
Voor de leerlingen aan het werk konden, namen we de criteria door waar de te bedenken les aan moest voldoen. De les moest aansluiten bij de vaste lesopzet van onze reken-wiskundemethode. Dat betekende dat de les moest bestaan uit drie opgaven: een automatiseringsopgave; een opgave waarbij iets nieuws aan bod komt of waarbij iets moet worden uitgelegd (een *uitlegopgave*); en een derde opgave die aansluit op de uitlegopgave. Aan deze indeling moesten de leerlingen zich houden. De leerlingen werden al enthousiast en de eerste ideeën werden al uitgewisseld. Een laatste criterium was natuurlijk dat de les niet op het niveau van onze eigen groep, maar op niveau van groep 6 moest zijn. Als verrassing vertelde ik dat de zelf ontwikkelde rekenlessen ook écht door de leerlingen van groep 6 zouden worden gemaakt. Dit vonden mijn leerlingen erg spannend, maar het stimuleerde ze extra om goed hun best te doen.

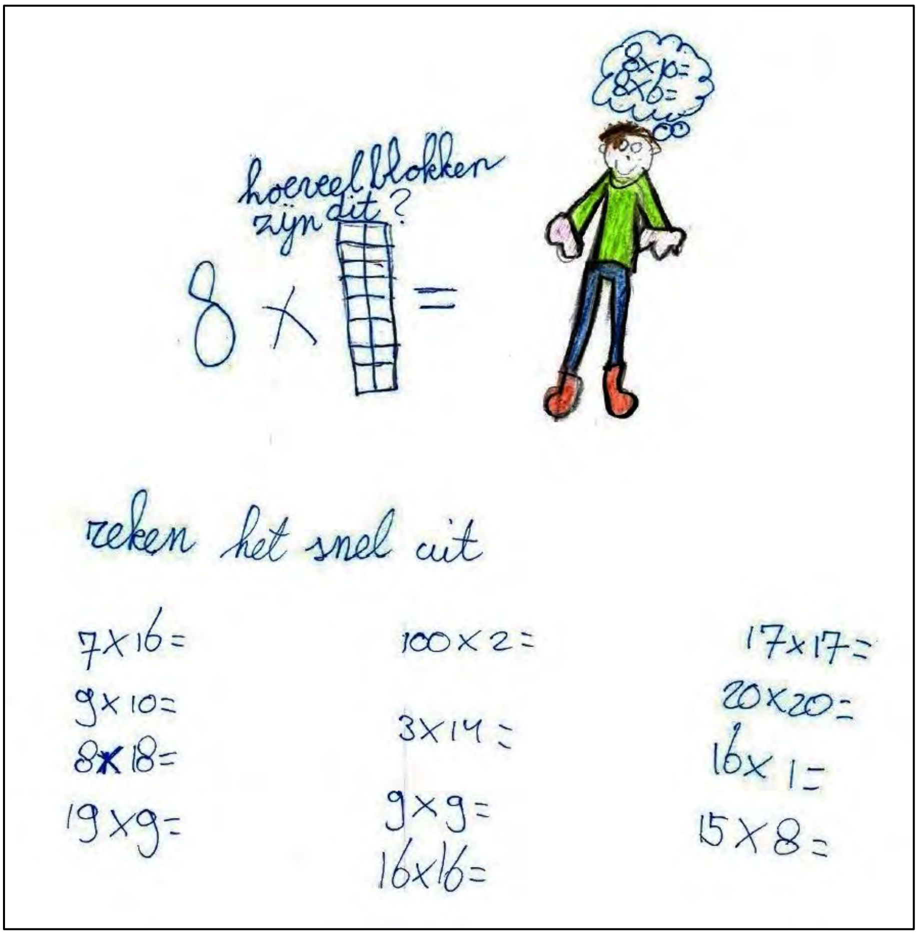
Afb. 1. In tweetallen aan het werk.

Vervolgens zijn de leerlingen in tweetallen verdeeld en aan de slag gegaan (Afb. 1). Hierbij heb ik rekenzwakke leerlingen gekoppeld aan rekensterke leerlingen. Het was mooi om te zien dat alle leerlingen, ook de zwakkere rekenaars, de hele les betrokken bezig waren. Er werd overlegd, gediscussieerd, soms ruzie gemaakt, en kritisch gekeken naar het eigen werk en dat van anderen (Afb. 2; Afb. 3). Er werd ook gelachen – hoe leuk is het om een opgave te maken over je meester die in de winkel een jurk gaat kopen (Af. 4)! Taken werden onderling verdeeld en er was een hele positieve en ongedwongen sfeer in de groep.
Ondertussen liep ik langs en stelde ik vragen als *Hoe kun je deze opgave moeilijker maken?* Ik gaf feedback op het werkproces en het product. Toen iedereen klaar was hebben de leerlingen de resultaten onderling gepresenteerd.



Afb. 2. Een automatiseringsopgave.

Toen kwam het meest spannende moment…de les ging gemaakt worden door groep 6! Nu had deze groep het ook nog een beetje druk, dus ze konden het pas een paar dagen later maken. Na een aantal dagen wachten kregen mijn leerlingen de ingevulde resultaten terug. Dit was een mooi *feedback* moment voor hen: Werden de bedachte opgaven wel begrepen? Waren hun opgaven niet te makkelijk of te moeilijk? In een paar gevallen was een bedachte opgave niet ingevuld en sommige leerlingen vonden dat best lastig te verkroppen. Daarover zijn we in gesprek gegaan. Iets wat jijzelf heel makkelijk begrijpt hoeft blijkbaar voor een ander niet altijd even duidelijk te zijn. Juist daarom ook is het goed dat er ook anderen naar je werk kijken en daar *feedback* op geven.



Afb. 3. Een uitlegopgave.

Afb. 4. Een contextopgave, mét meester Maarten.

Tot besluit

Het was prachtig om te zien waar enkel een lege pagina uit het lesboek, en verder eigenlijk nauwelijks voorbereiding van mij, toe leidde. Alle leerlingen waren actief betrokken, creatief aan het werk met rekenen-wiskunde en luisterden aandachtig naar elkaar. De resultaten waren prachtig en gevarieerd. Aan alle doelen is wel gewerkt. Zulke betrokkenheid van álle leerlingen maak in de reguliere methodelessen niet zo vaak mee. Ik ga zeker door met het stimuleren van creatief en kritisch denken binnen de reken-wiskundeles en ik kan het alle collega's aanraden!

Literatuur

Lucas, B., Claxton, G., & Spencer, E. (2013). *Progression in Student Creativity in School: First Steps Towards New Forms of Formative Assessments. OECD Working Papers no. 86.* Paris: OECD Publishing.

Probleemoplossen en wiskundig denken in Pluspunt 4

Anneke van Gool, Malmberg: Pluspunt

Inleiding

In een rekenmethode is het aanbod meestal keurig opgedeeld in hapklare brokjes leerstof. Alles wat je nodig hebt om met kinderen op verschillende niveaus elke dag een uur te rekenen staat keurig in de boekjes, en de handleiding geeft de nodige tips en aanwijzingen om de lessen nog beter te laten aansluiten bij de leerlingen in je groep. Leerlijnen zijn leidend, stap voor stap leidt de methode ons door de leerstof, eventuele hobbels al vooraf gladgestreken, zodat het leren optimaal voortgang heeft. Op z'n tijd een toets om de vorderingen van de leerlingen in kaart te kunnen brengen en waar nodig het aanbod bij te stellen.
Het klinkt ideaal, maar is dat eigenlijk wel zo? Vergeten we niet iets? Is leren ook niet zo af en toe vallen en opstaan? Zijn we niet bezig om leerlingen in bubbeltjesplastic te verpakken tijdens de rekenles? Wij denken van wel.

In de nieuwe editie van Pluspunt bieden we structureel ruimte voor opgaven waarbij leerlingen worden uitgedaagd om diverse aspecten van het wiskundig denken te ontwikkelen: nadrukkelijk aandacht voor de ontwikkeling van de 21e eeuwse vaardigheden zoals creatief denken, probleemoplossen, computational thinking, informatievaardigheden, ict-vaardigheden, mediawijsheid, communiceren, samenwerken, sociale & culturele vaardigheden, zelfregulering en kritisch denken.
Dergelijke opgaven passen niet altijd keurig in een lijn, maar verdienen absoluut ruimte in het rekenonderwijs. Daarom af en toe het reguliere menu van de mooi opgebouwde rekenlessen aan de kant, en tijd voor een *Piekerklus*.

Piekerklussen

Het doel van een Piekerklus is kinderen leren omgaan met open problemen die op verschillende manieren kunnen worden aangepakt, die meerdere denkstappen vereisen en die uitnodigen tot verder nadenken. De kinderen worden uitgedaagd om actief aan de slag te gaan met leerinhouden, waarbij het onderzoekend en ontwerpend leren centraal staat.
Door de projecten regelmatig aan te bieden en te zorgen voor een opbouw in de problemen die worden aangeboden, ontstaat er een leerlijn wiskundig denken en probleemoplossen.
Een echte uitdaging vraagt tijd om erover na te denken. Dat past niet zomaar in een lesuurtje. De rekenagenda zal even helemaal schoongeveegd moeten worden.

Stap 1

We starten met een gezamenlijke introductie van het project. Er is een filmpje waarin een vraagstuk wordt ingeleid en via kleinere opdrachten worden verschillende

aspecten van het onderwerp verkend door alle kinderen in de groep. Zo zetten we de eerste stap in de richting van de probleemverkenning.
Het nadenken over het vraagstuk zelf staat op de voorgrond. ‘De’ oplossing als zodanig, als die er al is, is van minder groot belang. De verkenning geeft vooral aanleiding tot discussie en leidt zo tot verder denken over een vervolgopdracht.

Stap 2

Het gezamenlijke onderzoek leidt tot een ontwerpvraag, waarmee de kinderen in groepjes aan de slag gaan. Ze ontwerpen een patroon, een kaart, een route, een puzzel enzovoort, waarbij ze moeten voldoen aan gegeven inhoudelijke kenmerken.
Het is de bedoeling dat kinderen hierbij planmatig te werk gaan.
Eerst gaan ze onderzoeken welke aspecten van belang zijn bij hun ontwerp. Ze verkennen wat ze daarbij wel en niet nodig hebben, zowel aan kennis als aan materialen of anderszins. Deze verkenning moet uitmonden in een plan van aanpak.
De leerkracht begeleidt de gang van zaken door middel van reflectie. Hierbij gaat het niet alleen om organisatorische aspecten, maar ook de inhoudelijke kwaliteit komt aan de orde. Hoe passen de plannen bij de opdracht en hoe zien de leerlingen dat juist deze stappen passen bij de oplossing van het probleem?

Stap 3

De leerlingen voeren hun plan uit. Ze verzamelen informatie als dat nodig is, en ontwerpen een prototype van de oplossing.
De leerkracht daagt de leerlingen uit om aan te tonen dat aan alle eisen van de opdracht is voldaan en laat hen waar nodig formuleren wat er nog nodig is voor de verbetering van het ontwerp.
De leerlingen testen en verbeteren hun ontwerp, zodat het uiteindelijk gepresenteerd kan worden.

Stap 4

Ten slotte presenteren de leerlingen hun proces en/of product. Daarbij wordt ook geëvalueerd: heb je voldaan aan de inhoudelijke eisen? Wat zou je nog kunnen doen om het proces en/of product te verbeteren?

Wordt er wel genoeg geleerd?

Kenmerkend voor de Piekerklus is dat er voortdurend reflectie plaatsvindt op de wiskundige inhoud van het ontwerp. Voldoet het aan de gestelde inhoudelijke criteria? Hoe weet je dat? Waar zie je dat? Er wordt gestructureerd en doelgericht gewerkt. Bovendien wordt er steeds kort gereflecteerd op de activiteiten die de leerlingen hebben uitgevoerd, en de activiteiten die de leerlingen van plan zijn uit te voeren in het licht van het uiteindelijke doel.

Een voorproefje

De auteurs van Pluspunt hebben op een aantal scholen geëxperimenteerd met een korte Piekerklus in groep 4. De kinderen en ook de leerkrachten waren erg enthousiast. We konden natuurlijk niet erg veel tijd en ruimte van scholen vragen, het experiment moest wel passen binnen het programma van de school. Maar de resultaten waren veelbelovend. We stellen het graag beschikbaar aan iedere leerkracht die ook eens een dergelijk uitstapje wil maken.

Meer weten?

Kijk voor informatie over de huidige editie en te zijner tijd de nieuwe editie van Pluspunt op de website http://www.malmberg.nl/Basisonderwijs/Methodes/Rekenen/Pluspunt.htm.

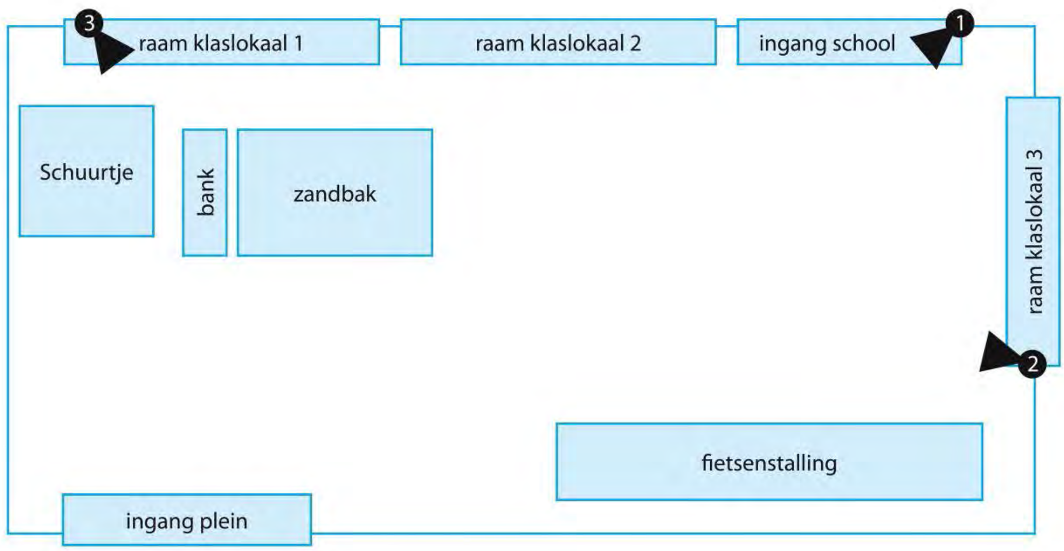
Bijlage *Probleemoplossen en wiskundig denken in Pluspunt 4*
Piekerklus voor groep 4

Anneke van Gool, Malmberg: Pluspunt

Pluspunt **Piekerprobleem A**

Dit ga je leren
Je kunt aangeven wat je wel en niet kunt zien vanaf een bepaalde plaats.

Het schoolplein van de Tulpschool.
= bewakingscamera



1. Bekijk de plattegrond van het schoolplein.
   Er hangen 3 camera's.
   Vul in met welke camera de foto's zijn gemaakt.

Foto's gemaakt vóór de pauze:

foto **a**
gemaakt met camera ____

foto **b**
gemaakt met camera ____

foto **c**
gemaakt met camera ____

2 Vul in met welke camera de foto's zijn gemaakt.

Foto's gemaakt ná de pauze:

foto **d**
gemaakt met camera ......

foto **e**
gemaakt met camera ......

foto **f**
gemaakt met camera ......

3 Kijk naar de foto's.
Na de pauze zijn er voorwerpen op het plein blijven liggen.
Teken deze voorwerpen op de goede plek in de plattegrond.
Kijk goed naar de kleuren.
Maak een bovenaanzicht.

- kliko's met skateboard ervoor
- zandbak met emmertjes
- ballen

4 **a** Kies steeds een plek waar jij niet te zien bent.
Gebruik de foto's van opgave 1 en 2.
Teken in de plattegrond.

Camera 1 staat aan.
Kies een plek waar jij niet te zien bent op de camera.

Teken daar

Camera 2 staat aan.
Kies een plek waar jij niet te zien bent op de camera.

Teken daar

Camera 3 staat aan.
Kies een plek waar jij niet te zien bent op de camera.

Teken daar

b Camera 1, 2 én 3 staan aan.
Is er een plek waar jij niet te zien bent?

Teken daar ☆

Piekerprobleem B

Dit ga je leren
Je kunt aangeven waar je een camera zou moeten ophangen om een ruimte zo goed mogelijk te bewaken.

Dit heb je nodig:
- een fototoestel

Ik werk samen met ______________________________

Wie maakt de tekeningen?!
Iemand sluipt stiekem onze school binnen.
En maakt dan gekke tekeningen.
Op muren, op ramen en op de grond.
Wij willen weten wie dat doet.
Daarom gaan wij de school bewaken met camera's.
In elke ruimte komt één camera.
Help mee om een goede plek te kiezen.

1 **a** Kies een ruimte in jullie school.
Die ruimte gaan jullie bewaken met een camera.
Wij kiezen:
☐ onze klas
☐ het schoolplein
☐ een andere plek: ____.

b Teken hierboven een plattegrond van die ruimte.
Tip: *doe het eerst in klad.*

2 a Bedenk waar de camera moeten komen.
Kies een plek waar je zoveel mogelijk van de ruimte ziet.
Tip:
Probeer een paar plekken uit.
De een gaat op de plek van de camera staan.
De ander gaat steeds op een andere plek in de ruimte staan.
Wanneer ben je wel in beeld en wanneer niet?

b Zijn jullie het eens over de plek?
Maak 2 foto's.
1 Een foto van jullie samen.
2 Een foto vanuit de plek van de camera.

c Plak hier foto 2.

Geen foto? Maak dan een tekening.
Teken wat je met de camera zou zien vanaf deze plek.

3 a Waar hangt jullie camera?
Geef dit aan in de plattegrond.

Teken

b Is er in jullie ruimte nog een plek waar je niet te zien bent voor de camera?
Geef dit aan in de plattegrond.

Teken ☺

4 a Laat jullie foto aan een ander tweetal zien.
Vraag:

Rara...
In welke ruimte is deze foto gemaakt?

Rara...
Op welke plek hangt onze camera?

Overleg samen.
Is de plek goed getekend op de plattegrond?
Waarom is dit de beste plek in deze ruimte?

b Bekijk de foto's van een ander tweetal.
- Bedenk in welke ruimte de foto gemaakt is.
- Beschrijf op welke plek in die ruimte de camera hangt.

5 Stel je voor: jij bent gaat een gekke tekening maken.
Waar zou jij een tekening willen maken in jullie school?

______

Wat zou je dan tekenen?

______

Materiaal
- werkboek, blz. 40-41
- antwoordenboek blz. 40-41
- filmpje

Lesduur
60 minuten

Lesdoel
De kinderen zeggen wat je wel en niet kunt zien vanaf een bepaalde plaats.

Achtergrondinformatie over deze les

Het piekerprobleem is een rekenuitdaging die kinderen na 3 blokken krijgen aangeboden. De uitdaging bestaat uit twee delen:
- Deel A start met een filmpje, daarna is er een zelfstandige verwerking. Deze vindt in de klas plaats.
- Deel B is een opdracht die kinderen in tweetallen maken. Ze maken een plattegrond van een ruimte en denken na over een goede plek voor een bewakingscamera.

Introductie

- Bekijk samen het filmpje.
- Bespreek met de kinderen: *Op welke plekken hangen bewakingscamera's?* (bijvoorbeeld: in een supermarkt). *Waarom hangen ze juist daar?* (je kunt zien wie er binnenkomt, je houdt overzicht). Concludeer: *Je hangt camera's op plaatsen waar je zicht hebt op datgene wat je wilt bewaken.* Vraag: *Kun je op een camera alles zien wat er in een ruimte gebeurt?* Concludeer: *Er blijven altijd plaatsen over die je met de camera niet kunt zien. Door middel van kijklijnen kun je bepalen wat wel en niet in beeld komt.*
- Leg uit: *Meester Jan maakte tekeningen op de Wilgenschool. In opdracht vind je de plattegrond van een andere school, de Tulpschool. Jullie gaan onderzoeken hoe je het schoolplein van die school kunt bewaken met camera's.*
- Neem de opgaven kort door. De leerlingen moeten proberen te bedenken wat je wel en niet kunt zien vanaf de drie standpunten.

Zelfstandig werken

De kinderen werken zelfstandig aan de opgaven.

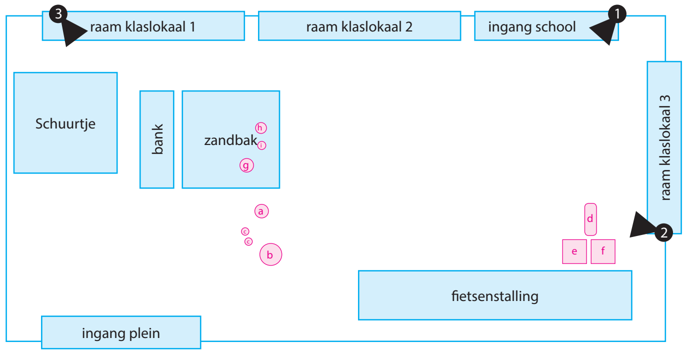
Reflectie

- Bespreek de opgaven met de kinderen.
- Opgave 1: Kunnen de kinderen beredeneren waarom ze hebben gekozen voor een bepaalde camera? Kunnen ze de positie van de voorwerpen op de foto's verklaren vanuit de standpunten? Bijvoorbeeld: bij foto a zie je de deur van het schuurtje recht van voren, dus dan moet de camera er recht tegenover hangen.
- Opgave 2: hebben ze niet alleen de voorwerpen op de juiste plaats getekend maar is ook de positie van de voorwerpen op de foto ten opzichte van elkaar goed weergegeven? Kunnen ze bij foto d beredeneren waarom de brede kliko juist aan die kant van de smalle moet staan en niet andersom? Kunnen ze bij foto f onder woorden brengen hoe ze hebben bedacht welke bal waar moest liggen?
- Opgave 3: Hebben ze inderdaad plaatsen gevonden waar je niet zichtbaar bent? Hoe weten ze dat zeker? Kunnen ze dit onder woorden brengen door de kijklijnen van de camera te beschrijven?

Pluspunt **Piekerprobleem A**

Dit ga je leren
Je kunt aangeven wat je wel en niet kunt zien vanaf een bepaalde plaats.

Het schoolplein van de Tulpschool.
= bewakingscamera



1 Bekijk de plattegrond van het schoolplein.
Er hangen 3 camera's.
Vul in met welke camera de foto's zijn gemaakt.

Foto's gemaakt vóór de pauze:


foto a
gemaakt met camera 2


foto b
gemaakt met camera 1

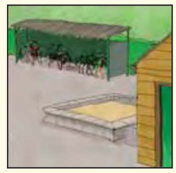


foto c
gemaakt met camera 3

40

Materiaal
- werkboek blz. 42-43
- antwoordenboek blz. 42-43
- digitale camera of telefoon met camera

Lesduur
60 minuten

Lesdoel
De kinderen kunnen zeggen waar je een camera zou moeten ophangen om een ruimte zo goed mogelijk te bewaken.

Voorbereiding

- De kinderen kunnen de opdrachten in de klas uitvoeren, maar u kunt er ook voor kiezen om de kinderen in (verschillende) andere ruimtes of op het schoolplein te laten werken.
- Bij opdracht 2 moeten de kinderen een foto maken. Zorg voor een of meer digitale camera's/telefoons of tablets met camera. Spreek met de kinderen af dat ze eerst opdracht 1 en 2a maken. Pas daarna komen ze de camera halen om opdracht 2b te maken.

Introductie

- Blik terug op het filmpje. Licht toe: *Stel je voor dat meester Jan hier in onze school zou rondsluipen en geheime tekeningen zou maken.* Laat de kinderen reageren en sluit af met: *We gaan onze school bewaken! We kiezen een ruimte en denken na hoe we die het beste kunnen beveiligen met één camera.* Herinner de kinderen eraan dat je niet alles in beeld kunt brengen met één camera. *Houd rekening met wat je in beeld wilt hebben en bedenk dan waar de camera het beste kan hangen zodat er zo veel mogelijk op te zien is. Bedenk ook wat je vanuit het gekozen standpunt niet kunt zien.*
- Neem de opgaven kort door.

Werkafspraken maken

Vorm tweetallen en maak met de kinderen afspraken over:
- de ruimtes die gekozen kunnen worden. Maak eventueel een verdeling zodat niet iedereen in dezelfde ruimte werkt.
- het maken en printen van foto's.

Zelfstandig werken

De kinderen werken zelfstandig aan de opgaven. Laat de kinderen bij opdracht 1b eerst op een kladblaadje een schets maken. Deze hoeft niet exact op schaal te zijn, maar de belangrijkste dingen moeten er wel op staan.

Reflectie

- Laat de foto's op het digibord zien. Herkennen de kinderen de ruimte? Vanuit welke plek is de foto gemaakt? Is dat een goede plaats? Kunnen de kinderen beredeneren met argumenten als wat je wel en niet kunt zien vanuit bepaalde standpunten? Hebben de kinderen de juiste plaats aangegeven op hun plattegrond? Hebben ze door echt te kijken ook gecontroleerd of hun tekening/ plaats klopt?
- Bespreek opgave 5 na.

Pluspunt Piekerprobleem B

Dit ga je leren
Je kunt aangeven waar je een camera zou moeten ophangen om een ruimte zo goed mogelijk te bewaken.

Dit heb je nodig:
- een fototoestel

Ik werk samen met ____________________

Wie maakt de tekeningen?!
Iemand sluipt stiekem onze school binnen.
En maakt dan gekke tekeningen.
Op muren, op ramen en op de grond.
Wij willen weten wie dat doet.
Daarom gaan wij de school bewaken met camera's.
In elke ruimte komt één camera.
Help mee om een goede plek te kiezen.

1 **a** Kies een ruimte in jullie school.
Die ruimte gaan jullie bewaken met een camera.
Wij kiezen:
☐ onze klas
☐ het schoolplein
☐ een andere plek: ____________________.

b Teken hierboven een plattegrond van die ruimte.
Tip: *doe het eerst in klad.*

42

Probleemoplossen,
ook in het speciaal basisonderwijs

Marjolijn Peltenburg, Marnix Academie

Nog te weinig aandacht voor 21e eeuwse vaardigheden

21e eeuwse vaardigheden: wie heeft er niet van gehoord? Vaak worden ze in één adem genoemd met ICT-*skills*, kritisch denken, onderzoeken en probleemoplossen (Boswinkel & Schram, 2011; Onderwijsraad, 2014; Thijs, Fisser & Van der Hoeven, 2014). Er lijkt consensus te bestaan over de noodzaak dat het onderwijs kinderen helpt deze vaardigheden te ontwikkelen (Anderson, 2008; Voogt & Pareja Roblin, 2010; Peltenburg, 2016), maar de 21e eeuwse vaardigheden hebben hun weg nog onvoldoende gevonden in het Nederlandse onderwijsstelsel (Onderwijsraad, 2014).

Wat kunnen kinderen al?

Hoewel er nog te weinig aandacht is voor 21e eeuwse vaardigheden in het onderwijs, kunnen we er niet van uitgaan dat kinderen op dit gebied nog niets zouden kunnen. In hun dagelijkse leefwereld gaan kinderen al spontaan om met allerlei nieuwe technologieën en communicatievormen waarbij ze vooral worden gedreven door nieuwsgierigheid en grenzen aftasten van wat deze nieuwe technologieën en communicatievormen te bieden hebben (Arnone, Small, Chauncey & McKenna, 2011). Bovendien, bij 21e eeuwse vaardigheden gaat het niet alleen om nieuwe vaardigheden, maar ook om (probleemoplos)vaardigheden die leerlingen in aanzet al hebben en die in de toekomst van groter belang worden en verder ontwikkeld moeten worden (Ledoux e.a., 2013). Dit geldt niet alleen voor leerlingen in het regulier basisonderwijs, maar óók voor speciaal basisonderwijsleerlingen.

Probleemoplossen in het speciaal basisonderwijs

Gedreven door onze eigen nieuwsgierigheid wilden we weten hoe het zit met de probleemoplosvaardigheden van leerlingen in het speciaal basisonderwijs (sbo)[1]. Meer specifiek wilden we weten of sbo-leerlingen met een flinke ontwikkelingsachterstand op het gebied van rekenen-wiskunde, wel combinatoriekopgaven kunnen oplossen. Bij combinatoriek gaat het om het bepalen van het totaal aantal mogelijke combinaties van verschillende elementen.

Zie de bijlage bij dit hoofdstuk voor het werkblad dat we aan kinderen uit de middenbouw van het sbo voorlegden. We vroegen hen om zoveel mogelijk verschillend gekleurde vlaggetjes te maken bestaande uit drie verschillende kleuren waarbij elke kleur telkens maar een keer in een vlaggetje mocht voorkomen.

De leerlingen gingen voortvarend te werk, en wat bleek? Al snel hadden ze het totaal aantal mogelijke vlaggetjes bepaald. Sommigen gingen hierbij op een *trial and error*-

[1] Het onderzoek waarop dit hoofdstuk is gebaseerd heb ik uitgevoerd samen met Marja van den Heuvel-Panhuizen.

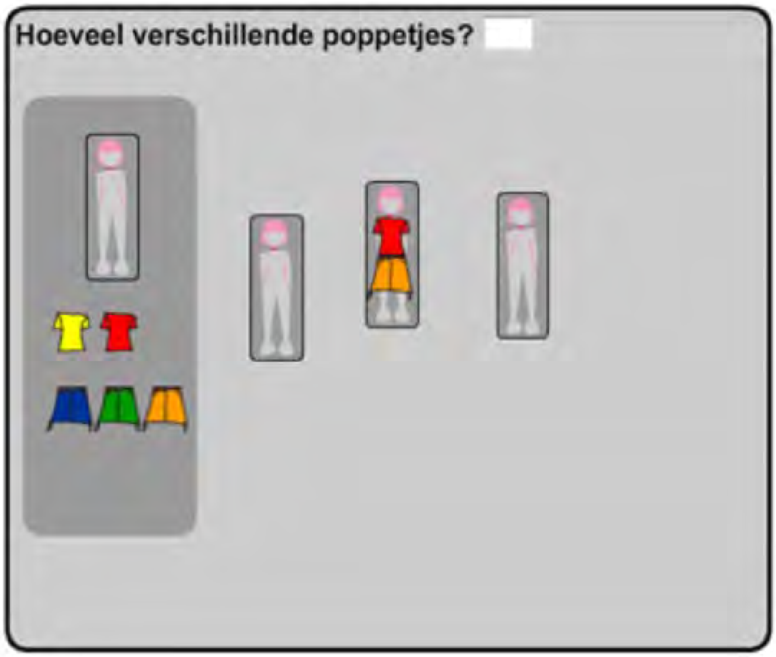
manier te werk door na te gaan welk vlaggetje ze al hadden gemaakt en welke nog niet. Anderen kozen voor een meer systematische aanpak door bij elk vlaggetje te beginnen met het constant houden van één kleur en daarop te variëren (de zogeheten odo-meter strategie, cf. English, 1996).

De combinatoriekopgave deed een beroep op verschillende 21e eeuwse vaardigheden die de leerlingen op een natuurlijke wijze inzetten. Zo gingen zij kritisch, reflectief en systematisch te werk bij het oplossen ervan. En dit terwijl in het onderwijs aan deze leerlingen nog niet eerder aandacht aan combinatoriek was besteed.

Nader onderzoek

De resultaten gaven aanleiding voor nader onderzoek: Welke strategieën gebruiken sbo-leerlingen eigenlijk voor het oplossen van combinatoriekopgaven en hoe succesvol zijn ze hierin ten opzichte van leerlingen in het regulier basisonderwijs?

We zochten dit uit door een serie combinatoriekopgaven aan te bieden in een ICT-applicatie waarin een zogeheten *drag-and-drop* functie en een tekentool zijn opgenomen. De opgaven hadden betrekking op het maken van zoveel mogelijk verschillende kledingcombinaties. In totaal werden zes combinatoriekopgaven rond het vinden van alle mogelijke combinaties van verschillende kledingitems op het computerscherm gepresenteerd (Afb. 1).



Afb. 1. Schermweergave van ICT-applicatie combinatoriek (http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00505/).

Gegevens werden verzameld over de scores en het strategiegebruik van de leerlingen bij het oplossen van deze opgaven. De successcore en het strategiegebruik van leerlingen in het regulier basisonderwijs dienden daarbij als referentie. De totale onderzoeksgroep bestond uit 84 sbo-leerlingen (8- tot 13-

jarigen) en 76 leerlingen (7- tot 11-jarigen) uit het regulier basisonderwijs. Hun reken-wiskundig niveau liep uiteen van halverwege groep 4 tot halverwege groep 7. Op basis van de geanalyseerde gegevens bleek dat zowel met betrekking tot de successcore als het strategiegebruik de sbo-leerlingen niet significant verschilden van de leerlingen uit het regulier basisonderwijs die in hun klas op hetzelfde niveau rekenden (Peltenburg, 2012). Met andere woorden: sbo-leerlingen zijn net als leerlingen uit het reguliere basisonderwijs in staat tot probleemoplossen met combinatoriekopgaven en gebruiken daarbij dezelfde strategieën.

Wat is nodig om het reken-wiskundeonderwijs meer *21^e^ eeuws* te maken?

Het voorgaande maakt duidelijk dat het onderwijsaanbod er enorm toe doet als het gaat om het aanwakkeren van probleemvaardigheden bij leerlingen en dat ook sbo-leerlingen beschikken over dergelijke probleemoplosvaardigheden die nodig zijn om succesvol mee te doen in de 21^e eeuw. De leerkracht en andere rekenspecialisten in school zijn de sleutel om in dit aanbod te voorzien. Zij kunnen leerlingen stimuleren tot nadenken en tot het uitbouwen van hun kennis en vaardigheden.

Meer aandacht voor probleemoplossen in uw klas?

Bent u benieuwd hoe het oplossen van combinatoriekopgaven uw leerlingen afgaat? Gebruik dan het werkblad in de bijlage van dit hoofdstuk of kijk op http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00505/ voor één van de digitale combinatoriek opgaven die we gebruikten in het onderzoek. Vinden uw leerlingen alle mogelijkheden? Hoe weten ze dat zeker?

Literatuur

Arnone, M., Small, R., Chauncey, S., & McKenna, H. (2011). Curiosity, interest and engagement in technology-pervasive learning environments: a new research agenda. *Educational Technology Research and Development, 59*, 181–198. DOI 10.1007/s11423-011-9190-9.

Boswinkel, N., & Schram, E. (2011). *De toekomst telt*. Enschede: SLO / Ververs Foundation.

CED-groep (2013). *Hoe toekomstbestendig is ons onderwijs?* Rotterdam: CED-groep.

English, L. D. (1996). Children's construction of mathematical knowledge in solving novel isomorphic problems in concrete and written form. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 81-112.

Ledoux, G., Meijer, J., Van der Veen, I. & Breetvelt, I. (2013). *Meetinstrumenten voor sociale competenties, metacognitie en advanced skills. Een inventarisatie*. Amsterdam: Kohnstamm Instituut.

Onderwijsraad (2014). *Een eigentijds curriculum*. Den Haag: Onderwijsraad.

Peltenburg, M. (2012). *Mathematical potential of special education students*. Utrecht: FIsme Scientific Library, Utrecht University.

Peltenburg, M. (2016). Sleutel tot het creëren van succesvolle 21^e eeuwse scholen. *SchoolManagement totaal, 18*(1), 32-33.

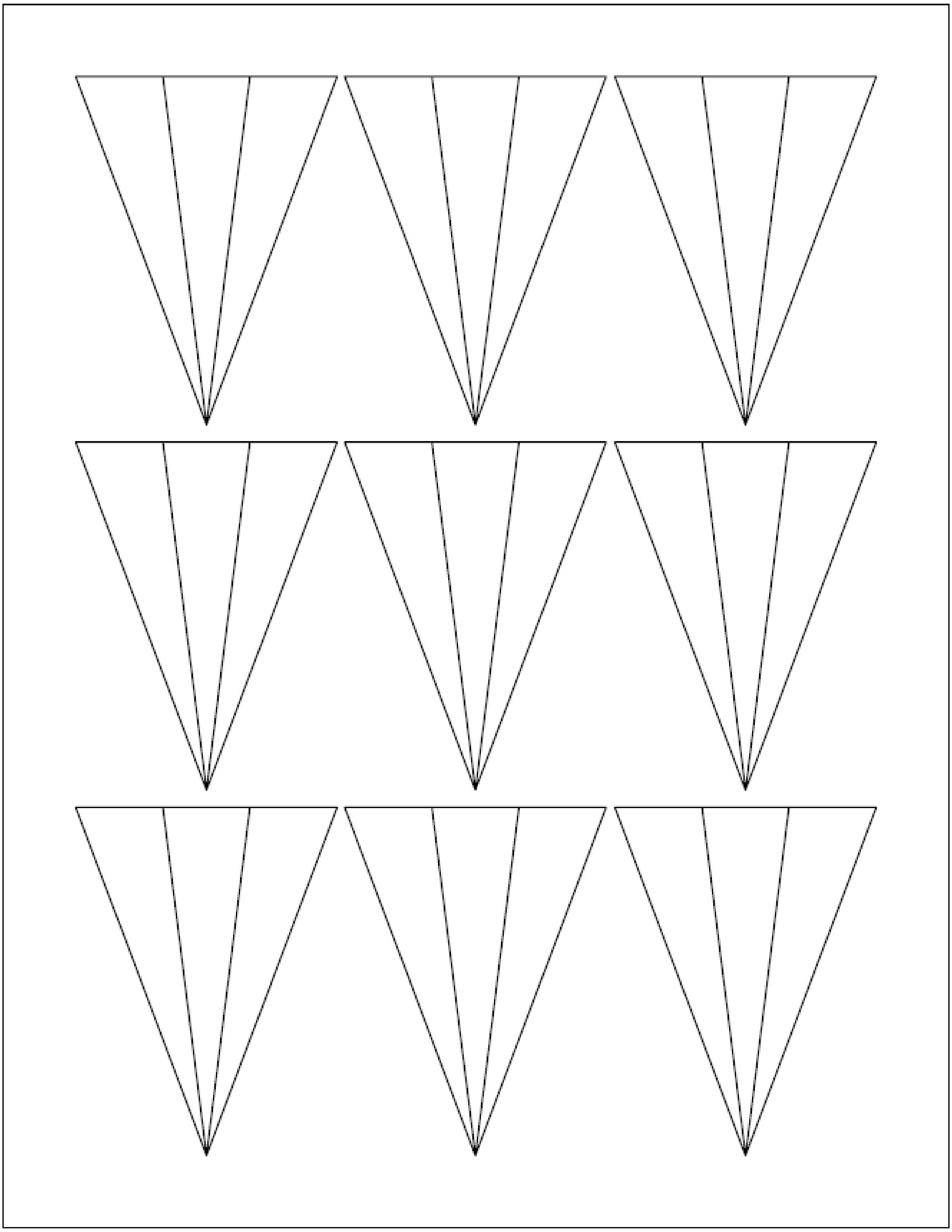
Thijs, A., Fisser, P., & Van der Hoeven, M. (2014). *Digitale geletterdheid en 21e eeuwse vaardigheden in het funderend onderwijs: een conceptueel kader.* Enschede: SLO.

Bijlage bij

Probleemoplossen, ook in het speciaal basisonderwijs

Werkblad *Vlaggetjes*

Marjolijn Peltenburg, Marnix Academie



Razend Enthousiaste en Supersterke Rekenaars
Projecten voor talentvolle leerlingen in de bovenbouw

Tim Micklinghoff, CED-Groep

Bent u geïnteresseerd in leuke dagjes weg in eigen land? Bezoek dan eens de *Zomerbraderie Brandevoort* in Helmond. Tijdens deze braderie staan activiteiten en hapjes uit allerlei landen centraal. Zo kan er Spaanse paella gegeten worden en kan het Italiaanse *Toren van Pisa* spel gespeeld worden. In het Franse gedeelte staat de Tour de France centraal en kan er zelfs een wedstrijdje tegen Lars Boom gefietst worden! Mocht u meer interesse hebben in een bijzondere hotelovernachting? Dan is het *Totale Ontspanningshotel* in de bossen bij Bloemendaal wellicht meer iets voor u. Hier komt u helemaal tot rust met een speciale sauna, rustgevende kamers, een cocktailbar en een massageclub.

Razend Enthousiaste Rekenaars

Helaas bestaan de Zomerbraderie Brandevoort en het Totale Ontspanningshotel niet echt. Maar ze zouden zomaar wel kunnen bestaan, want ze zijn tot in de puntjes uitgewerkt door leerlingen uit groep 8 van De Vendelier in Helmond en groep 7 van De Ark in Heemstede. Deze groepen wonnen in 2016 de wedstrijd Razend Enthousiaste Rekenaars (RER). Dit project wordt jaarlijks georganiseerd door belastingadvieskantoor Meijburg & Co en is inhoudelijk ontwikkeld door de CED-Groep. Meijburg & Co financiert dit project voor het basisonderwijs in het kader van Maatschappelijk Verantwoord Ondernemen (MVO). Het MVO-beleid van Meijburg richt zich op drie pijlers, namelijk milieu, samenleving en bedrijfsprocessen. In het kader van de pijler *samenleving* heeft Meijburg & Co met de adoptie van de Ezweni-school in Zuid-Afrika een prachtig onderwijsproject in het buitenland. Meijburg wil echter ook in eigen land bijdragen aan beter onderwijs. Op veel basisscholen is tijd en expertise te kort om de goede rekenaars extra uitdaging te bieden. Meijburg wil dit talent juist stimuleren. Wie weet zijn die goede rekenaars de belastingadviseurs van de toekomst! Daarom stelt Meijburg zijn kennis en kunde ter beschikking aan de beste rekenaars van de klas. Het succesvolle project vierde al weer zijn vijfjarig bestaan.

RER is een landelijke rekenwedstrijd voor de beste rekenaars uit de groepen 7 en 8. Bij de ontwikkeling van de opdrachten is er vanuit gegaan dat de leerlingen niveau I hebben behaald op de Cito-LOVS toetsen rekenen-wiskunde van groep 7 en groep 8. Tijdens RER werken de leerlingen in groepjes van ongeveer vier leerlingen van een school samen aan het project. Groep 8 leerlingen organiseren fictief een evenement en leerlingen uit groep 7 bedenken een eigen hotel. De leerlingen moeten als een team samenwerken aan vier verschillende deelopdrachten. In deze deelopdrachten staan onderwerpen centraal als reiskosten van het personeel, BTW-berekening, afschrijving van materialen en ticketprijzen. Als de leerlingen tevreden zijn over de deelopdrachten worden ze opgestuurd naar de jury. De jury kijkt de opdrachten na en zet de tussenstanden op een speciale website van het project. De laatste rekenopdracht wordt door alle deelnemende teams tegelijkertijd gemaakt tijdens een groots slotevenement op het hoofdkantoor van Meijburg & Co in Amstelveen. Tijdens deze feestelijke en spannende middag presenteren de leerlingen onder begeleiding van een bekende Nederlander hun project aan een vakjury bestaande uit professionals uit het bedrijfsleven. Aan het einde van de middag wordt de winnaar bekend gemaakt (Afb. 1).

Afb. 1. De winnaars van RER in 2016; leerlingen van De Vendelier, met hun coach Frank Metsemakers. Onder hun presentatietafel.

Het bijzondere aan dit project is dat de deelnemende groep niet begeleid wordt door de eigen leerkracht, maar door een medewerker van Meijburg & Co. Deze medewerker fungeert als coach. De Meijburg-medewerker wordt bewust coach genoemd om het groepsgevoel bij de leerlingen te benadrukken en de wedstrijd aanzien te geven. Bij iedere andere (sport)wedstrijd heeft een team immers ook een coach!

Bij vragen kunnen de leerlingen contact opnemen met hun eigen coach. Vaak gaat de coach bij iedere nieuwe opdracht bij het team langs om samen te kijken hoe deze opdracht het beste aan te pakken is. De leerkracht heeft een ondersteunende rol bij RER en dient ervoor te zorgen dat de leerlingen de tijd (ongeveer anderhalf uur per week) en de ruimte krijgen om aan de opdrachten te werken, maar hoeft niet te helpen bij de opdrachten. Bij de ingewikkelde rekenvraagstukken kunnen de leerlingen juist goed geholpen worden door de belastingadviseurs van Meijburg & Co.

Coach van de winnende groep 8 van basisschool De Vendelier het afgelopen jaar was Frank Metsemakers. Frank is fiscalist bij Meijburg & Co. Hij vertelt over het project: *Als kind werd ik zelf niet voldoende uitgedaagd op het gebied van rekenen in groep 7 en groep 8 van de basisschool. Dit project zorgt ervoor dat de slimmere kinderen op rekengebied wel worden uitgedaagd en net een stapje verder leren te denken. Het is erg leuk om daar vanuit mijn werk als fiscalist een bijdrage aan te kunnen leveren. Je ziet gewoon iedere keer dat je bij de kinderen bent dat ze weer vooruitgang hebben geboekt!*

In de scholen wordt het werken met deze externe coach zeer gewaardeerd. Erna Boskman, leerkracht van groep 8 van De Vendelier, vertelt: *Het werken met een coach van Meijburg & Co maakt het project zo speciaal voor de leerlingen. Ze bouwen een band op met deze coach. De expertise van deze coach is ook echt een toevoeging. Het is voor de leerlingen verder goed en leerzaam om eens niet van je eigen juf, maar juist van iemand van buitenaf te leren.* Ook de leerlingen van groep 8 van De Vendelier zijn zeer te spreken over het samenwerken met de coach: *Frank liet ons naar antwoorden zoeken en leerde ons ook goed te lezen. Hij kon dingen weer anders uitleggen dan de juf*.

Belangrijke vaardigheden binnen RER

De opgaven in RER zijn complex van aard. De deelnemende leerlingen doen tenslotte mee om uitgedaagd te worden, want ze zijn de beste rekenaars van de klas. Bewerkingen met procenten, breuken en verhoudingen komen veelvuldig op hoog niveau aan bod. Probleemoplossen waarbij rekenen-wiskunde één van de nodige gereedschappen is, neemt een grote rol in. De rekenvaardigheden hebben immers altijd tot doel een concreet probleem op te lossen, bijvoorbeeld het bepalen welk aantal folders er voor het evenement gedrukt moeten worden, waarbij rekening gehouden moet worden met de ja-nee stickers op de deuren van de huishoudens. Het probleemoplossen staat nooit als losse vaardigheid centraal, maar altijd in dienst van het praktische probleem. Ook staan de getallen waarmee gerekend moet worden altijd in een doorgaande tekst vermeld en nooit als losse getallen, waardoor bij RER het rekenen en redeneren in een context goed geoefend wordt. Coach Frank had een goede manier gevonden om het probleemoplossen bij zijn team te oefenen: “Het probleemoplossend vermogen gaat echt omhoog als je de leerlingen in eigen woorden laat navertellen wat ze zojuist hebben gelezen. Eerst zeggen ze namelijk alleen de woordjes op en dan gaan ze pas echt nadenken over wat er op papier stond. Ik liet ze na het lezen van de tekst ook eerst zelf de vragen bedenken die zouden kunnen komen. Vaak hadden ze van de vijf vragen die gesteld waren er al drie goed voorspeld. Dat was altijd erg motiverend voor de leerlingen om te ontdekken!”

Een ander voorbeeld van probleemoplossen bij een praktisch probleem wordt hieronder gegeven (Afb. 2). Dit is een uitwerking van een opgave van RER van de leerlingen van groep 8 van De Vendelier. De vraag was om uit te rekenen hoeveel mensen er per uur naar de wc kunnen op de locatie van hun evenement. De leerlingen moesten hierbij bedenken hoelang een wc-bezoek gemiddeld duurt en daarbij rekening houden met het verschil tussen mannen en vrouwen. De uitwerking laat zien dat de leerlingen praktisch dingen hebben onderzocht om de vraag te beantwoorden en daarbij rekenen met gemiddeldes, vermenigvuldigen en delen hebben toegepast. Dit allemaal in dienst van het concrete probleem, namelijk de hoeveelheid wc's op het evenement.

We hebben de tijd opgenomen met een stopwatch en kwamen erachter dat een jongen ongeveer 1.11 min. over een wc-bezoek doen en een meisje 1.22 min. Die 2 getallen tellen we bij elkaar op en dan rekenen we het gemiddelde uit:

1.11 + 1.22 = 2.33 → 2.33 : 2 = 1.17 minuten duurt een wc-bezoek.

Dat betekent dat je 60 minuten (= 1 uur) moet delen door 1.17 minuten en dan kom je uit op **51 bezoekers per uur** naar 1 wc.

We hebben wel geen evenement dat zich binnen afspeelt maar we zijn gaan kijken naar het aantal aanwezige binnen-toiletten bij de locatie van ons evenement.

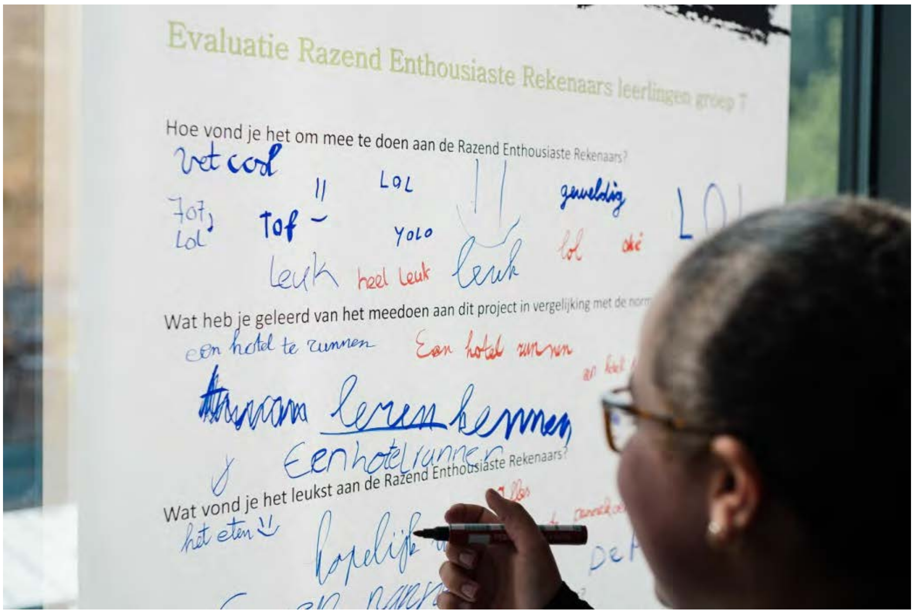
Cafetaria Brandevoort: 2 wc's
Basisschool OBS (beneden de personeelstoiletten): 2 wc's
Activiteitencentrum Brandevoort: 12 wc's

Dan zouden we dus bij elkaar 16 binnen-toiletten hebben. Dan zouden er in 1 uur dus 51 × 16 = ongeveer **816 bezoekers** naar het toilet kunnen.

Afb. 2. Uitwerking van leerlingen groep 8 van De Vendelier. (Over het gebruik van het begrip 'ongeveer' is met de leerlingen nog verder gesproken.)

Ook samenwerken heeft een centrale rol bij RER. De goede rekenaars moeten als een groep samenwerken en als groep de antwoorden inleveren. Het gaat er niet om wie individueel de beste rekenaar van de groep is. Zo moet er overleg gevoerd worden over bepaalde antwoorden en moeten de leerlingen elkaar of de coach overtuigen van bepaalde antwoorden of manieren om iets te berekenen. Deze goede rekenaars zijn meestal niet gewend om met elkaar overleg te hebben over rekenopgaven, aangezien ze de opdrachten in de klas over het algemeen toch wel goed hebben. Ze hoeven hun berekeningen en werkwijzen doorgaans niet te benoemen of uit te leggen. Bij RER is dat nadrukkelijk wel aan de orde en wordt het samenwerken ook meegenomen in de jurybeoordeling. Bij iedere opdracht geven zowel de leerlingen als de coach aan hoe de samenwerking verlopen is. Over de samenwerking zeggen de leerlingen van De Vendelier: *Het samen overleggen en nadenken over het hele project was erg leuk. Samen kom je tot meer ideeën en kun je elkaar aanvullen en het is ook gezellig om zoiets samen te doen en te bedenken!*
De laatste vaardigheid waar RER expliciet aandacht aan besteedt, is een belangrijke om de competitie te kunnen winnen, namelijk creatief denken. RER bevat niet alleen

op rekenkundig gebied uitdagende opdrachten, maar juist ook op creatief gebied. De leerlingen worden gestimuleerd om *outside the box* te denken om het mooiste hotel en het beste evenement te organiseren. Zo mogen ze zelf bepalen hoeveel toeschouwers of gasten ze willen en aan de hand van deze hoeveelheden maken ze de rekenopdrachten. Aan het einde van de competitie rekent ieder team dus met andere getallen en verschillende uitkomsten kunnen goed zijn als ze maar goed onderbouwd worden. Bij de slotpresentatie verrassen de leerlingen de jury ieder jaar weer op het gebied van creativiteit. De meest mooie maquettes, posters, folders en outfits worden hier gepresenteerd! Coach Frank vertelt over de creativiteit van de leerlingen: *Ik verbaas me ieder jaar weer over de creativiteit en de slimheid van de leerlingen. Ze hebben een hele pure manier van denken. Zo denken ze altijd in oplossingen in plaats van problemen. In mijn werk als fiscalist moet ook ik altijd zo denken bij vraagstukken van onze klanten. Dat deze manier van denken zo aansluit bij het vak dat ik uitoefen, is erg leuk om te zien*. Erna Boskman benoemt de creativiteit als een van de belangrijke succesfactoren van RER: *Het draait bij dit project juist om veel meer dan rekenen. De leerlingen ontwikkelen zich ook in samenwerken, begrijpend lezen en creatief zijn*.



Afb. 3. Evaluatie van RER door de leerlingen tijdens de slotbijeenkomst.

Schot in de roos

Het bieden van uitdagende rekenopdrachten aan de sterkste leerlingen in een klas, gekoppeld aan een coach met specifieke vakinhoudelijke kennis bleek een schot in de roos. Erna Boskman vertelt: *Het is een fantastische kans vanuit het bedrijfsleven om deel te nemen aan RER. Die moet je met beide handen aanpakken. Het is verrijkend voor zowel de deelnemende kinderen als voor de rest van de klas. De rest van de klas gaat namelijk vragen stellen aan het groepje kinderen dat steeds met een externe coach buiten de klas aan de rekenopdrachten werkt. Vanwege die interesse van de hele klas konden de deelnemende leerlingen steeds uitleggen wat ze aan het doen waren en klassikaal voorbeelden laten zien. De hele klas werd zo* *betrokken. RER verspreidt zich dus als een olievlek door de groep heen en blijft absoluut niet beperkt tot de vier deelnemers!*

Supersterke Rekenaars

In navolging van dit succesvolle project is de CED-Groep een nieuw experiment aangegaan. Vanaf het schooljaar 2016-2017 is het project Supersterke Rekenaars (SSR) van start gegaan. Ook SSR biedt een combinatie van uitdagend rekenmateriaal gekoppeld aan een landelijke wedstrijd in een bepaald thema. Dit project, gefinancierd door het ING Fonds Nederland, is een volledig digitale wedstrijd. Het ING Fonds Nederland voert dit project uit, omdat *empowering people* een van de belangrijkste doelstellingen is van dit fonds. Het in hun kracht zetten van sterke rekenaars in de bovenbouw van het basisonderwijs en hen verder te laten groeien middels het project SSR past hier perfect bij.

Bij SSR worden leerlingen van groep 8 gevraagd om de ultieme rugzak voor de brugklasser van de toekomst te ontwerpen. In acht wekelijkse deelopdrachten strijden de teams, die bestaan uit ongeveer vier goede rekenaars per school, tegen elkaar. Ook bij de uitwerking van deze opdrachten staan het probleemoplossen, samenwerken en de creativiteit centraal. Het coachen gebeurt digitaal via een chatscherm op een speciaal ontwikkelde website en wordt uitgevoerd door de werknemers van de CED-Groep.

Meer weten?

Razend Enthousiaste Rekenaars heeft zich de afgelopen jaren bewezen als een succesvol project. De vraag vanuit scholen is dan ook groot; ieder jaar is de wachtlijst weer gevuld met scholen die graag mee zouden willen doen. Ook het komende schooljaar zullen de coaches van Meijburg & Co hun kennis en kunde weer inzetten voor slimme rekentalenten in de groepen 7 en 8.

Meer informatie vindt u op www.razendenthousiasterekenaars.nl en https://meijburg.nl/pagina/razend-enthousiaste-rekenaars.

In 2017-2018 wordt Supersterke Rekenaars opnieuw georganiseerd voor rekentalenten uit groep 8. De competitie zal starten aan het begin van het schooljaar in september 2017. Deelname aan deze digitale wedstrijd is geheel gratis voor scholen. Meer informatie over de competitie vindt u op www.supersterkerekenaars.nl en hier kunt u zich ook direct aanmelden voor de competitie.

Computational thinking

Een manier om probleemoplossend vermogen te vergroten

Gerard Dummer, Pabo Hogeschool Utrecht

Inleiding

Hoe goed begrijp je de wereld om je heen nog? Welke invloed wil je kunnen uitoefenen op de wereld om je heen? Zie je ook de mogelijkheden die de wereld om je heen biedt voor het onderwijs? Het rapport *De Toekomst Telt* (Boswinkel & Schram, 2011) noemt de wereld een *black box world* door alle digitale apparaten die we wel gebruiken maar niet meer begrijpen. Honegger (2015) noemt het daarom een filosofisch uitgangspunt als hij zegt dat er aandacht moet zijn voor computer *sciences* in het onderwijs, zodat kinderen beter in staat zijn om de wereld om zich heen te begrijpen en naar hun hand te zetten. Verder laat Van Keulen (2010) in zijn publicatie *Wetenschap en Techniek* zien hoeveel mogelijkheden er in het dagelijks leven van kinderen zijn om bij aan te sluiten.

Dit artikel gaat over *computational thinking*. Uitgangspunt daarbij is dat computational thinking helpt om de wereld om je heen beter te begrijpen en naar je hand te zetten. Ik leg uit wat computational thinking is en hoe je hier mee op de basisschool aan de slag kunt gaan.

Wat is computational thinking?

In haar veelgeciteerde artikel *Computational Thinking* legt Wing (2006) uit wat computational thinking (CT) is. CT gaat over het oplossen van problemen. Preciezer gezegd: de vaardigheid om moeilijke problemen zo te herformuleren dat we ze kunnen oplossen. Het gaat daarbij niet zo zeer om programmeren, maar om conceptueel kunnen denken. Wing geeft aan dat CT een fundamentele vaardigheid is en niet iets mechanisch. Het is een menselijke manier van denken om problemen op te lossen. Het gebruikt kennis en vaardigheden die voortkomen uit het wiskundig en het technisch denken. Het gaat daarbij niet om de software en hardware tools maar om de concepten. Het is voor iedereen omdat het verweven is in ons dagelijks leven. CT gaat helpen, zegt Wing, bij het oplossen van huidige en toekomstige (wetenschappelijke) problemen.

Concepten en aanpakken CT / TPACK en CT

Met deze omschrijvingen kun je nog niet aan de slag in het onderwijs natuurlijk. Gelukkig zijn er al verschillende uitwerkingen gemaakt die houvast bieden. Deze uitwerkingen geven aan welke concepten belangrijk zijn en welke aanpakken hierbij passen (Brennan, Balch & Chung, 2015; Curzon, Dorling, Ng, Selby & Woollard, 2014; Programmeren in het PO, 2016) . Ik koppel deze concepten en aanpakken aan het TPACK-model (Koehler & Mishra, 2006). Het TPACK-model zegt dat je als leerkracht in staat moet zijn om vakinhouden over te dragen met bijpassende didactieken en technologieën. Daarbij wordt technologie ruim opgevat; van pen tot computer. Dit

Tabel 1. Computational thinking.

Computational Thinking			
Computational Concepts (Vakinhouden)	**Computational Practices (Didactiek)**	**Computational Technology (Technologie)**	**Computational Perspectives (Context)**
• Algoritme • Herhaling • Patronen • Abstractie • Parallelisme • Decompositie • Logica • Data • Voorwaarden • Functies • Representaties • Operators	• Experimenteren en verbeteren • Knutselen • Testen en debuggen • *Reusing* en *remixing* • Ontwerpen • Samenwerken • Evalueren • Programmeren	• *Unplugged* • Technische hardware • *Plugged*	• Doorzettings-vermogen stimu-leren • Uitbreiding van expressiemiddelen • De kracht van samenwerken ont-dekken • Zelfverzekerder over de wereld om hen heen

Tabel 2. Omschrijving van computational concepts.

Computational Concepts	**Omschrijving**
Algoritme	Instructies die je na elkaar moet uitvoeren. Een verzameling regels. Effectieve en efficiënte algoritmes besparen tijd en geld.
Herhaling	Een algoritme meerdere keren doorlopen.
Patronen	Patronen helpen om voorspellingen te maken, regels vast te stellen en algemenere problemen op te lossen. Door te generaliseren kun je een bepaald probleem op dezelfde manier oplossen.
Abstractie	Vaststellen wat belangrijk is en wat weggelaten kan worden zodat je complexe problemen kunt oplossen.
Parallelisme	Twee of meer algoritmes tegelijkertijd uitvoeren.
Decompositie	Een complex probleem in kleinere stukken opknippen zodat het probleem hanteerbaarder wordt.
Logica	Uit kunnen leggen waarom iets gaat zoals het gaat. Of een manier om uit te leggen waarom iets niet gaat zoals het zou moeten gaan.
Data	Invoeren, bewaren, ophalen en vernieuwen van waarden. Ook wel variabele genoemd. Bijvoorbeeld de variabele score die wordt bewaard, getoond en verhoogd of verlaagd. Of een lijst met namen waaruit gekozen kan worden.
Voorwaarden	Een besluit nemen gebaseerd op een bepaald aantal voorwaarden. Het gaat hierbij om “als-dan-anders”-redeneringen. Ook wel ‘selection’ genoemd.
Functies	Een ‘hulp’programma binnen het ‘hoofd’programma dat hergebruikt kan worden. Wordt ook wel sub routine genoemd.
Representaties	Het weergeven en organiseren van gegevens in passende grafieken, lijsten, teksten of plaatjes.
Operators	Operators zijn hulpmiddelen voor wiskundige, logische en string uitdrukkingen. Voorbeelden zijn +, -, *, EN, OF, NIET.

alles vindt plaats in een bepaalde context. De vakinhouden van CT noemen we *computational concepts.* De didactieken van CT heten *computational practices.* De technologieën van CT kun je onderverdelen in *unplugged* (zonder computer maar met huis-, tuin- en keukenmiddelen), technische hardware (specifieke didactische

materialen) en *plugged* technologie (software, apps en websites). Onder de context schaar ik onderwerpen die Brennan, Balch en Chung (2015) onder *computational perspectives* scharen. Het zijn vooral houdingsaspecten die bij CT komen kijken. In tabel 1 heb ik de *concepts*, *practices,* technologieën en *perspectives* op een rijtje gezet. In tabel 2 licht ik de *computational concepts* nog verder toe.
Van de *computational concepts* werk ik er één uit met concrete voorbeelden: algoritmes. Ook van *compational practices* ga ik voor dit hoofdstuk in op één onderwerp: *reusing en remixing*. Tot slot sta ik stil bij de verschillende technologieën die je kunt gebruiken.

Computational concept: algoritme

Er zijn heel veel soorten algoritmes. Kinderen leren al verschillende algoritmes op school bij bijvoorbeeld rekenen (een stappenplan gebruiken om een deling op te lossen) en spelling (een stappenplan voor het bepalen van de d's en dt's). Maar ze komen ook algoritmes tegen in het dagelijks leven en algoritmes waar computerprogramma's gebruik van maken. Algoritmes helpen om een bepaald 'probleem' op te lossen. Ik geef een aantal voorbeelden hoe je met verschillende algoritmes aan de slag kunt gaan.

Voorbeeld 1: Hagelslagrobot

De activiteit van de hagelslagrobot of sandwichrobot is een mooie activiteit om kinderen te leren precies instructies te formuleren. De leraar speelt een robot die een broodje hagelslag klaar moet maken. De leraar heeft alle materialen voor het maken van een broodje hagelslag klaarliggen (brood in broodzak, boter, mes, bord, pak hagelslag). De leerlingen moeten bedenken welke instructies ze de leerkracht moeten geven om ervoor te zorgen dat er een gesmeerd broodje hagelslag komt te liggen. De leerlingen mogen daarbij alleen woorden gebruiken die zijn voorgeschreven. Is de instructie niet helder genoeg (slaan ze een stap over) dan loopt de robot vast en moeten de instructies preciezer worden geformuleerd.

http://code-it.co.uk/unplugged/jamsandwich
http://www.codekinderen.nl/leerling/unplugged/sandwich-robot/

De hageslagrobot is een mooie aanleiding om het met kinderen te hebben over apparaten in het huis. Hoe zou het algoritme van bijvoorbeeld de wasmachine eruitzien? Een wasmachine weet natuurlijk niet of de was schoon is maar het draait zijn programma af. Hoe zou je de instructies voor de wasmachine kunnen opschrijven?

Voorbeeld 2: Sorteeralgoritme

Hoe zorg je ervoor dat je klasgenootjes met zo min mogelijk instructies op lengte of leeftijd gaan staan? Als je dat zo efficiënt mogelijk wilt doen dan denk je na over een sorteeralgoritme. Een mooi uitgewerkt voorbeeld vind je op CS *Unplugged* over het sorteren van fotorolhoudertjes met verschillende gewichten. Hoe kun je die sorteren in zo min mogelijk stappen? Neem je eerst de grootste, zwaarste of langste en vergelijk je die met de rest? Of kies je een willekeurige uit en vergelijk je de volgende daarmee? Of splits je de groep en sorteer je eerst de groepjes?

http://csunplugged.org/sorting-algorithms/

De opdracht met het sorteeralgoritme is een mooie aanleiding om het met kinderen te hebben over de manier waarop de computer bepaalt hoe die iets op alfabetische volgorde kan zetten (bijvoorbeeld in de Verkenner of in Excel).

Voorbeeld 3: Zoekalgoritme

Hoe vind je zo snel mogelijk het getal dat de meester of juf in zijn hoofd heeft? Als je op zoek bent naar een item in een grote verzameling dan ben je bezig met het maken van een zoekalgoritme. Een handige manier om snel dat getal te vinden dat de meester of juf in gedachte heeft is door steeds de helft te nemen van het totale aantal (binair zoeken). Als je aan een getal denkt onder de honderd kun je vragen of het getal groter of kleiner is dan vijftig. Is het groter dan vijftig dan heb je al de helft van de getallen uitgeschakeld. De volgende vraag is dan of het getal groter of kleiner is dan vijfenzeventig. En zo verder tot je het getal gevonden hebt.

http://csunplugged.org/searching-algorithms/

De opdracht met het zoekalgoritme is een mooi gelegenheid om het over de zoekmachines te hebben. Hoe vinden zij in hun database de pagina die voor jou het meest waardevol is?

Computational Practices: reusing en remixing

Een *computational practice* die Brennan, Balch en Chung (2015) noemen is *reusing* en *remixing*: hergebruik van en voortbouwen op bestaande materialen. Je hoef niet zelf het wiel uit te vinden, je kunt gebruiken maken van wat er al is. Zij betrekken dit op het programma *Scratch* van MIT. Scratch is een visuele programmeeromgeving waarin je blokjes aan elkaar sleept om een programma te schrijven. Scratch is een online programma waarin het makkelijk is om elkaars projecten te hergebruiken en daar op voort te bouwen. Dat is een houding die voortkomt uit de *open source* programmeerwereld. Daarin worden programmacodes met elkaar gedeeld. Bijvoorbeeld op een site zoals *GitHub*

https://github.com/

Hergebruik en voortbouwen zie je niet alleen op het gebied van programmeren maar ook op gebied van foto's, video's en teksten. Kinderen daar bewust mee in aanraking laten komen is een waardevolle manier van werken. Rondom programmeren kan dat bijvoorbeeld door in *Scratch* verder te bouwen op het project van iemand anders. Omdat zo'n project een mooi uitgangspunt kan zijn voor je eigen project of omdat je kunt leren van de codes van anderen. De makers van *Scratch* hebben zelf al een aantal startprojecten gemaakt die je kunt aanpassen om te oefenen met *reusing* en *remixing.*

https://scratch.mit.edu/projects/10014986/
https://scratch.mit.edu/projects/10128431/
https://scratch.mit.edu/projects/22162012/

Als je verder wilt gaan met een project van iemand anders, kan daar geen copyright op zitten. Dit biedt dan ook een mooie gelegenheid om het met leerlingen te hebben over auteursrecht. Specifiek gaat het daarbij om *Creative Commons*, een licentievorm die ervoor zorgt dat je onder bepaalde voorwaarden het werk van een ander mag gebruiken. Zulke voorwaarden zijn bijvoorbeeld dat je aan moet geven wie de oorspronkelijke auteur is en dat je jouw nieuwe werk onder dezelfde voorwaarden ook weer vrij moet geven.

Reusing en *remixing* gebruiken als werkvorm opent ook de deur naar een andere manier van werken. Eentje waarin het normaal is dat je online samenwerkt met anderen, omdat je ervaart dat die samenwerking meer op kan leveren dan alleen werken. Het beste voorbeeld daarvan is Wikipedia, het grootste samenwerkingsproject op internet bedoeld om alle mensen toegang te geven tot alle kennis.

Tot slot: Computational Technology

Welke middelen kun je nu inzetten om met kinderen te werken aan *computational concepts*? Hierbij kun je weer het eerdergenoemde onderscheid maken in *unplugged* activiteiten, activiteiten met technische hardware en *plugged* activiteiten.
De hagelslagrobot, het sorteeralgoritme en het zoekalgoritme zijn voorbeelden van *unplugged* activiteiten. Meer voorbeelden van *unplugged* activiteiten vind je op de website *CSUnplugged*
Onder technische hardware versta ik de middelen waarbij je niet achter het computerscherm hoeft te kruipen maar die wel gemaakt zijn om *computational concepts* uit te leggen. Er zijn al veel voorbeelden op de markt hiervoor. Zo is er voor de jongsten het bordspel *RobotTurtle* waarin je codekaartjes moet leggen om de robot over een spelbord te kunnen verplaatsen. Ook voor jonge kinderen is de *Beebot*, een robotbijtje die je eenvoudig kunt programmeren op de bij zelf. *Cubetto* is ook een robotje voor jonge kinderen waarbij je de code op een apart bord achter elkaar kunt plaatsen.
Voor *plugged* activiteiten ga je achter je computerscherm zitten om te programmeren. Ik noemde al *Scratch*, voor de bovenbouw. Voor jongere kinderen (groep 3 of 4) is er ook *ScratchJR* voor op de tablet. Daarnaast kun je terecht op verschillende websites zoals *code.org* en *bomberbot*. Ook zijn er allerlei apps voor op je tablet zoals *LightBot* en *Hopscotch.*

http://csunplugged.org/
http://www.robotturtles.com/

http://www.codekinderen.nl/leerling/programmeren/bee-bot/
https://www.primotoys.com/
https://scratch.mit.edu/
https://www.scratchjr.org/index.html
https://lightbot.com/
https://www.gethopscotch.com/
https://www.khanacademy.org/partner-content/pixar

Literatuur

Boswinkel, N., Schram, E. (2011). *De Toekomst Telt*. Enschede: SLO.

Brennan, K. Balch, C. & Chung, M. (2015). Creative Computing. Geraadpleegd op 1 oktober 2016, van http://scratched.gse.harvard.edu/guide/.

Curzon, P. Dorling, M., Ng, T. Selby, C. & Woollard, J. (2014). Developing computational thinking in the classroom: a framework. Geraadpleegd op 1 oktober 2016 van https://academy.bcs.org/sites/academy.bcs.org/files/DevelopingComputationalThinkingInTheClassroomaFramework.pdf.

Honegger, B.D. (2015). We are all excited - but why? Geraadpleegd op 1 oktober 2016, van http://doebe.li/talks/scratch15/index.html.

Keulen, H. Van. (2010). *Wetenschap en techniek. IJkpunten voor een domein in ontwikkeling*. Den Haag: Platform BetaTechniek.

Koehler, M.J., & Mishra, P. (2006). What Is Technological Pedagogical Content Knowledge? Geraadpleegd op 1 oktober 2016, van http://www.citejournal.org/wp-content/uploads/2016/04/v9i1general1.pdf.

Programmeren in het PO. (2016). *Programmeren in het PO.* Geraadpleegd op 1 oktober 2016, van http://maken.wikiwijs.nl/74282/Programmeren_in_het_PO.

Wing. J.M. (2006). Computational Thinking. Geraadpleegd op 1 oktober 2016, van https://www.cs.cmu.edu/~15110-s13/Wing06-ct.pdf.

Computational thinking
Ideeën voor de reken-wiskundeles

Vincent Jonker & Monica Wijers, Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut, Faculteit Bètawetenschappen / Onderwijsadvies & Training, Faculteit Sociale Wetenschappen

Inleiding

Geïnspireerd door de *Grote Rekendag 2016: Kijkje achter de code* en de ervaringen daarvan in de klas verkennen we in dit hoofdstuk de mogelijkheden om *computational thinking* een nadrukkelijker en regelmatig weerkerend plekje te geven in de rekenlessen. We willen een lans breken voor activiteiten in de rekenles die enerzijds zonder computer gedaan kunnen worden, maar anderzijds wel zicht geven op *automatische processen*, die vaak door computers worden afgewikkeld. Die automatische processen beïnvloeden ons leven op alle fronten, en het is zaak dat we met enig inzicht en kritisch met deze automatische processen kunnen omgaan. En omdat automatische processen volgens vaste (reken)regels verlopen is het goed in de rekenles hier ook aandacht aan te besteden. Dat is goed voor computational thinking en dat is goed voor de reken-wiskundeles.

Achtergrond

Laten we helder zijn. Dit hoofdstuk is geen pleidooi voor een cursus programmeren voor iedereen. We zien dergelijke stemmen opgaan in bijvoorbeeld Engeland, waar het vak programmeren verplicht is gesteld, en ook in Nederland zijn er mensen die zeggen dat alle kinderen zouden moeten leren programmeren.
Wij denken dat dit te veel aandacht geeft aan slechts een beperkt en moeilijker onderdeel van computational thinking en dat we het breder en laagdrempeliger moeten zoeken. Laten we daarom eerst kijken naar een definitie:

> Computational thinking is het procesmatig (her)formuleren van problemen op een zodanige manier dat het mogelijk wordt om met computertechnologie het probleem op te lossen. Het gaat daarbij om een verzameling van denkprocessen waarbij probleemformulering, gegevensorganisatie, -analyse en -representatie worden gebruikt voor het oplossen van problemen met behulp van ICT-technieken en -gereedschappen (http://curriculumvandetoekomst.slo.nl/).

Op deze wijze gedefinieerd is het een brede set van vaardigheden waar iedereen op een of andere manier in zijn of haar dagelijkse leven mee te maken heeft. Het gaat dan onder andere om:

- Zoeken naar regelmaat en patronen, bijvoorbeeld bij het analyseren van gegevens;
- Systematisch werken, bijvoorbeeld bij het oplossen van problemen;
- Maken en lezen van symbolische weergaven, bijvoorbeeld bij simuleren en modelleren;

- Interpreteren en zelf ontwerpen van codetaal, bijvoorbeeld bij het beschrijven van een proces.

Met deze omschrijvingen zijn we al veel dichter gekomen bij zaken die ook in de rekenles thuishoren en die in de beschrijving van 21e eeuwse vaardigheden worden genoemd (Voogt e.a., 2010). Het gaat dan ook in de rekenles niet zozeer om basis-vaardigheden maar om hogere orde vaardigheden zoals probleemoplossen en kritisch denken (zie ook *Wiskunde voor Morgen*) en het vertoont ook overeen-komsten met onderzoekend leren (Van Graft, 2007).
Het wordt nu tijd om concreter te worden. Wat zijn dat dan voor activiteiten die je kunt uitvoeren op het gebied van *automatische processen* zonder dat je er een computer bij gebruikt, en die ook nog met rekenen te maken hebben?

Activiteiten voor in de reken-wiskundeles

We geven enkele voorbeelden, die onder andere gebruikt zijn tijdens de *Grote Rekendag* van 2016 (Keijzer, 2016).

Groep 1 & 2: Welk getal ben ik?

Dit spel voor groep 1 en 2 is een variant op het raadspelletje *Wie ben ik?* In dit spel krijgt een van de kinderen een getal (of aantal stippen) tussen één en twintig op zijn of haar muts (Afb. 1). Het kind met de muts op probeert te raden welk getal dat is. Een of meer van de andere kinderen geven aanwijzingen, bijvoorbeeld door gebaren te maken zonder te praten, of mét praten door het aantal te omschrijven, zónder daarbij getallen te noemen, bijvoorbeeld *evenveel als de poten van de tafel*.

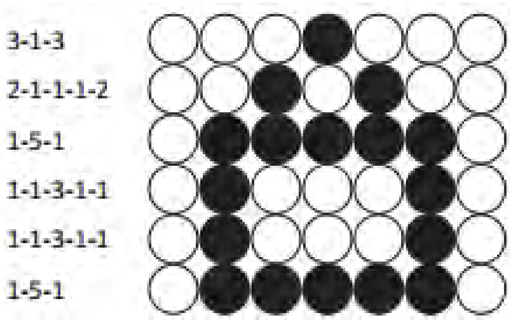
Afb. 1. Welk getal ben ik?

Wat heeft dit met rekenen te maken?
Speels en systematisch leren omgaan met getallen of aantallen en de ‘kenmerken’ daarvan.

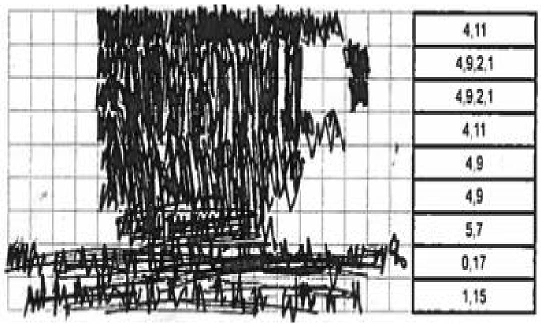
Robotpuzzel (groep 3 & 4) / Pixel voor pixel (groep 5 tot en met 8)

Voor puzzelaars geen onbekende. Van een tekening zijn alleen *aantallen* bekend zoals zichtbaar in de linker kolom van afbeelding 2 en de rechter kolom van afbeel-ding 3 (4,11 en 1,9,2,1). In feite zijn dit getallen die aangeven hoe lang er niets ge-wijzigd hoeft te worden per horizontale regel. De afspraak in deze voorbeelden is dat er steeds begonnen wordt met een wit vakje, dus 4,11 betekent dan: doe eerst vier witte *pixels* en dan elf zwarte (het bovenste randje van het kopje in de tekening).
In grafische software (zoals Photoshop en in video-opslag) wordt deze techniek ge-bruikt om met zo min mogelijk gegevens de definitie van een heel plaatje of van een video te kunnen geven.

Deze activiteit is bruikbaar vanaf groep 3 en 4, waar de wat eenvoudigere opdrachten gebruikt worden. In groep 7 en 8 kan het wat ingewikkelder zijn: daar wordt bijvoorbeeld gewerkt met een nul aan het begin van een regel om te zorgen dat ook het eerste vakje gekleurd wordt (omdat het eerste cijfer – nul – het aantal witte vakjes aangeeft). Dit blijkt lastig. Verder wordt de activiteit in groep 7 en 8 uitgebreid met het zelf bedenken van een code-systeem voor tekeningen met meerdere kleuren.



Afb. 2. Voorbeeld voor groep 3 en 4.

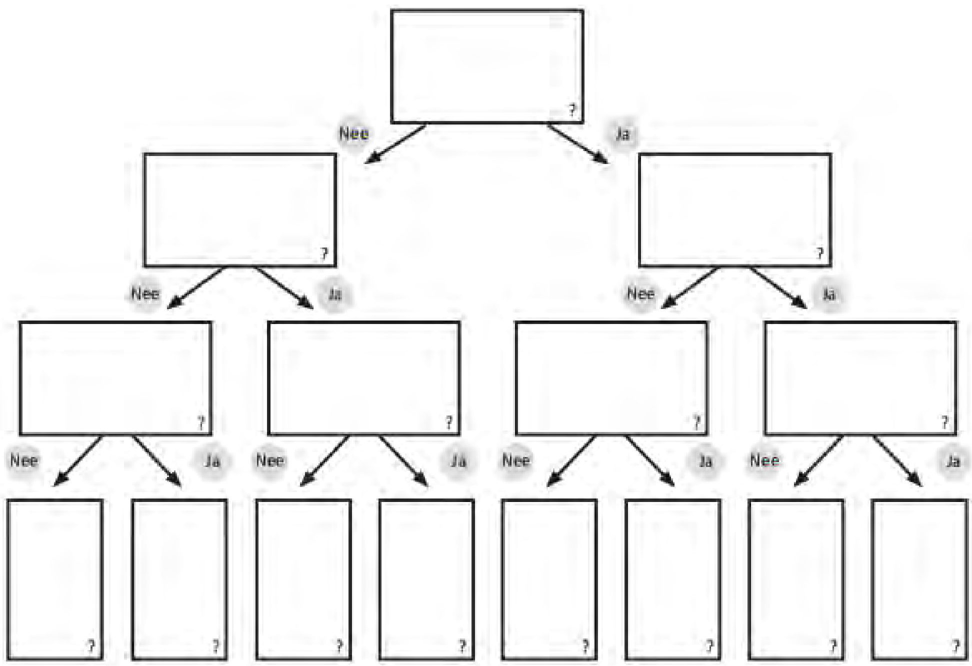


Afb. 3. Voorbeeld voor groep 7 en 8.

Wat heeft dit met rekenen te maken?
Systematisch tellen. Het gebruik van cijfers/getallen als symbolen om een instructie weer te geven.

Sorteren volgens verschillende regels (groep 5 t/m 8)

Dit is een activiteit om leerlingen zicht te geven op hoe computers met vaste regels werken. In groep 5 en 6 wordt gesorteerd met de methode *herhaald verdelen* met behulp van een boomdiagram. De leerlingen sorteren een stapel kaartjes met getallen (op volgorde van grootte) of met woorden (op alfabetische volgorde) door steeds een verdeling te maken op basis van een handige *ja/nee-vraag*.



Afb. Boomdiagram voor groep 5 en 6.

De opdracht in groep 7 en 8 luidt: Gebruik de *bubble-sort-regel* om tien kaartjes met getallen te sorteren. De leerlingen werken in groepjes van vier en ze krijgen tien kaarten met getallen er op tussen 0 tot 100 (5, 16, 23, 37, 42, 58, 61, 79, 88 en 90). De kaartjes worden in willekeurige volgorde in een rij gelegd. De *bubble-sort-regel* die de leerlingen nu moeten hanteren luidt: De rij langsgaan en steeds twee kaarten omwisselen als de volgorde (van klein naar groot) (nog) niet klopt. Dit blijf je doen (steeds weer opnieuw beginnen, van links naar rechts) tot er geen kaartjes meer van plek ruilen. De gehele rij ligt dan op volgorde van klein naar groot.

Afb. 5. Bubble-sort voor groep 7 en 8.

Wat heeft dit met rekenen te maken?
Systematisch werken volgens een vast algoritme. Eenvoudige check van groter/kleiner, getallenrij.

Live Turtle (groep 7 & 8)

In deze opdracht schrijven de leerlingen een instructie in stappen, in de vorm van een computerprogramma, voor het maken van een eenvoudige tekening. Ze doen dit zo dat iemand anders aan de hand van alleen die instructies de tekening kan maken. Dat kan in het klein op papier, maar ook in het groot op het schoolplein.

Afb. 6. Live turtle op het schoolplein.

De leerlingen krijgen een paar commando's die ze mogen gebruiken om de instructies te schrijven, zoals: kleur …; draai … graden; herhaal … keer; pen op; loop … stappen; pen neer; ga naar het beginpunt. Samengevat krijg je dan de volgende opdracht:

- Verzin zelf een tekening (niet te moeilijk).
- Schrijf voor die tekening een programma op een papiertje.
- Geef vervolgens de commando's één voor één aan iemand anders uit jouw klas.
- Als jouw programma goed is (en er goed wordt geluisterd) ontstaat jouw tekening.

Deze opdracht kan gezien worden als een voorbereiding op het programmeren met bijvoorbeeld Scratch.

Wat heeft dit met rekenen te maken?
Speels leren omgaan met hoeken, afstanden, herhaling van stappen.

Het moge duidelijk zijn dat dit overzicht van voorbeelden bewust zo gekozen is dat we kunnen laten zien dat de mogelijkheden voor *computational thinking* beginnen bij het jonge kind en door lopen naar groep 8 (en natuurlijk verder richting het voortgezet onderwijs).

Leerlijn of losse activiteiten?

Op Daltonschool Rijnsweerd in Utrecht hebben we gewerkt aan een leerlijn voor computational thinking. Daaraan deden naast de W&T coördinator uit groep 6, ook leerkrachten mee uit de lagere groepen. Men zoekt nu naar een voor iedereen eenvoudig in te vullen en te onderhouden setje van lessen door het jaar heen, zodat leerlingen uitgedaagd blijven met opdrachten die steeds iets meer context krijgen en ook wat meer ruimte bieden voor onderzoekend leren.
Voor het aanbrengen van kennis op het gebied van computational thinking is er niet direct sprake van een leerlijn, hoewel het natuurlijk voor de hand ligt om in de lagere groepen met eenvoudiger opdrachten te werken die goed in de belevingswereld van de leerlingen passen. Zo gauw er sprake is van het aanleren van een programmeertaal met al die specifieke kennis die daarbij hoort, zoals het werken met vaste woorden en zinnetjes, zodat de computer dit kan verwerken, zal er wel een leerlijn ingelegd moeten worden.

Advies

Losse activiteiten

Wij durven beweren dat de *losse activiteiten* op het gebied van computational thinking voor iedereen geschikt zijn en in principe ook als een set van losse activiteiten mag blijven bestaan. Misschien is dat zelfs beter, want dan is het ook makkelijker om deze elementen in reken-wiskundemethodes - en methodes voor andere vakken! - op te nemen.
Laat elke individuele leerkracht zich uitgedaagd voelen er sowieso in verschillende lessen iets mee te doen. Zo gauw het een leerlijn is zal er ook een methode zijn en worden veel vrijheidsgraden helaas ook weggenomen bij de leerkracht

Leerlijn

Als het gaat om het aanleren van een *programmeertaal* is er meer nodig dan een setje losse activiteiten en zal er gewerkt moeten worden met een leerlijn. Maar dat is volgens ons dus een smalle benadering van computational thinking. Deze benadering zou naar onze mening beperkt moeten blijven tot enkele leerlingen die hier echt iets mee willen/kunnen, voor in de buitenschoolse/naschoolse setting of in vormen van gedifferentieerd onderwijs met individuele leerroutes. Bekijk ter inspiratie bijvoorbeeld eens hoe dit wordt uitgewerkt in codestarter.nl

Meer weten en doen?

- De Grote Rekendag 2016: *Kijkje achter de code*: www.groterekendag.nl.
- Buble sort met 10 getallen: www.fi.uu.nl/toepassingen/28306.
- Live turtle: www.fi.uu.nl/toepassingen/28281.
- CodeStarter: www.codestarter.nl.
- CodeUur: www.codeuur.nl.
- CS Unplugged: www.csunplugged.nl.
- Leerlijn programmeren: www.fi.uu.nl/wiki/index.php/Leerlijn_programmeren.

Verder lezen?

- SLO curriculum van de toekomst: curriculumvandetoekomst.slo.nl/projecten/leerlijnen-digitale-geletterdheid.
- Wiskunde voor morgen: www.rekenenwiskunde21.nl.

Literatuur

Jeuring, J., Corbalan, G., Van Es, N., & Van Montfort, J. (2016). *Leren programmeren in het PO, een literatuurreview*. Utrecht.

Jonker, V., Wijers, M., Abels, M., & Keijzer, R. (2016). *Let's have a look behind the code. The Big Mathematics Day 2016 (Netherlands) about coding without computer*. Paper presented at the PATT, De Bilt, the Netherlands http://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/2016_jonker_wijers_abels_keijzer_patt.pdf

Keijzer, R. (Ed.). (2016). *Kijkje achter de code. Grote Rekendag 2016*. 's-Hertogenbosch: Malmberg.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas*. Brighton: Harvester Press.

Pijpers, R., Stiller, L., & Boeke, H. (2016). *Computing-onderwijs in de praktijk. Wat kunnen we leren van de britten?* Zoetermeer: Kennisnet.

Schnabel, P. (2015). *Platform 2032. Hoofdlijn advies: een voorstel*. Den Haag.

Van Galen, F. & De Moor, E. (1991). Midget-Logo. *Reken-wiskundeonderwijs: onderzoek, ontwikkeling, praktijk, 10*(1), 57-58.

Van Graft, M., & Kemmers, P. (2007). *Onderzoekend & Ontwerpend Leren bij Natuur & Techniek. Basisdocument over de didactiek voor onderzoekend en ontwerpend leren in het primair onderwijs*. Den Haag: Stichting Platform Bèta Techniek.

Voogt, J., & Pareja Roblin, N. (2010). *21st Century Skills. Discussienota*. Zoetermeer.

Programmeren zonder computer met binair tellen

Wietse van Bruggen & Remco Pijpers, Kennisnet

Met deze binair tellen les[1] leren kinderen nadenken over computertaal zonder dat ze een computer nodig hebben. Ze leren cijfers omzetten naar binaire code. Tevens maken ze de stap naar letters. Het resultaat is een interactieve les waar leerlingen aan de slag gaan met coderen. Door tellen in nullen en enen vertalen ze cijfers (en letters) naar computertaal en leren ze het principe van binair tellen.

Lesoverzicht

Doel

Leerlingen laten nadenken over binair tellen zonder dat ze daar een computer bij nodig moeten hebben.

Duur

Een les van 60 minuten.

Doelgroep

Deze les kan gegeven worden aan leerlingen vanaf groep 3-4 met meer uitdagingen voor de hogere groepen (zie extra opdrachten).

Werkvorm

Eerst een centrale introductie, hierna gaan de leerlingen klassikaal aan de slag met de lesbrief en zijn er ook een aantal individuele en duo opdrachten. Aan het eind is er een centrale afsluiting.

Benodigd materiaal

Voor iedereen één lesbrief en een stapeltje kaartjes zoals het voorbeeld (werkblad). Print de kaartjes vooraf uit en snij ze of laat ze door de leerlingen netjes uitknippen.

[1] Deze les is met toestemming overgenomen van http://www.codekinderen.nl/leerling/unplugged/binair-tellen/index.html

Lesverloop

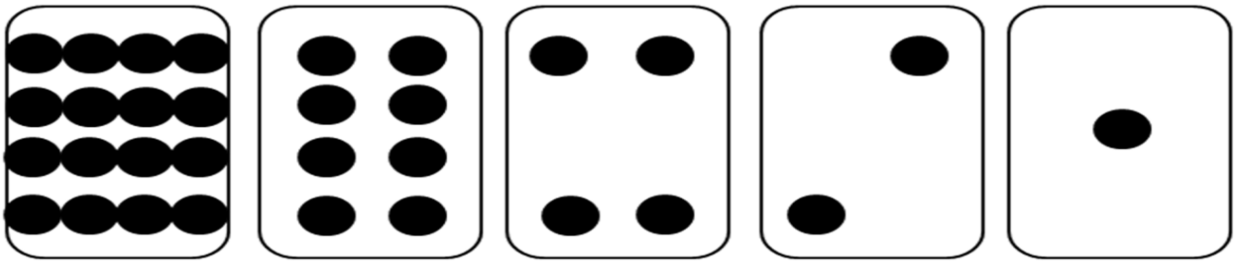
Klassikaal

Open de les klassikaal met een aantal vragen.

- Wie weet er wat voor taal de computer spreekt?
- Hoe ziet die er uit?
- Dat ziet er uit als enen en nullen.
- Waarbij de één ja is en nul is nee.
- Maar hoe kun je nu die enen en nullen veranderen in taal die een computer begrijpt?
- Of moet hij je woorden vertalen naar een taal die hij begrijpt?

Opdracht

Deel de lesbrieven en de kaartjes uit.
Ga klassikaal met de lesbrief verder.



Loop rond bij vraag 13 en kijk of de leerlingen het snappen. Help de leerlingen individueel. Na vraag nummer 17 moeten iedereen even wachten op de volgende uitleg. De relatie uit tussen de stap naar de letters moet uitgelegd worden.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

Maak op het digibord het woord *aap* en laat zien hoe je dit omzet naar binaire nummers met behulp van de kaartjes.
Laat de leerlingen opdracht 18 en 19 maken.
Laat de leerlingen de opdrachten 20 en 21 in tweetallen maken. Je kunt eventueel opdracht 21 herhalen.

Extra voor groep 5-6

Als extra uitdaging voor groep 5-6 is het mogelijk om bij het tellen de leerlingen hun geboorte jaar op te laten schrijven.

- Wanneer ben je geboren?
- Hoe schrijf je dit digitaal? (dag, maand, jaar)
- En hoe schrijf je dit binair?

dag						
maand						
jaar						

Extra voor groep 7-8

Als extra uitdaging voor groep 7-8 zou kunnen zijn dat de leerlingen eigen code’s verzinnen hoe je dan hoofdletters aan moet geven. De computer neemt alles heel letterlijk. Hoe zouden ze dit oplossen?
En hoe schrijf je dan je Voornaam en Achternaam op de juiste manier binair?
Laat ze in teams van drie nadenken en met een oplossingen komen.

Afsluiting klassikaal

Bespreek de les met de leerlingen:

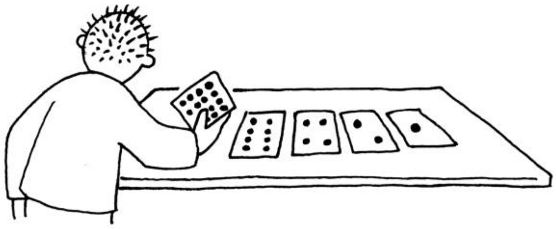
- Wat hebben jullie geleerd?
- Wat is jullie opgevallen?
- Wat vonden jullie moeilijk?
- Wat was makkelijk?
- Wat voor cijfer geef je deze les? Schrijf het binair op.

Verder lezen en kijken?

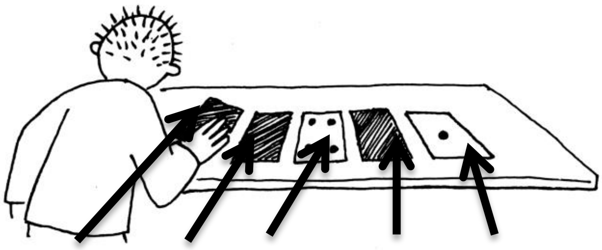
Wil je meer weten over programmeren? Surf naar codekinderen.nl of naar de computer science unplugged lessen van csunplugged.org. De binair tellen les is geïnspireerd op deze unplugged lessen.

Programmeren zonder computer met Binair tellen

We beschrijven hier stap voor stap hoe je met kaartjes met daarop stippen kan lezen en schrijven. Een computer spreekt alleen binaire taal (in enen en nullen). Jij leert nu ook zo lezen en schrijven.



1. Jullie krijgen allemaal een setje kaartjes
2. Leg de kaartjes op deze manier op je tafel
3. Wat valt je op?
4. Als er nog een kaartje zou zijn. Hoeveel stippen zou deze dan hebben?



5. Hoeveel punten is het in totaal?
6. Maak eens het nummer 1 met deze kaarten
7. En hoe zou je nummer 5 neerleggen?
8. In computer taal schrijf je dit als:

(De achterkant van je kaartje is 0 en als je de stippen ziet is het 1).

0	0	1	0	1

9. Leg nummer 6 met de kaartjes

10. Hoe schrijf je dit in computertaal?

11. Leg nummer 21 met je kaartjes

12. En hoe schrijf je dit in computertaal?

13. Vul hieronder de computertaal van de cijfers in. Je kunt als je het moeilijk vindt steeds de kaartjes gebruiken.

0						13					
4						15					
7						19					
11						25					
12						29					

14. Neem een nummer in gedachten en draai dit met je kaartjes

15. Schrijf hier ……. een nummer op. Laat je klasgenoot dit maken met de kaartjes.

16. Welk nummer staat hier: ……

1	0	1	0	1

17. En welk nummer staat hier: …….

1	1	1	1	1

18. We gaan nu de cijfers omzetten naar letters. Stel dat we afspreken dat a=1 en b=2.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

19. Zo schrijf je dan het woord aap:

	Omzetten naar computertaal				
a	0	0	0	0	1
a	0	0	0	0	1
p	1	0	0	0	0

20. Schrijf een woord van maximaal 4 letters.

Woord					

21. Schrijf weer een woord van maximaal 4 letters en zet dit om naar computertaal.

Woord	Omzetten naar computertaal					Woord

22. Werk samen en laat de persoon die naast je zit het woord vertalen.

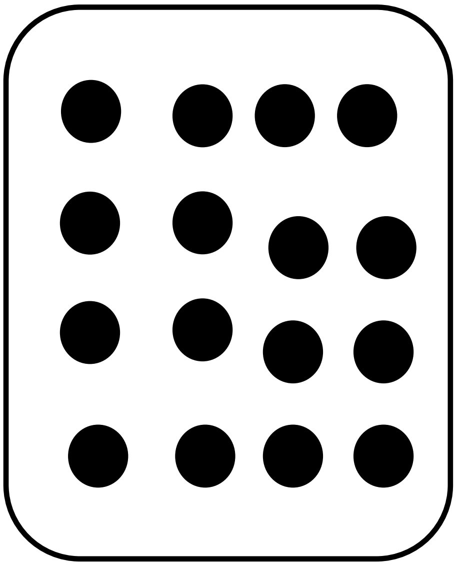
- Bedek je woord met je hand.
- De ander vertaalt nu de computertaal naar letters en schrijft dit in de kolom rechts.
- Heeft hij of zij het goed geraden? Was het goed?
- Nu ga jij zijn/haar computertaal vertalen naar letters.
- Had je het goed?

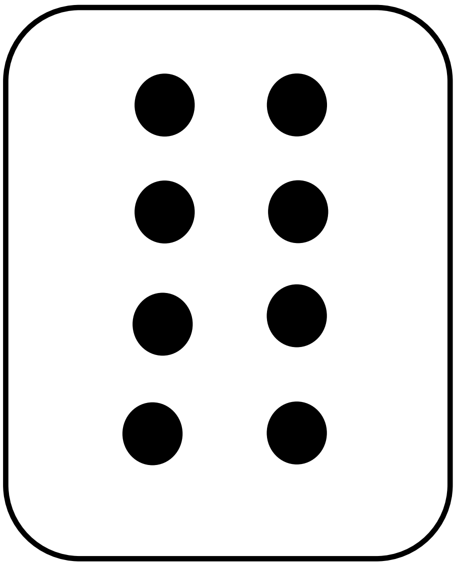
23. Doe deze oefening nog een keer met een woord van maximaal 8 letters.

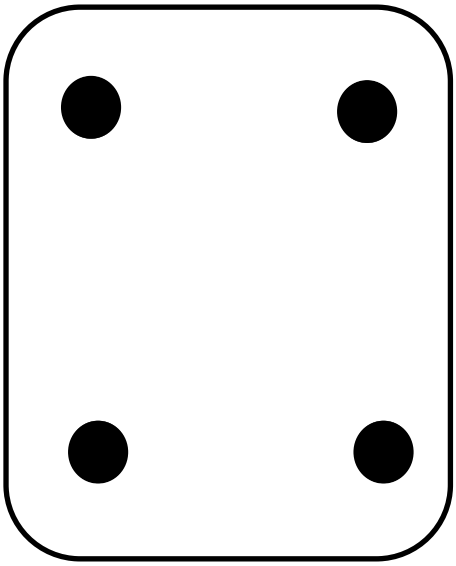
Woord	Omzetten naar computertaal					Woord

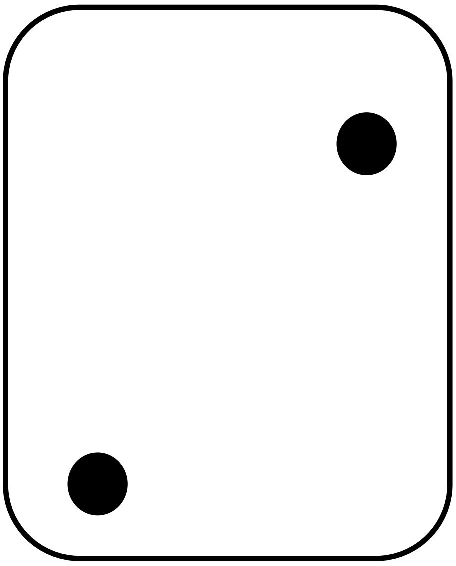
Binaire kaartjes.

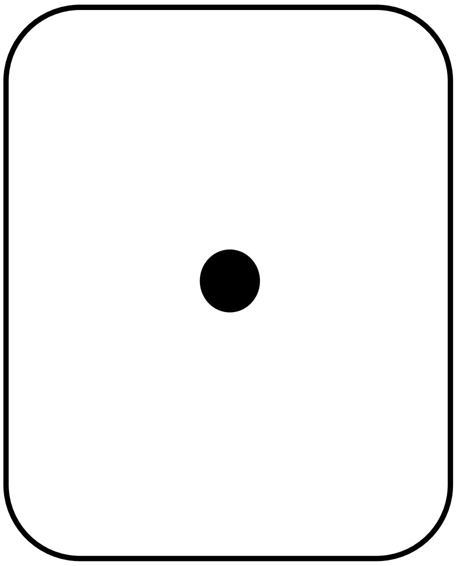
Iedere leerling krijgt 1 setje.











Excel in de klas bij probleemoplossen
Computational thinking als gereedschap bij reken-wiskundeproblemen

Jos van den Bergh, Avans Hogeschool Pabo Breda &
Malmberg: De Wereld in Getallen 5

Inleiding

Bloom onderscheidt lagere en hogere denkniveaus. Het denken van lagere orde, zoals onthouden en reproduceren, begrijpen en toepassen, is voorwaardelijk voor het hogere orde-denken. Hogere orde-denkvragen gaan over analyseren, evalueren en creëren. Deze denkactiviteiten zijn voor begaafde leerlingen essentieel, maar voor alle kinderen aan te bevelen. Alle kinderen dienen immers in hun denken uitgedaagd te worden. Vandaar de aandacht voor de zogeheten 21e eeuwse vaardigheden waarin de hogere-orde denkvaardigheden prominent vertegenwoordigd zijn (Janson, 2014). Binnen reken-wiskundedidactiek wordt al jarenlang gepleit voor meer aandacht voor probleemoplossen in de klas als middel om kinderen te leren denken (Treffers, 1989).

In dit hoofdstuk schets ik aan de hand van twee voorbeelden hoe leerkrachten hun leerlingen kunnen stimuleren om bij het oplossen van rekenwiskundige problemen de computer succesvol in te zetten. Het gaat hierbij om het uit handen nemen van het achterliggende rekenwerk, niet zoals bij het hanteren van een rekenmachine, maar op een geavanceerder niveau. Door gebruik te maken van formules in een *spreadsheet* programma kan het ambachtelijke rekenwerk allemaal in één keer gedaan worden, zodat de kinderen hun aandacht volledig kunnen richten op het interpreteren van de resultaten en daardoor op het oplossen van problemen. Met het oplossen van problemen komen tegelijkertijd vaardigheden uit de categorie *computational* thinking in beeld. Om de kinderen op een niveau te brengen dat ze Excel als gereedschap kunnen inzetten, is een minicursus toegevoegd. Deze bestaat uit een oefenbestand en een docentenhandleiding. De opbrengst is dus tweeledig: enerzijds krijgen de kinderen gereedschappen in handen waarmee problemen opgelost kunnen worden en anderzijds leren de kinderen enkele grondbeginselen van het programmeren kennen.

Het belang van leren programmeren

Je kunt geen boek of website over onderwijs in de 21^{e} eeuw openen zonder als lezer gewezen te worden op het belang van programmeren. Programmeren is een vaardigheid die steeds belangrijker wordt in onze maatschappij. Het verbetert het creatief en logisch denken en stimuleert het probleemoplossend vermogen. Het zou niet geïsoleerd aandacht moeten krijgen, maar geïntegreerd binnen een of meer vakgebieden. De combinatie met rekenen-wiskunde is daarvoor een goede kandidaat.

Diverse landen hebben inmiddels hun ict-onderwijs vernieuwd. Zo krijgt in het Verenigd Koninkrijk elke leerling van 5 tot en met 16 jaar sinds september 2014 les in informatica (*computing*). Wie kan programmeren heeft (later) betere kansen op de arbeidsmarkt en in een groeiende technologiesector is dat belangrijk, zo is de gedachte hierachter. Ook in Nederland heeft het nadenken over *computational thinking* geleid tot een leerlijn programmeren (SLO, 2013). Veel van de onderdelen van die leerlijn zijn vertaald in zogeheten *unplugged* activiteiten[1]. Dat zijn activiteiten waarbij geen gebruik wordt gemaakt van ict of *devices*, zodat scholen er op een laagdrempelige manier mee aan de slag kunnen. Maar voor kinderen is het natuurlijk ook inspirerend om direct het effect van hun programmeerinspanningen te kunnen zien. Dit hoofdstuk laat zien hoe dergelijke succeservaringen vorm gegeven kunnen worden.

Bij de ontwikkeling van *spreadsheet* programma's enkele decennia geleden, hadden de bedenkers niet voor ogen om een bestaande praktijk te automatiseren, maar vooral om de nieuwe mogelijkheden die computers konden bieden te benutten. Het ging om een dynamische toepassing. In een grote tabel worden de cellen door middel van formules met elkaar in verband gebracht. Door vervolgens een enkel getal in de grote tabel te veranderen, worden daarna direct alle formules in het werkblad opnieuw doorgerekend. En kunnen daarmee op een eenvoudige manier de gevolgen van verschillende scenario's doorgerekend worden.

Programmeren in Excel, wat bedoelen we daar eigenlijk mee?

De meeste gebruikers van Excel beperken zich tot de handige tabelmogelijkheden. Ook het gebruik van de somfunctie om een aantal getallen bij elkaar op te tellen en de snelle grafiekenmaker zijn voor veel gebruikers niet vreemd. Maar de meer geavanceerde mogelijkheden waarbij allerlei fundamentele programmeerprincipes kunnen worden toegepast zien we slechts bij een gering percentage gebruikers. Zeker in het primair onderwijs blijven die mogelijkheden vaak onbenut. Voor kinderen biedt Excel echter uitgelezen kansen om kennis te maken met het verschijnsel coderen. Met programmeren in Excel bedoelen we het aanbrengen van gecodeerde opdrachten in de vorm van formules, waarmee complexe doorrekeningen kunnen worden gemaakt.

Om de kinderen een rekentool als Excel te laten leren gebruiken bij het oplossen van problemen, is het nodig hen eerst een beetje vertrouwd te maken met de formulemogelijkheden van Excel. Voor dat doel is in de bijlage bij dit hoofdstuk een oefenbestand en een handleiding toegevoegd waarmee elke leerkracht in groep 7 of 8 zijn leerlingen op speelse wijze kan laten werken. Wanneer die basis is gelegd kunnen kinderen leren sommige rekenwiskundige problemen op te lossen met behulp van Excel.

[1] Zie de hoofdstukken van Rens Gresnigt, Lou Slangen & Wim Brouwer en van Vincent Jonker & Monica Wijers.

Twee mooie verjaardagproblemen

Als wiskundeleraar was ik in de gelukkige omstandigheid dat mijn dochter op mijn dertigste verjaardag werd geboren. In de eerste plaats was ik voor de tweede keer vader geworden en op de tweede plaats leverde dit kansen op mooie rekenvragen op, want elk jaar op onze verjaardagen kon ik de vraag stellen (maar niet aan mijn dochter hoor) hoeveel keer zo oud ik was (geworden) als mijn dochter. In sommige jaren leverde dat een mooi geheel getal op, zoals bijvoorbeeld op haar derde verjaardag omdat 33 : 3 = 11, dus met een rest van 0. In andere jaren was dat niet het geval, zoals op haar vierde, want 34 : 4 = 8 rest 2. De voor de hand liggende vragen die opborrelen zijn de volgende: hoe vaak gebeurt het dat mijn leeftijd een geheel aantal keer haar leeftijd is? En dan natuurlijk: hoe komt dat, hoe zit dat precies?

Een ander mooi probleem met leeftijden is het volgende. Mijn broer merkte tijdens onlangs op dat zijn leeftijd, 59, en die van mijn moeder, 95, als het ware omgekeerd waren. *Ja, zei mijn moeder, maar ik herinner me dat het 33 jaar geleden ook zo was. Toen was ik namelijk 62 en jij 26*. De batterij vragen die nu om een antwoord schreeuwen zijn: Hoe komt dat, of is het toeval? Gebeurt dat nog vaker? Is het bij elke twee leeftijden op den duur een keer zo dat je beide getallen kunt omkeren?

Leren over de werking van de computer door problemen op te lossen met behulp van de computer

Beide problemen zijn heel goed met eenvoudige wiskunde op te lossen, maar leerlingen in het basisonderwijs beschikken nog niet over voldoende wiskundig arsenaal om zo'n probleem onmiddellijk te lijf te gaan. Wel is het gewoonweg proberen (aanrommelen) en onderzoeken een kansrijke aanpak. En als je dan al het nodige rekenwerk kunt uitbesteden is dat een welkome omstandigheid, omdat je je dan helemaal kunt concentreren op het probleem zelf. Dat is de kracht van de in dit hoofdstuk beschreven werkwijze. De leerlingen uit groep 7/8 leren bij probleemoplossen gebruik te maken van de computer en wel van de programmeermogelijkheden ervan. Dus niet alleen is de inzet van de computer bedoeld om het afzonderlijke rekenwerk uit te besteden, maar vooral om te leren hoe je dat heel efficiënt kunt doen.

De ontdekking dat het aantal keer dat het verjaardagsverschijnsel zich voordoet overeen komt met het aantal delers van dertig, doet het vermoeden rijzen dat dit voor andere leeftijden ook op zal gaan. Dit vermoeden kan opnieuw getest worden door het in Excel te programmeren.

Om dit probleem op te lossen zijn verschillende wegen te bewandelen. Je kunt natuurlijk eerst gewoon wat proberen en dan besluiten om alle mogelijkheden uit te zoeken door er een lijstje van te maken. Je zou ook direct een meer wiskundige oplossing kunnen proberen te vinden. Kinderen die ik dit probleem voorlegde, gingen als vanzelf aan de slag met het samenstellen van een lijstje. Bij deze aanpak kun je mooi gebruik maken van de technische hulpmiddelen die tegenwoordig alom

beschikbaar zijn. Ik beschrijf hieronder hoe je met Excel het bedoelde lijstje kunt laten ontstaan.
Bij probleemoplossen gaat het uiteraard niet alleen over de zoektocht naar het antwoord, maar vooral ook om na te denken over de zelfbedachte en zelf geconstrueerde hulpmiddelen om dat antwoord te vinden. De strekking van dit hoofdstuk is dan ook handreikingen te bieden om leerlingen zich bewust te maken van de onder handbereik liggende gereedschappen en de manier waarop deze ingezet kunnen worden.

De uitwerking van het leeftijdenprobleem

We beginnen met twee kolommen waarin de leeftijden van vader en dochter komen, dus typen we (Afb. 1):

	A	B
1	leeftijd	
2	dochter	vader
3	0	30

Afb. 1. Twee kolommen.

Nu zou je eronder in rij 4 de getallen 1 en 31 kunnen typen, in de volgende rij 2 en 32 en zo verder, maar in plaats daarvan laten we liever Excel het werk doen. Dus in plaats van de getallen die zojuist werden voorgesteld typen we formules die die getallen opleveren. Dus onder de 0 in cel A3 plaatsen we in cel A4 de formule =A3+1 (cel boven plus 1), gevolgd door Enter. In cel A3 verschijnt dan 1, de uitkomst van de formule die we zojuist hebben geplaatst. In de werkbalk zie je de formule =A3+1 nog staan. Je kunt de formule in zijn geheel via het toetsenbord invoeren, dus typen, maar er zijn ook andere manieren. Meestal zijn andere manieren aan te bevelen omdat typewerk gemakkelijk tot fouten kan leiden. Alles wat je typt moet immers volledig correct zijn. Nadat je op = hebt gedrukt, kom je in de formule-invoermodus en leidt het klikken op een cel tot het plaatsen van de naam van die cel in de werkbalk.
In cel B4 komt een formule die de leeftijd van vader berekent, gegeven de leeftijd van de dochter. Dus een geschikte formule is hier: =A4+30 (cel links plus 30). Maar iemand zou kunnen opmerken dat in de kolom van de leeftijden van vader evengoed de formule =B3+1 (cel boven plus 1) zou kunnen komen te staan. Dat is volkomen juist; soms blijken er meer wegen naar Rome. Nu in de cellen A4 en B4 de juiste formules staan, is de rest een kwestie van kopiëren. Dus selecteer beide cellen A4 en B4 (dat heet in Excel een cellenbereik en wordt genoteerd als A4:B4) en gebruik de vulgreep[2] om de formules gelijktijdig naar beneden te kopiëren. Het gevolg is (Afb. 2):

[2] Zie de bijlage bij dit hoofdstuk *Zoek de formule – Handleiding voor de leerkracht.*

	A	B
1	leeftijd	
2	dochter	vader
3	0	30
4	1	31
5	2	32
6	3	33
7	4	34
8	5	35
9	6	36
10	7	37

Afb. 2. Het begin is er…

Nu de leeftijden netjes in twee rijen naast elkaar staan kunnen we zien hoe de situatie elk jaar op de verjaardag is. De volgende stap is om Excel te instrueren om die gevallen waarbij het getal in kolom B deelbaar is door het getal in kolom A eruit te vissen. Dat gaat eenvoudig door gebruik te maken van twee standaard in Excel aanwezige functies. De ene functie berekent de rest bij een deling en de andere functie, de zogeheten ALS-functie, beschrijft een voorwaardelijke situatie. De opbouw van het werkblad gaat nu stapsgewijs, waarbij elke keer als er iets berekend is er een nieuwe kolom wordt benut om dat tussenresultaat te noteren. In een latere fase gaan we deze tussenresultaten combineren zodat een overzichtelijk werkblad ontstaat waarbij het onderliggende rekenwerk aan het zicht wordt onttrokken.
We beginnen met de rest bij deling door een getal. Deze functie heet in Excel REST en heeft twee variabelen. De eerste variabele is het getal dat gedeeld gaat worden, de tweede het getal waardoor gedeeld wordt. De functie levert dan als resultaat niet de deling zelf op, maar alleen de rest bij die deling. Dus de formule =REST(B4;A4) levert als uitkomst 0 op want B4 (31) gedeeld door A4 (1) geeft als uitkomst 1 met rest 0. Kopieer deze formule in C4 naar beneden met de vulgreep.
Nu we weten wat de rest is bij deling, kunnen we zien in welke gevallen die rest 0 is (en de deling dus opgaat). In die gevallen wil je niet alleen de rest zien maar ook de uitkomst van de deling, namelijk hoeveel keer zo oud de vader is als de dochter. Voor situaties als deze waarbij afhankelijk van de uitkomst van een bewerking een vervolgberekening moet worden uitgevoerd of niet, gebruiken we de ALS-functie van Excel. Elke programmeertaal kent een dergelijke voorwaardelijke functie. In Excel heeft ie de gedaante: =ALS(<voorwaarde>;<dan dit>;<anders dit>), waarbij tussen de gebroken haakjes < en > opdrachten staan die Excel kan uitvoeren. In ons geval is de voorwaarde om na te gaan of in de vorige kolom een 0 staat, in welk geval de deling B4/A4 moet worden uitgerekend. Als in de vorige kolom echter geen nul staat, dan hoeft er nu niets te gebeuren. In Excel geven we dat aan met “” (dubbele aanhalingstekens openen, onmiddellijk gevolgd door dubbele aanhalingstekens sluiten). Als je die laatste opdracht weglaat, wat ook mag, dan geeft Excel echter als uitkomst 0 en dat vind ik minder fraai, vandaar. Ook deze ALS-formule kopiëren we weer omlaag met behulp van de vulgreep.

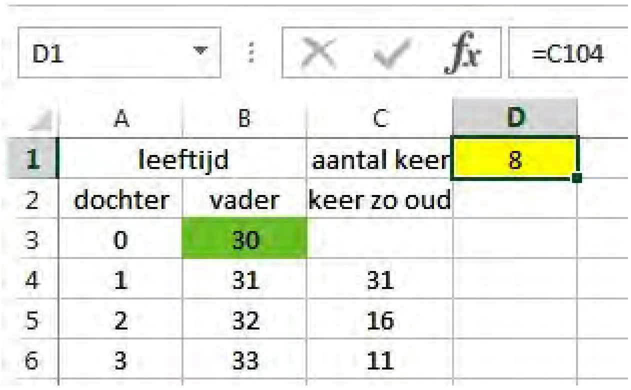
Nu is het werkblad bijna volledig ingericht. Er zijn nog twee zaken die de aandacht vragen. Ten eerste hoe ver het werkblad moet doorlopen naar beneden en ten slotte hoe veel keer de deling een heel getal heeft opgeleverd. Een antwoord op de eerste vraag is indachtig de leeftijdencontext dat 100 voldoende zou moeten zijn, maar een oplettende leerling zal opmerken dat wanneer het moment is gepasseerd dat vader precies twee keer zo oud is als zijn dochter er niet meer verder hoeft te worden gezocht. Immers, je realiseren dat *één keer zo oud* hetzelfde betekent als *even oud* is voldoende om in te zien dat dat natuurlijk nooit gaat gebeuren. Dus is kopiëren tot het moment dat vader twee keer zo oud is als zijn dochter voldoende. Wanneer dat is, zal hopelijk een leerling opmerken, is natuurlijk “als dochter de leeftijd heeft die vader had toen dochter geboren werd.” Omwille van de bruikbaarheid verderop kiezen we er toch voor om de leeftijd van de dochter door te laten lopen tot 100 in cel A103. Ten slotte moet er nog iets geteld worden. Ook dat kan eenvoudig met de functie AANTAL, die het aantal cellen in een bereik telt dat getallen bevat. De werkwijze is om onder de kolom waarin de getallen staan die aangeven hoeveel keer zo oud vader is als zijn dochter cel C104 te vullen met de formule =AANTAL(C3:C103).

Tot besluit geven we nog een paar tips om het werkblad zo overzichtelijk mogelijk te houden (Afb. 3). Het is verstandig om boven elke kolom kort aan te geven wat de getallen in die kolom voorstellen, zodat je later in een oogopslag nog kunt zien wat het werkblad doet. Het aantal kolommen is nog wat terug te brengen door handige combinaties van functies te gebruiken. Zo kun je kolom C en kolom D samenvoegen door in C4 de beide formules te vervangen door deze ene: =ALS(REST(B4;A4)=0;B4/A4;"")

	A	B	C
1	leeftijd		aantal keer
2	dochter	vader	keer zo oud
3	0	30	
4	1	31	31
5	2	32	16
6	3	33	11
7	4	34	

Afb. 3. Overzichtelijk gemaakt.

De oplossing van het probleem is nu onderin het werkblad te vinden, maar dat kun je met een eenvoudig trucje ook bovenin zichtbaar maken door een verwijzing naar de cel die het aantal hits telt (Afb. 4). Zo hoef je niet naar beneden te scrollen om het resultaat te zien. In D1 type je dus =C104.
Als laatste stap kun je, zoals in de afbeeldingen te zien is, het startgetal 30 in cel B3 een kleurtje geven. Door in deze cel een ander getal te typen zie het hele werkblad onmiddellijk veranderen en is daarmee het werkblad een soort experimenteerruimte geworden.


D1 =C104

	A	B	C	D
1	leeftijd		aantal keer	8
2	dochter	vader	keer zo oud	
3	0	30		
4	1	31	31	
5	2	32	16	
6	3	33	11	

Afb. 4. Aantal keer.

Reflectie

Nu je in een handomdraai kunt zien hoe vaak het verschijnsel voorkomt bij een willekeurige leeftijd van vader, ontstaat de behoefte aan een verklaring voor dat verschijnsel.
Je kunt jezelf afvragen of het toeval is dat in kolom C precies acht keer een geheel getal voorkomt, en dat het aantal delers van dertig ook precies acht is. Welnu, dit zijn de acht delers van dertig: 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, en dat zijn precies de getallen uit kolom A waar een getal uit kolom C bij hoort. Dat is geen toeval. Laten we bijvoorbeeld eens naar rij 5 kijken. Daar staan de getallen 2, 32 en 16. Nu geldt:

$$32 : 2 = (30 + 2) : 2 = 30 : 2 + 2 : 2 = 15 + 1 = 16.$$

En kijken we bijvoorbeeld naar rij 13, dan staan daar: 10, 40 en 4. Nu geldt:

$$40 : 10 = (30 + 10) : 10 = 30 : 10 + 10 : 10 = 3 + 1 = 4.$$

En dit kun je steeds zo doen elke keer als je een deler van dertig tegenkomt. Dus het aantal keer dat de leeftijd van vader precies een geheel aantal keer de leeftijd van dochterlief is, is precies gelijk aan het aantal delers van de leeftijd van vader (bij de geboorte van zijn dochter). Dus we hebben met dit werkblad een methode in handen om snel alle delers van een getal onder de 100 te vinden. Door in cel B3 een ander startgetal in te voeren, verschijnt in het gele vakje D1 onmiddellijk het aantal delers van dat ingevoerde getal. Het werkblad is nu geschikt om op een hoger niveau een verdiepingsslag te maken. Bijvoorbeeld om antwoord te krijgen op vragen als *welke getallen onder de honderd hebben precies acht delers?*

Extra uitdaging

Een kleinzoon is op dezelfde dag jarig als zijn grootvader. Op de dag dat hij zes jaar wordt, ontdekt zijn moeder dat de leeftijd van haar zoon voor het zesde achtereenvolgende jaar een deler is van de leeftijd van zijn opa nu. Hoe oud is opa op dat moment?

Het probleem van de omkeercijfers

Het tweede probleem laat zich ook eenvoudig programmeren, zoals we nu laten zien. Je richt het werkblad weer zo in dat je later nog begrijpt wat de getallen voorstellen. Dan komt bijvoorbeeld in A5 de leeftijd van de zoon en in B5 de leeftijd van de moeder (Afb. 5). Om te ontdekken of deze omkering in het verleden ook optrad, komen er formules in A6 en B6 die ervoor zorgen dat de tijd terugloopt. Dus in A6 komt =A5–1 en in B6 komt =B5–1. Omdat beide formules hetzelfde zijn, kun je de eerste formule ook kopiëren naar de cel ernaast met behulp van de vulgreep. Met diezelfde vulgreep kopieer je vervolgens beide formules naar beneden en zie je direct de omkeergetallen 48 en 84 verschijnen, dus elf jaar eerder. Dit is een eerste versie waarmee je de omkeergetallen nog zelf eruit pikt en bijvoorbeeld een kleurtje geeft. Wie meer wil kan de omkeergetallen ook door Excel laten opsporen.

	A	B	C
1	Leeftijden die je kunt omkeren		
2			
3			
4	Zoon	Moeder	
5	59	95	
6	58	94	
7	57	93	
8	56	92	
9	55	91	
10	54	90	
11	53	89	
12	52	88	
13	51	87	
14	50	86	
15	49	85	
16	48	84	
17	47	83	
18	46	82	
19	45	81	

Afb. 5. Lijst met omkeercijfers.

Om dit voor elkaar te krijgen laat je Excel van de getallen in kolom A en B het aantal tientallen en het aantal eenheden uitrekenen. Vervolgens dient Excel te controleren of het aantal tientallen in het ene getal gelijk is aan het aantal eenheden in het andere getal en tegelijkertijd het aantal eenheden in het eerste getal gelijk is aan het aantal tientallen in het andere getal. In dat laatste geval blijken de beide getallen op dezelfde rij namelijk omkeergetallen te zijn. Bij deze stappen kun je gebruik maken van de functie REST(a;b) die de rest van een geheel getal a bij deling door een geheel getal b berekent. Met deze functie kun je het aantal eenheden van een getal bepalen, dat is namelijk de rest bij deling door tien van dat getal. Daarna is het cijfer van de tientallen te vinden door eerst het zojuist gevonden eindcijfer van het oorspronkelijke getal af te halen en daarna de uitkomst te delen door tien. Bij 48 worden de tussenresultaten dan: REST(48;10) = 8, 48 – 8 = 40, 40 : 10 = 4. Dit idee bouwen we als volgt in in kolom C, D en E: in C5 komt =REST(A5;10), in D5 komt: =A5-C5. En in E5 komt: =D5/10. Hetzelfde doen we in de kolommen F, G en H met het getal in kolom B, dus F5 wordt =REST(B5;10), G5 wordt: =B5-F5 en H5 wordt: =G5/10. Nu kan eenvoudig getest worden of de getallen in A en B omkeergetallen zijn. We gebruiken de volgende kolom I voor deze test. De programmeercode die hiervoor nodig is lijkt veel op gewone taal: =EN(C5=H5;E5=F5). De EN-functie kan slechts twee mogelijke antwoorden opleveren: WAAR of ONWAAR. Het antwoord WAAR treedt op als beide condities waar zijn. Dit betekent dat in deze kolom het woordje WAAR komt te staan als de getallen omkeergetallen blijken te zijn en ONWAAR wanneer dat niet het geval is. Wil je ook nog weten hoe vaak het omkeerverschijnsel optreedt, dan noteren we in kolom J de formule =ALS(I5;1;0). De betekenis van deze code is: als de inhoud van de vorige cel (I5) WAAR is dan wordt de uitkomst 1 en anders wordt de uitkomst 0.

Finishing touch

Nu je met zorg de formule in rij 5 hebt aangebracht kun je de vruchten van je werk plukken. Selecteer de cellen over de gehele breedte van C5 tot en met J5 en kopieer de formules met behulp van de vulgreep naar beneden. Je ziet nu dat alle cellen zich razendsnel vullen met passende inhoud en dat in de laatste kolom een 1 staat wanneer er sprake is van omkeergetallen. Die blijken elke elf rijen op te treden, dus wat moeder zei over 33 jaar geleden klopte wel, maar het gebeurde nog veel vaker.

Tot besluit

In een kort bestek is hier een aantal basale programmeerinstructies is langsgekomen. Naast de bekende hoofdbewerkingen +, –, * (voor vermenigvuldigen) en / (voor delen) zijn dat ook de functies REST, EN, SOM en ALS. Met dit stelletje aan coderingsmogelijkheden zijn voor kinderen al ongelooflijk veel toepassingen te bouwen, en is een krachtig gereedschap onder handbereik gekomen om Excel in te zetten bij het oplossen van rekenwiskundige problemen. Een probleem dat ook heel mooi opgelost kan worden op deze manier is *het rijtje van 100*. Een uitwerking hiervan staat in de bijlage van dit hoofdstuk.
Voor wie de smaak te pakken heeft gekregen staat in de tweede bijlage van dit hoofdstuk nog een aantal problemen uit het *Ei van Columbus*, de vaste problemenrubriek in het rekentijdschrift *Volgens Bartjens*, die ook uitnodigen om geprogrammeerd te worden.

Computational thinking

Computational thinking is onderdeel geworden van de 21e eeuwse vaardigheden. Programmeren is een manier waarop leerlingen aan hun *computational thinking* vaardigheden kunnen werken. De definitie van SLO van *computational thinking* is:

> *Computational thinking* is het procesmatig (her)formuleren van problemen op een zodanige manier dat het mogelijk wordt om met computertechnologie het probleem op te lossen. Het gaat daarbij om een verzameling van denkprocessen waarbij probleemformulering, gegevensorganisatie, -analyse en -representatie worden gebruikt voor het oplossen van problemen met behulp van ICT-technieken en -gereedschappen (http://curriculumvandetoekomst.slo.nl/).

Verder lezen?

Meer informatie over *computational* thinking is te vinden op de website Curriculum van de Toekomst van SLO: http://curriculumvandetoekomst.slo.nl.

Literatuur

Janson, D. (2014). Leren denken als basis voor succes op school. http://wij-leren.nl/leren-denken.php
SLO. (2013). Leerlijn programmeren stoomt kinderen klaar voor de toekomst. http://www.slo.nl/nieuws/persbericht-leerlijn-programmeren/
Treffers, A. & De Moor, E. (1989). *Proeve van een nationaal programma voor het Reken-Wiskunde-onderwijs op de basisschool. Deel 1: Overzicht Einddoelen*. Tilburg: Zwijsen.

Bijlage 1 bij *Excel in de klas bij probleemoplossen*
Zoek de formule - Handleiding voor de leerkracht

Jos van den Bergh, Avans Hogeschool Pabo Breda &
Malmberg: De Wereld in Getallen 5

Het werkblad *Zoek de formule* is ingericht om kinderen in spelvorm vertrouwd te maken met het gebruik van formules. Het is in principe zelfcontrolerend materiaal waar zelfstandig mee gewerkt kan worden. Echter, de kans bestaat dat de kinderen die zelfstandig met de oefeningen aan de slag overal OK krijgen zien, terwijl ze toch niet de doelstelling achter de oefeningen hebben bereikt. Het werkblad heeft namelijk een dubbele laag: één laag waar de gebruiker de juiste getallen invoert, die dan door Excel al dan niet voorzien worden van een OK, en een tweede laag waarbij de getallen worden overschreven door formules die als uitkomst de getallen van zojuist opleveren. Om beide lagen te benutten is een interactieve aanpak samen met de kinderen een goede oplossing. Een succesvolle werkwijze is dan ook om eerst de kinderen uit te dagen overal de juiste getallen in te voeren, om daarna de aandacht te richten op de uiteindelijke bedoeling. Die is namelijk om passende formules te vinden die de eerder gevonden uitkomsten opleveren.
Het werkblad is zodanig ingericht dat de gebruiker alleen maar de cellen met een lichtblauwe achtergrondkleur kan vullen. Een poging om een andere cel te veranderen leidt tot een foutmelding. Bovendien zijn een aantal opties uitgeschakeld: je ziet geen formules en geen rij- en kolomkoppen. Dit is bewust gedaan om ervoor te zorgen dat de leerlingen gericht blijven op het doel van de oefening.

In iedere cel in Excel kun je in principe drie soorten invoer plaatsen: tekst, een getal of een formule. Nadat je de invoer hebt afgesloten (door op Enter of op Tab te drukken) wordt de inhoud van die cel getoond. Die inhoud kan dus het getal of die tekst zijn die je er erin hebt geplaatst, maar het kan ook de uitkomst zijn van een berekening. Deze laatste mogelijkheid treedt op als er een formule in de cel staat, die berekend wordt zodra je de celinvoer afrondt. Bijvoorbeeld: is in een cel, zeg cel A2, de formule =3*37 opgeslagen, dan zie je in die cel de uitkomst van die berekening staan, in dit geval 111. Nu is het opslaan van een formule als =3*37 misschien niet erg zinvol, omdat je weet dat die altijd 111 oplevert, zodat je dan beter meteen 111 in A2 had kunnen invoeren. Een andere formule die een kleine aanpassing is van de vorige zou bijvoorbeeld kunnen zijn =3*A5. Nu bevat de formule een verwijzing naar cel A5, wat betekent dat Excel de waarde van cel A5 ophaalt en daarmee de berekening =3* uitvoert. Met andere woorden: het getal dat in A5 staat wordt vermenigvuldigd met drie. Dus de uitkomst is nu afhankelijk van de inhoud van cel A5. Staat er in A5 het getal 37, dan levert de formule de uitkomst 111 op. Veranderen we de inhoud van cel A5, dan verandert daarmee direct de inhoud van A2. Daarmee hebben we feitelijk de kracht van een spreadsheetprogramma zoals Excel beschreven.

Bijvoorbeeld bij de eerste opdracht van het werkblad gaat het eenvoudig om de telrij verder in te voeren. Wanneer in de lichtblauwe cellen achtereenvolgens de getallen 5, 6, 7 en zo verder ingevoerd worden, verschijnt aan de rechter zijde steeds het woord OK ter controle. Dat is het eerste deel van de uitdaging voor de kinderen. Vervolgens laat u alle cellen weer leegmaken. Nu is de uiteindelijke bedoeling om in elke cel in deze kolom de formule = <inhoud van cel erboven> + 1 in te voeren. Hoe dat precies in zijn werk gaat staat hieronder bij formule kopiëren. Deze stap levert het gewenste leereffect op: je kunt met een enkele formule de inhoud voor een heel reeks cellen bepalen, zodat toch iedere cel zijn eigen uitkomst krijgt.

Formule invoeren

De eerste formule komt in de cel met de naam B8 te staan, het lichtblauwe vakje onder de 4. Zodra de celcursor in cel B8 staat, verschijnt de naam van de cel in het naamvak linksboven. Een formule begint altijd met het = teken.[1] Door dat teken te typen, kom je in de formule-invoermodus die de gebruiker helpt om vlot en foutloos de gewenste formule in te voeren. Door na het typen van = niet direct op Enter te duwen, maar met de pijltoets één stap naar boven te gaan (of op de cel boven de huidige cel te klikken) komt achter het zojuist ingevoerde = teken de naam van de cel boven de huidige cel te staan (B7). De formule maak je verder af door via het toetsenbord +1 te typen. Voordat je op Enter drukt om deze invoer te bevestigen, kijk je nog heel even naar wat er staat: =B7+1. Excel berekent na elke handeling de inhoud van alle cellen opnieuw, dus komt er na een druk op de Enter toets direct een 6 in de betreffende cel te staan. Het werkblad is zo ingericht dat de gebruiker feedback krijgt dat de juiste getallen zijn berekend. Er verschijnt namelijk OK in de cel ernaast. Door met de pijltoets weer terug te gaan naar cel B7 zie je in de formulebalk de zojuist ingevoerde formule =B7+1 verschijnen. De cellen in Excel tonen dus de uitkomsten van de berekeningen en de formulebalk toont van één cel de achterliggende formule. Als je zou willen weten welke formule in cel D8 staat, waar nu het woord OK is verschenen, is het echter niet voldoende om de celcursor naar die cel te verplaatsen en in de formulebalk te kijken: dit werkblad is namelijk zo ingericht dat de niet-gekleurde cellen geen celinhoud in de formulebalk laten zien. Dit is gedaan omdat de opdracht voor de leerling juist is die formules te vinden.
Een formule kan ook geheel handmatig met het toetsenbord ingevoerd worden. Het handmatig invoeren van formules kost echter vrij veel tijd en tikfouten zijn snel gemaakt. Het is daarom verstandiger om formules met behulp van de muis en/of de pijltoetsen samen te stellen. Excel voegt automatisch de juiste verwijzingen in, zelfs wanneer de cellen zich op een ander tabblad bevinden.

Formule kopiëren

Wanneer je eenmaal een correcte formule hebt ingevoerd, levert het kopiëren van die formule vaak het resultaat op waar het ons om te doen is. Om in Excel een formule te kopiëren, selecteer je de cel en kies je kopiëren. Er komt nu een knipperende gestippelde rand om de cel heen te staan ten teken dat Excel in de kopieermodus staat. Ga je naar een andere cel en toets je Enter dan komt een kopie van de formule

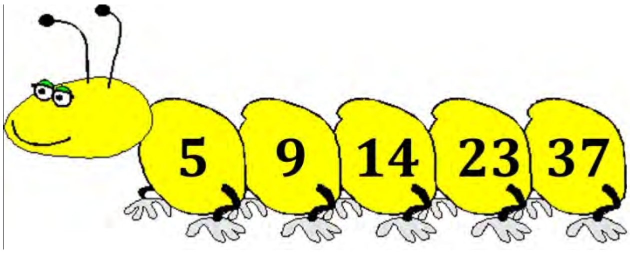
[1] Er is maar één uitzondering op de regel dat elke cel waarvan de inhoud begint met = een formule oplevert, namelijk als die inhoud uitsluitend uit = bestaat. In dat geval is de inhoud de tekst =.

in de geselecteerde cel te staan. In B8 staat de te kopiëren formule =B7+1. Selecteer deze cel en kies kopiëren. Verplaats de celcursor naar B9 en druk op Enter. In cel B9 staat nu =B8+1. Maar is dat wel een kopie? Immers, B7 is gewijzigd in B8. Als je bedenkt dat de intentie van de formule was = <inhoud van cel erboven> + 1, dan heeft Excel een perfecte kopie gemaakt!
Er bestaan nog andere (snellere) manieren om te kopiëren, bijvoorbeeld door gebruik te maken van de vulgreep (het kleine vierkantje rechtsonder in een geselecteerde cel). Probeer maar eens om de zojuist ingevoerde formule in cel B8 naar beneden te kopiëren met behulp van de vulgreep.

In dit eerste voorbeeld was het gebruik van een formule om de telrij in een kolom te krijgen misschien niet de meest voor de hand liggende methode. Het gaat in deze oefening echter om het bouwen van formules, vandaar.
Opdracht II is een eenvoudig vervolg op opgave I. De gezochte formule is =<vorige>+2.
Bij opgave III is het van belang om door te krijgen wat de achterliggende regel is. Een gevaar bij dit type opgaven is dat de snelle leerlingen hun ontdekking graag prijs willen geven en daarmee de kans op ontdekking door een wat minder snelle leerling verkleinen. Een goede manier om dat met kinderen te doen en te voorkomen dat te veel wordt prijsgegeven, is dan de volgende. Vraag wie weet wat het volgende getal in de rij is. Wie het goede antwoord geeft, krijgt onmiddellijk te horen: “Uitstekend, maar je mag nu even niet meer mee doen!”. Aan die opmerking dient u zich strikt te houden: iemand die de regel door heeft vindt het misschien leuk om dat steeds te laten merken, maar dat is nu niet de bedoeling en zodoende krijgen de anderen een kans het zelf te ontdekken. Die spelregel kunt u ook met hen bespreken. Vervolgens stelt u dezelfde vraag “Wat is het volgende getal in de rij?” net zolang totdat iedereen ‘af’ is. Het grote voordeel van deze aanpak is dat nu iedereen de gevraagde ontdekking moet doen. Wanneer op deze manier de opeenvolgende getallen uit de rij getoond zijn, poetst u ze weer weg voor de volgende ronde waarin de formule moet worden opgespoord. De formule bij opgave III, = <vorige> + <vorige vorige>, zou ook als zodanig verwoord moeten worden door de kinderen.
Bij opgave IV zijn er twee correcte formules denkbaar, namelijk: =2*<vorige> of =<vorige>+<vorige>. Merk op dat het teken voor vermenigvuldigen * is en niet ×.
Opgave V en VI zijn van een iets andere soort. Het zijn een soort machientjes waar je een getal in stopt en waar dan een resultaat uitkomt. Het gaat er hier om dat zowel de invoerrij als de uitvoerrij via een formule worden beschreven. Nu is de invoerrij gewoon de telrij, dus in feite een herhaling van opgave I. De uitvoerrij vraagt om het nodige denk- en puzzelwerk.
Bij het kopiëren van de formules kan nog een extra handigheidje worden ontdekt, namelijk dat de vulgreep toegepast op de beide geselecteerde cellen in één keer het gewenste resultaat oplevert. De gezochte formules zijn hier: =<cel links>*<cel links> en =<cel links>+<cel boven>.
U kunt ervoor kiezen om een of meer van deze uitdagingen in een interactieve setting te doen of zelfstandig te laten verwerken met een korte nabespreking.

Een uitgewerkt voorbeeld : Het rijtje van 100

Bij dit spel wordt begonnen met twee zelfgekozen getallen onder de 100. Elk volgend getal ontstaat door steeds de twee voorafgaande getallen bij elkaar op te tellen. Het rijtje is vijf getallen lang. Bijvoorbeeld als je begint met 5 en 9 (Afb. 1):



Afb. 1. Een rijtje van vijf delen.

Probeer op deze wijze een rups met vijf delen te maken met als laatste getal 100.

Oplossing in Excel

Zoals het belangrijk is om bij het oplossen van een probleem je gedachten helder op papier te zetten, en dat ook als een essentieel onderdeel te beschouwen van het probleemoplossen, zo begin je in Excel ook met het nadenken over hoe je het werkblad gaat inrichten. Start dus eerst met een nieuw leeg werkblad. Een voor de hand liggende aanpak is om de rijtjes van vijf getallen waar het om draait onder elkaar te plaatsen met boven elke kolom om welk ranggetal het gaat (Afb. 2).

	A	B	C	D	E
1	getal1	getal2	getal3	getal4	getal5
2	5	9	14	23	**37**
3					
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					

Afb. 2. Vijf kolommen.

In A2 typ je 5, in B2 typ je 9. In C2 komt de som van de vorige twee cellen: =A2+B2. Nu kun je deze formule eenvoudig met de vulgreep naar rechts kopiëren naar D2 en E2. Je ziet dan de afbeelding hierboven. Selecteer vervolgens C2:E2 en kopieer met de vulgreep naar beneden tot ongeveer rij 25. De optelformules staan nu klaar, maar de begingetallen ontbreken nog, dus daar kan naar hartenlust mee geëxperimenteerd worden. Als je begingetal1 ongewijzigd laat, dus een 5 in cel A3 typt, maar begingetal2 met één ophoogt door in cel B3 de formule =B2+1 te typen en op enter te drukken, dan kun je vervolgens de cellen A3:B3 selecteren en naar beneden kopiëren. Het effect is direct duidelijk: het ophogen van begingetal2 met één heeft tot

gevolg dat getal5 met drie wordt opgehoogd (Afb. 3). Daarmee is in rij 23 een eerste oplossing van dit probleem zichtbaar geworden.
Een volgend experiment zou kunnen zijn om het eerste getal steeds met één op te hogen en getal2 ongewijzigd te laten. Wis daartoe de inhoud van de cellen A3:B23 door na selectie op Delete te drukken. Vul vervolgens deze cellen opnieuw, door eerst de formule =A2+1 in cel A3 te plaatsen, in B3 het getal 9 te typen en daarna het geselecteerde bereik A3:B3 naar beneden te kopiëren. Ook nu zie je direct wat de gevolgen zijn van het ophogen van begingetal1 met één: het getal5 wordt twee groter.

	A	B	C	D	E
1	getal1	getal2	getal3	getal4	getal5
2	5	9	14	23	**37**
3	5	10	15	25	**40**
4	5	11	16	27	**43**
5	5	12	17	29	**46**
6	5	13	18	31	**49**
7	5	14	19	33	**52**
8	5	15	20	35	**55**
9	5	16	21	37	**58**
10	5	17	22	39	**61**
11	5	18	23	41	**64**
12	5	19	24	43	**67**
13	5	20	25	45	**70**
14	5	21	26	47	**73**
15	5	22	27	49	**76**
16	5	23	28	51	**79**
17	5	24	29	53	**82**
18	5	25	30	55	**85**
19	5	26	31	57	**88**
20	5	27	32	59	**91**
21	5	28	33	61	**94**
22	5	29	34	63	**97**
23	5	30	35	65	**100**
24	5	31	36	67	**103**

Afb. 3. Begingetal1 blijft ongewijzigd en begingetal2 wordt steeds één meer. Getal5 groeit met stapjes van drie.

	A	B	C	D	E
1	getal1	getal2	getal3	getal4	getal5
2	5	9	14	23	**37**
3	6	9	15	24	**39**
4	7	9	16	25	**41**
5	8	9	17	26	**43**
6	9	9	18	27	**45**
7	10	9	19	28	**47**
8	11	9	20	29	**49**
9	12	9	21	30	**51**
10	13	9	22	31	**53**
11	14	9	23	32	**55**
12	15	9	24	33	**57**
13	16	9	25	34	**59**
14	17	9	26	35	**61**
15	18	9	27	36	**63**
16	19	9	28	37	**65**
17	20	9	29	38	**67**
18	21	9	30	39	**69**
19	22	9	31	40	**71**
20	23	9	32	41	**73**
21	24	9	33	42	**75**
22	25	9	34	43	**77**
23	26	9	35	44	**79**
24	27	9	36	45	**81**

Afb. 4. Begingetal1 wordt steeds één meer en begingetal2 blijft ongewijzigd. Getal5 groeit met stapjes van twee.

In de speurtocht naar alle oplossingen met getal5 gelijk aan 100 kun je de inmiddels gevonden oplossing met begingetallen 5 en 30 invoeren in A2 resp. B2 en de rest van de kolommen A en B weer even leeg maken. Denk even na over welke formules je in A3 en B3 gaat invoeren om ervoor te zorgen dat nu alle rijtjes van 100 in beeld komen. Aangezien het verhogen (of verlagen) van het eerste getal met één ertoe leidt dat het vijfde getal twee hoger (of lager) wordt en het verhogen (of verlagen) van het tweede getal het eindgetal met drie doet toe- of afnemen, is het hier slim om het eerste getal te verhogen met drie (het eindgetal gaat dan zes omhoog) en tegelijkertijd het tweede getal met twee te verlagen (het eindgetal gaat dan weer zes omlaag) (Afb. 5). Je kunt het natuurlijk ook andersom doen: begingetal1 verlagen met drie en begingetal2 verhogen met twee (Afb. 6). Zie hieronder, waar de in totaal achttien verschillende oplossingen (met positieve gehele getallen) zichtbaar zijn. Maar wie zo met Excel experimenteert ziet natuurlijk meteen dat als je ook negatieve getallen toelaat er nog heel wat meer oplossingen zijn. Een leerling uit groep 6 die dit probleem voorgelegd kreeg, bedacht zelfs dat de startgetallen 15 en $23\frac{1}{3}$ leiden tot het eindgetal 100, waarmee nog veel meer oplossingen in het verschiet liggen, maar dat werken we in deze Excel-versie niet verder meer uit.

	A	B	C	D	E
1	getal1	getal2	getal3	getal4	getal5
2	5	30	35	65	**100**
3	8	28	36	64	**100**
4	11	26	37	63	**100**
5	14	24	38	62	**100**
6	17	22	39	61	**100**
7	20	20	40	60	**100**
8	23	18	41	59	**100**
9	26	16	42	58	**100**
10	29	14	43	57	**100**
11	32	12	44	56	**100**
12	35	10	45	55	**100**
13	38	8	46	54	**100**
14	41	6	47	53	**100**
15	44	4	48	52	**100**
16	47	2	49	51	**100**
17	50	0	50	50	**100**
18	53	-2	51	49	**100**
19	56	-4	52	48	**100**
20	59	-6	53	47	**100**
21	62	-8	54	46	**100**
22	65	-10	55	45	**100**
23	68	-12	56	44	**100**
24	71	-14	57	43	**100**
25	74	-16	58	42	**100**

Afb. 5. Begingetal1 steeds drie méér en begingetal2 steeds twee minder.

26	5	30	35	65	**100**
27	2	32	34	66	**100**
28	-1	34	33	67	**100**
29	-4	36	32	68	**100**
30	-7	38	31	69	**100**

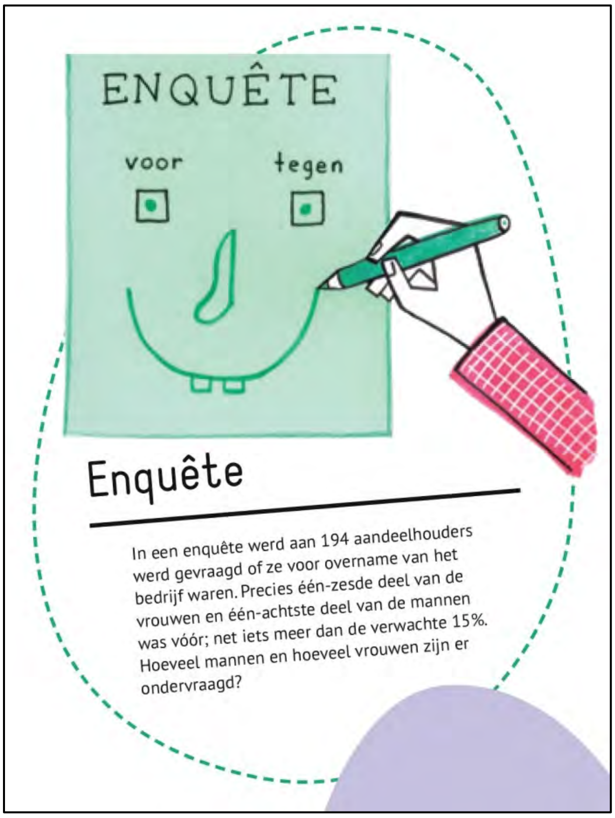
Afb. 6. Begingetal1 steeds drie minder en begingetal2 steeds twee méér.

Bijlage 2 bij *Excel in de klas bij probleemoplossen*
Problemen uit *Het ei van Columbus*
die uitnodigen om geprogrammeerd te worden

Jos van den Bergh, Avans Hogeschool Pabo Breda & Van Gorcum: Volgens Bartjens

Het ei van Columbus is de vaste problemenrubriek in het rekentijdschrift *Volgens Bartjens*.
Op www.volgens-bartjens.nl vindt u meer afleveringen van *Het ei*, en de oplossingen, ook van de hier opgenomen *eieren*.

Enquête



Bron: Volgens Bartjens jaargang 34 nummer 2.

Oneerlijke schaatswedstrijd

Bron: Volgens Bartjens jaargang 34 nummer 4.

Pagina's nummeren


Over cijfers gesproken

Om de pagina's in een boek te nummeren (1, 2, 3, ...) waren precies 642 cijfers nodig. Kun je uitvinden hoeveel pagina's dat boek telde?

Bron: Volgens Bartjens jaargang 34 nummer 1.

Getalkaartjes


Getalkaartjes

In een doos zitten 100 genummerde kaartjes met nummers van 1 tot en met 100. Kun je de kaartjes zo in twee stapeltjes verdelen dat de som van de kaartjes in het eerste stapeltje gelijk is aan de som van de kaartjes in het tweede stapeltje? Kun je dat ook als beide stapeltjes 50 kaartjes dienen te bevatten? Kun je ook 5 stapeltjes van 20 kaarten maken met dezelfde eigenschap, namelijk dat de som van de kaartjes in elk stapeltje gelijk is?

Bron: Volgens Bartjens jaargang 34 nummer 1.

Gemeenschappelijke deler


Gemeen-schappelijke deler

De volgende vier getallen kun je alle vier door hetzelfde getal delen:

1178
1581
2015
2387

Wat is die gemeenschappelijke deler?

Bron: Volgens Bartjens jaargang 34 nummer 1.

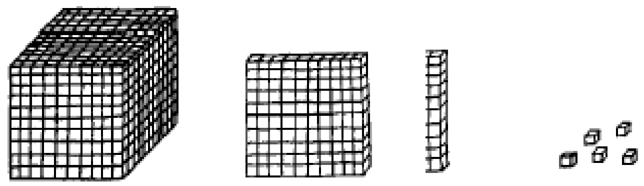
Realistisch reken-wiskundeonderwijs in de 21e eeuw

Koeno Gravemeijer, Wiskunde voor Morgen

De computerisering en informatisering maken dat we ons onderwijs moeten veranderen om te blijven voldoen aan de eis om de leerlingen voor te bereiden op de maatschappij die ze straks betreden (Gravemeijer, 2016). Maar er ontstaan ook nieuwe mogelijkheden. Tegenwoordig kunnen we veel rekenwerk overlaten aan rekenapparaten. Dit betekent dat we in het onderwijs minder tijd hoeven te besteden aan het routinematig leren uitvoeren van die rekenbewerkingen die aan apparaten kunnen worden overgelaten. Uiteraard moeten de leerlingen deze berekeningen wel – globaal – kunnen controleren en begrijpen. In het reken-wiskundeonderwijs heeft altijd een spanning bestaan tussen beheersen en begrijpen. Het was vaak niet mogelijk om aan beide recht te doen. Doordat er nu meer rekenwerk door machines wordt gedaan ontstaat er meer ruimte voor nadenken en redeneren. En dat past goed bij het werken aan 21e eeuwse vaardigheden. Het rekenen-wiskunde lijkt sowieso uiterst geschikt voor het ontwikkelen van 21e eeuwse vaardigheden. In feite komen 21e eeuwse vaardigheden, als probleemoplossen, communiceren, en samenwerken, sterk overeen met wat ook in probleem-georiënteerd, interactief, realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt nagestreefd. Echter, zulk reken-wiskundeonderwijs blijkt in de praktijk lastig te realiseren. Dan bedoel ik probleem-georiënteerd onderwijs waarin de leerlingen zelf dingen uitvinden, met elkaar overleggen om te achterhalen welke redeneringen kloppen en zo onder leiding van de leraar voortgang boeken in het leerproces.
Dit idee van reken-wiskundeonderwijs gaat verder dan het opnemen van probleem-georiënteerde activiteiten. Deze probleem-georiënteerde activiteiten moeten ook leiden tot het construeren van nieuwe reken-wiskundige kennis. De geschiedenis heeft echter laten zien dat dergelijk onderwijs niet gemakkelijk te realiseren is. In dit hoofdstuk wil ik een aantal aspecten bespreken die van belang zijn voor het welslagen van dit onderwijs. Ik wil me daarbij richten op gangbare opvattingen over het construeren van reken-wiskundige kennis, het idee van een hypothetisch leertraject, de rol van een lokale onderwijstheorie en het belang van de verandering van de klassencultuur.

Construeren van reken-wiskundige kennis

De gedachte dat leerlingen een actieve rol moeten spelen in het ontwikkelen van kennis, of deze kennis in feite zelf moeten construeren wordt tegenwoordig breed aanvaard. Zeker in kringen van wetenschappers op het gebied van het reken-wiskundeonderwijs. Dit laatste heeft te maken met het feit dat de geschiedenis van de wiskunde laat zien dat er steeds weer nieuwe concepten worden geconstrueerd volgens een patroon waarbij processen worden omgevormd tot objecten, die vervolgens weer onderdeel van nieuwe processen worden (Sfard, 1991). Het feit dat wiskundige concepten door de leerlingen zelf geconstrueerd moeten worden biedt bovendien een verklaring voor de problemen die we in het reken-wiskundeonderwijs tegenkomen. Dit betreft onder meer pogingen om met concreet materiaal tegemoet te komen aan het abstracte karakter van rekenen en wiskunde. Met concreet materiaal zou je wiskundige relaties en concepten zichtbaar kunnen maken. Bekend zijn de blokjes en staafjes waarmee tientallen, eenheden en dergelijke kunnen worden voorgesteld (Afb. 1).



Afb. 1. Tientallig materiaal.

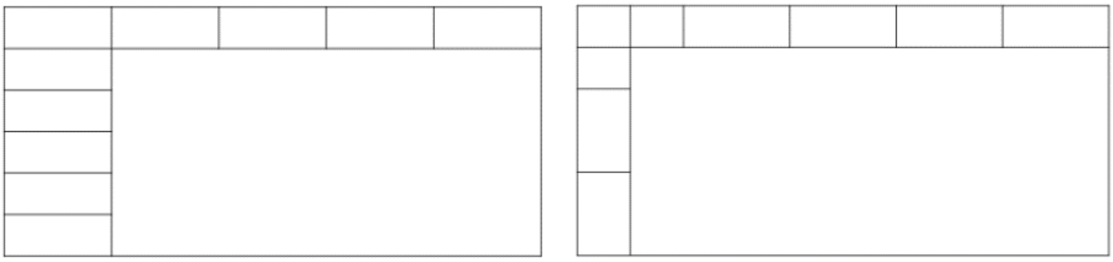
Afb. 2. Een vaas óf twee gezichten.

Omdat wij, als volwassenen, *enen*, *tienen* en dergelijke als concrete objecten ervaren, verwachten we dat de leerlingen deze concepten ook in de blokjes herkennen. Dat is echter niet het geval. De moeilijkheid van de concepten, die in het geding zijn, kunnen we illustreren aan het begrip *tien*. Het blijkt dat jonge leerlingen tien niet tegelijkertijd als *één tien* én *tien eenheden* kunnen zien. Ze zien aanvankelijk, óf de eenheden, óf het tiental, maar niet beide tegelijk. Een beetje zoals het bekende plaatje waarin een vaas of twee gezichten kan worden gezien, maar niet allebei tegelijk (Afb. 2). Het helpt dan niet om de leerlingen uit te leggen wat tien is, ze moeten dit concept zelf construeren. Pas als leerlingen voldoende ervaring hebben opgedaan met processen als tientallig groeperen, inpakken, uitpakken, tellen, vergelijken en dergelijke gaan ze één tien en tien eenheden als één ding zien.

Hypothetisch leertraject

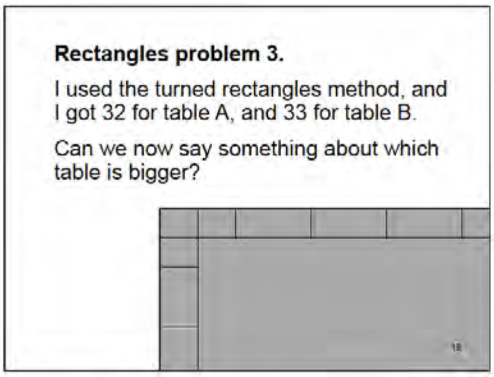
Inzichten als bovengenoemd stroken met de (socio)constructivistische theorie: kennis kan niet worden overgedragen maar moet door de leerlingen zelf geconstrueerd worden. Maar als de leerlingen zelf hun eigen kennis construeren, hoe kunnen we dit proces dan sturen? Simon (1995) bedacht dat dit kan door gebruik te maken van een hypothetisch leertraject (HLT). Met het hypothetisch leertraject anticipeert de leraar op de mentale activiteiten van de leerlingen als ze een geplande onderwijsactiviteit uitvoeren; hoe ze waarschijnlijk zullen denken en redeneren. Wanneer deze denk- en redeneeractiviteiten passen bij de beoogde leerdoelen, dan kunnen de geplande onderwijsactiviteiten daaraan bijdragen. Mits de feitelijke mentale activiteiten van de leerlingen overeen komen met de verwachte mentale activiteiten uiteraard. Ofwel, als ze denken en redeneren zoals verwacht. Omdat je dat vooraf niet zeker kunt weten, spreekt Simon van een *hypothetisch* leertraject. De leraar zal bij de uitvoering dus moeten vaststellen of zijn/haar verwachtingen kloppen, en zal die plannen zo nodig moeten bijstellen.

Simon illustreert dit aan een lessenserie aan aanstaande basisschoolleraren waarin hij hypothetische leertrajecten bedenkt en bijstelt. Doel van de lessenserie is om de studenten een beter begrip bij te brengen van de oppervlakte-formule *lengte* $\times$ *breedte*. Hij vermoedt dat de oppervlakte-formule voor veel studenten slechts een trucje is. Hij kiest voor een concrete ingang en vraagt de studenten daarom uit te zoeken hoe vaak een rechthoekig kartonnetje op hun tafeltje past. De studenten komen met twee verschillende oplossingen, één waarbij de rechthoek steeds in dezelfde stand wordt afgepast en één waarbij de rechthoek wordt gedraaid (Afb. 3).

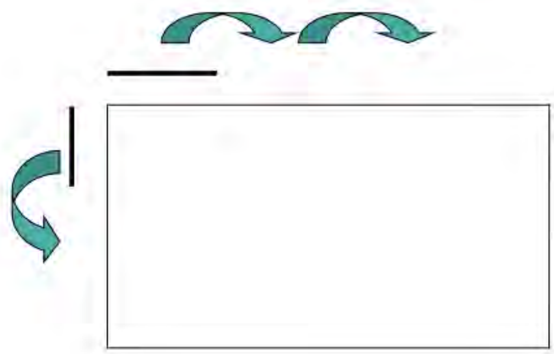


Afb. 3. In dezelfde stand (links); gedraaid (rechts).

De klassendiscussie levert uiteindelijk op dat *in dezelfde stand houden* de juiste methode is, waarbij een van de studenten dit nog eens helder onderbouwt. Simon krijgt echter het gevoel dat dit de andere studenten niet interesseert. Ze kennen de formule immers. Simon probeert hen daarop aan het denken te zetten, onder andere met de vraag of je met de gedraaide rechthoek als meetmethode toch iets over de oppervlakte van de gemeten tafels kunt zeggen (Afb. 4). De studenten twijfelen. Dan kiest hij voor een opgave waarbij de lengte en de breedte met twee verschillende stokjes worden gemeten (Afb. 5).

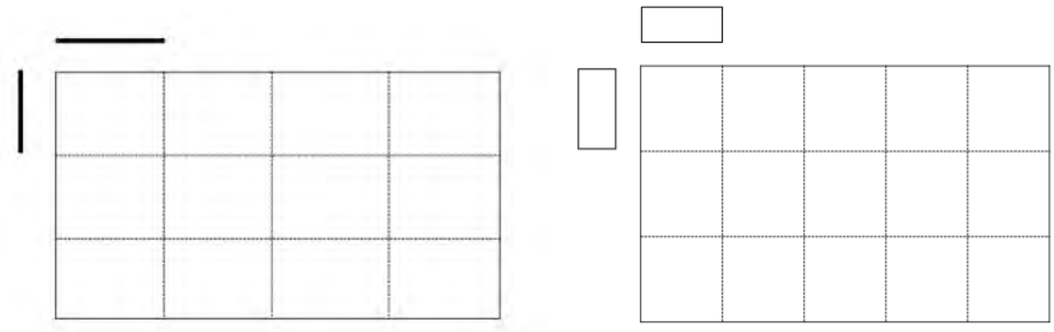


Afb. 4. Kun je iets zeggen over de oppervlakte?



Afb. 5. Meten met twee verschillende stokjes.

Nu zijn er verschillende studenten die opperen dat je met de twee stokjes een nieuwe rechthoek kunt maken en die in gedachten kunt afpassen. En dat je de uitkomst kunt bepalen door te vermenigvuldigen (Afb. 6). De anderen nemen dit idee over. En wanneer Simon nu op de gedraaide-rechthoek opgave terugkomt realiseren de studenten zich dat je daar hetzelfde kunt doen (Afb. 7). Zo worden de studenten zich bewust van het feit dat het bij de oppervlakteformule van een rechthoek gaat om een *virtuele maat* en om *handig tellen* hoe vaak die maat past.



Afb. 6. De oppervlakteformule lengte × breedte berust op handig tellen met een virtuele maat.

De clou van dit verhaal is dat de docent (Simon) steeds een HLT bedenkt en deze op basis van de reacties van de studenten aanpast. In eerste ronde gaat hij ervan uit dat het uitzoeken hoe vaak het kartonnetje past, voldoende is om te bedenken dat het bij het vermenigvuldigen van lengte keer breedte in feite gaat om systematisch afpassen en handig tellen van hoe vaak je afpast. Dit blijkt echter niet te werken. Enkele studenten komen met de gedraaide rechthoek. Deze methode wordt in de discussie weliswaar afgekeurd, maar hij besluit dit idee te gebruiken om de studenten op een andere manier over de oppervlakteberekening te laten nadenken. Waarschijnlijk heeft hij het idee van het construeren van een nieuwe oppervlaktemaat dan al in gedachten, maar de studenten komen niet met deze oplossing. Anders gezegd, de mentale activiteit waar hij op had gehoopt treedt niet op. Simon realiseert zich dan dat de beschikbare oppervlaktemaat (het kartonnetje) waarschijnlijk een barrière vormt voor het ontwikkelen van een nieuwe maat. Hij kiest daarom voor stokjes. Dan komen de studenten wel op het idee dat je daarmee een rechthoek kunt maken die je als oppervlaktemaat kunt gebruiken. Via de geschetste reeks van activiteiten die hij steeds aanpast aan de reacties van de studenten bereikt hij uiteindelijk dat de gewenste mentale activiteiten optreden.

Lokale onderwijstheorieën

Nu hoeven leraren dergelijke HLT’s niet zonder hulp te ontwerpen. Als het goed is geven de leergangen in de methoden houvast. Dan moet zo’n leergang wel meer beiden dan een reeks van op elkaar aansluitende onderwijsactiviteiten. De methode zal ook zicht moeten bieden op de ideeën en redeneringen achter de leergang. Alleen met die kennis kan de leraar inspelen op wat de leerlingen uitvinden of niet uitvinden. In dit verband gebruik ik wel de term *lokale onderwijstheorie*. Zo’n lokale onderwijs theorie bevat een theorie over hoe het leerproces voor een gegeven onderwerp zou kunnen verlopen. Aangevuld met theorieën of theorietjes over hoe dit leerproces kan worden ondersteund/uitgelokt met bepaalde taken, gesprekken, en materialen. Voor zover zo’n lokale onderwijstheorie niet helder is beschreven, zal de leraar moeten proberen deze zelf te reconstrueren.
De lokale onderwijstheorie als zodanig is echter niet voldoende, de leraar zal daar zijn of haar eigen uitwerking aan moeten geven. De lokale onderwijstheorie kan als referentiekader functioneren, op basis waarvan de leraar HLT’s kan ontwerpen. Maar

uiteindelijk moet de leraar zelf HLT's ontwerpen die passen bij zijn of haar doelen, klas en leergeschiedenis van de leerlingen. In veel gevallen zal dit betekenen dat de leraar de door de methode aangeboden activiteiten niet integraal overneemt, maar aanpast aan wat er in de klas gebeurt.

Klassencultuur

Het onderwijs dat zo ontworpen en voorbereid is, moet uiteraard ook nog in de praktijk worden gerealiseerd. Een van de barrières die overwonnen moet worden betreft de gangbare klassencultuur. We spreken in dit verband van de 'classroom social norms' (Cobb & Yackel, 1996); er gelden impliciete normen ten aanzien van wat leraar en leerlingen van elkaar mogen verwachten. In veel klassen is het normaal dat de leraar naar de bekende weg vraagt. Leraren stellen vaak vragen waarvan ze de antwoorden weten. De leerlingen weten dat en proberen de antwoorden te geven die de leraar verwacht. Dit lijkt in de praktijk goed te functioneren, maar als je realistisch, probleem-georiënteerd, reken-wiskundeonderwijs wilt gaan geven veroorzaakt dit verwachtingspatroon problemen. Dan moet je namelijk naar een heel andere rolverdeling tussen leraar en leerlingen, dan moeten de leerlingen zelf nadenken over mogelijke oplossingen en die ook kunnen uitleggen. Die verandering wordt ook wel getypeerd als een verandering van *didactisch contract*. Leraar en leerlingen hebben uiteraard geen contract gesloten, maar ze handelen wel alsof er afspraken zijn gemaakt over wat ze van elkaar mogen verwachten. De leerlingen verwachten van de leraar dat hij of zij uitleg geeft en ze gaan ervan uit dat van hen wordt verwacht te reproduceren wat eerder is voorgedaan. Dit is zoals gezegd nooit expliciet afgesproken. Het is het resultaat van de ervaringen die de leerlingen in het onderwijs hebben opgedaan. Omdat het didactisch contract niet gebaseerd is op expliciete afspraken, maar op een reeks ervaringen, zal het niet voldoende zijn de leerlingen te vertellen dat ze van nu af aan zelf moeten gaan nadenken en met eigen ideeën komen. De leerlingen zullen moeten ervaren dat ander gedrag voortaan loont en dat de leraar geen oplossingen meer voorzegt. Daarbij kan de leraar concrete situaties aangrijpen om uit te leggen van wat er van de leerlingen wordt verwacht. De leraar geeft dan expliciet aan wat de nieuwe sociale normen zijn.

Daarnaast kan leraar een aantal dingen doen om de sociale normen die bij de nieuwe rolverdeling horen te cultiveren. Bijvoorbeeld door te laten merken dat eigen oplossingen en nieuwe oplossingen op prijs worden gesteld. En door zonder meer belangstelling te tonen – of beter: te hebben – voor het denken van de leerlingen. In dit onderwijs gaat het er immers niet om of de leerling denkt zoals door anderen is voor-gedacht, maar om zijn of haar eigen denken en hoe daarop kan worden voortgebouwd. Verder kan de leraar willekeurige leerlingen vragen de uitleg van de leerling die aan de beurt was eens in eigen woorden na te vertellen. Daarmee wordt een signaal afgegeven dat je naar de uitleg van andere leerlingen moet luisteren en deze moet proberen te begrijpen. In samenhang daarmee kan de leraar vragen waar de leerlingen mee komen doorspelen aan andere leerlingen, of aan de hele groep.

Verder zal de leraar zal ook productieve klassengesprekken moeten organiseren. Daartoe moet de leraar bepalen wat de wiskundige kern is, om daar de discussie op te kunnen richten. In dit verband is de observatie van Daro (2011) interessant, die opmerkte dat Amerikaanse leraren vaak naar een procedure zoeken die goede antwoorden oplevert, terwijl Aziatische leraren eerder naar de wiskunde achter de opgave zoeken. In het eerste geval dreigt het gevaar dat de leraar het onderwijs gaat richten op procedures die leerlingen helpen om snel en efficiënt tot een goed antwoord te komen (bij een bepaald type opgaven). Wat bovendien best aantrekkelijk kan zijn omdat je met dit soort kennis succes kunt hebben op de gangbare toetsen. Probleem is echter dat dergelijke geïsoleerde kennis uiterst foutgevoelig is. Het gaat uiteindelijk om de wiskunde achter de opgave. Het begrijpen van de onderliggende wiskunde dient op de lange termijn de basis te vormen voor goede antwoorden. Het begrijpen van die wiskunde is bovendien wat je nodig hebt in een tijd waarin apparaten de reken-wiskundige bewerkingen voor je uitvoeren. Klassendiscussies zouden over die wiskunde moeten gaan. De leraar moet dus goed zicht hebben op de onderliggende wiskunde en kunnen beoordelen in hoeverre de of sommige leerlingen daar nog mee worstelen. We zagen dit bijvoorbeeld bij Simon die steeds weer probeerde om de discussie te richten op de wiskunde die achter de oppervlakteformule zit.

Tot slot

De computerisering en informatisering maken het wenselijk en mogelijk dat we meer aandacht in het reken-wiskundeonderwijs verleggen naar begrijpen en probleemoplossen. Daarbij kan interactief, probleem-georiënteerd realistisch rekenen-wiskunde-onderwijs een belangrijke rol spelen. In dit hoofdstuk heb ik enkele aspecten besproken die van belang zijn voor het welslagen van dit type onderwijs. Er zijn uiteraard meer aspecten te noemen, maar ik hoop hiermee een aanzet te hebben gegeven voor het doordenken van en experimenteren met deze vorm van reken-wiskundeonderwijs die kan worden ingezet om de leerlingen goed voor te bereiden op een toekomst in de informatiemaatschappij.

Verder lezen?

Wiskunde voor morgen: www.rekenenwiskunde21.nl.

Literatuur

Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational psychologist, 31*(3-4), 175-190.

Daro, P. (2011). Against answer-getting. Retrieved from http://vimeo.com/30924981.

Gravemeijer, K. (2016). Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw: Zet vooral in op kennis die een aanvulling is op wat de computer al kan. *Tijdschrift voor Remedial Teaching, 24*(3), 20-22.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 1-36.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, 114-145.

Vragen stellen in de reken-wiskundeles

*Marc van Zanten, nationaal expertisecentrum leerplanontwikkeling SLO &
Universiteit Utrecht: Panama, O&T, Faculteit Sociale Wetenschappen*

Inleiding

Dit hoofdstuk gaat over vragen stellen. Nu komen vragen in de reken-wiskundeles in allerlei verschijningsvormen voor. Zowel leerkrachten als leerlingen stellen vragen. Sommige vragen gaan niet over de leerstof, maar over randvoorwaarden (zoals *Mag je alleen het antwoord opschrijven?*) of zelfs over iets heel anders (*Wat gaan we straks bij gym doen?*). Over dat soort vragen gaat het hier niet. Ik richt me in dit hoofdstuk op vragen die de *leerkracht* stelt, met als doel *het leren van de leerling te stimuleren*. Daarbij gaat het me vooral om vragen die weinig of geen voorbereiding vragen van de leerkracht, zodat hij of zij ze eenvoudig en vaak in kan zetten in de reken-wiskundeles.

Veelvoorkomende vragen – die best lastig zijn

Een leerkracht kan allerlei informatie achterhalen door vragen te stellen. Vragen die in de rekenles veel voorkomen zijn bijvoorbeeld:

1. *Wat heb je bij opgave twee?*
2. *Hoe heb je dat uitgerekend?*
3. *Heeft iemand het op een andere manier gedaan?*
4. *Waarom heb je dat op die manier gedaan?*

Het eerste vraagtype is een *gesloten* vraag gericht op het *product* (de uitkomst die een leerling heeft bij een opgave) en de andere drie vragen zijn *open* vragen gericht op het *proces* (het oplossingsproces dat een leerling heeft doorlopen). Al komen deze vragen veel voor, dat wil nog niet zeggen dat ze eenvoudig te beantwoorden zijn voor leerlingen. Het lastige van de eerste drie vraagtypen is dat alléén leerlingen die al een antwoord op de betreffende opgave hebben, ook zo'n vraag kunnen beantwoorden. Leerlingen die (nog) geen antwoord hebben op de opgave kunnen zulke vragen niet beantwoorden. Misschien kunnen sommige leerlingen vertellen hoe ze zijn begonnen, maar scherp gesteld: óf je weet het en kunt daardoor de gestelde vraag beantwoorden, óf je weet het niet en kunt dus ook geen antwoord op de vraag geven. Sterker, zelfs als een leerling wél een antwoord op de opgave heeft, kan hij of zij niet altijd een antwoord geven op het tweede, derde, of vierde vraagtype (een leerling zegt dan bijvoorbeeld: *Dat weet ik gewoon*).
De eerste drie vraagtypen zetten leerlingen niet zonder meer aan tot nadenken. Al helemaal niet de leerlingen die rekenen moeilijk vinden of faalangstig zijn ten opzichte van rekenen, maar ook niet de leerlingen die sterk zijn in rekenen. Het vierde vraagtype kan in potentie wel aanzetten tot nadenken, maar een waarom-vraag is voor veel leerlingen erg lastig. Leerlingen kunnen moeite hebben om hun

gedachten onder woorden te brengen of zijn bijvoorbeeld huiverig om iets te zeggen dat ‘fout’ of ‘dom’ kan worden gevonden. Bovendien wordt een waarom-vraag makkelijk verkeerd geïnterpreteerd: niet als uitnodiging om het denken onder woorden te brengen, maar als signaal dat een gegeven antwoord wel of niet goed is (*Oh, ik heb het zeker fout…*).

Het didactisch contract

Dat een waarom-vraag verkeerd kan worden geïnterpreteerd, komt door het *didactisch contract*. Dat is het geheel van onuitgesproken onderlinge verwachtingen tussen leerkrachten en leerlingen (Brousseau, 1997; Gravemeijer, 2001).[1] Deze verwachtingen gaan over de rollen van leerkracht en leerlingen en het gedrag dat daarbij hoort – of preciezer: wat leerkracht en leerlingen *denken* dat daarbij hoort. Een niet ongebruikelijk didactisch contract manifesteert zich bijvoorbeeld als volgt:

- De leerkracht stelt een vraag waarop hij of zij het antwoord al weet;
- De leerlingen weten dat de leerkracht het antwoord op de gestelde vraag al weet;
- Leerlingen proberen een antwoord te geven op de gestelde vraag waarvan zij denken dat het een antwoord is dat de leerkracht van hen verwacht of wat de leerkracht wil horen;
- En vervolgens gaat de leerkracht, soms onafhankelijk van het gegeven antwoord, iets uitleggen.

Als het gaat om het stimuleren van het leren van de leerlingen, is dit didactisch contract en zijn de bovengenoemde vraagtypen niet toereikend. Daarvoor zijn andere vragen nodig.

Vragen om van te leren – ook door de leerkracht

Leren vergt nadenken. Dus zijn vragen nodig die leerlingen daartoe aanzetten. Dat zijn vragen die verder gaan dan het ophalen van weetjes of het reproduceren van vaardigheden. Het is vooral zaak om vragen te stellen die – anders dan de eerdere voorbeelden van veelvoorkomende vragen – *alle* leerlingen tot nadenken uitnodigen en waar ook alle leerlingen over *kunnen* nadenken. Een mooi voorbeeld is het volgende. In plaats van één opgave voor te leggen, leg je twee opgaven voor en daarbij vraag je niet om de opgaven op te lossen maar je stelt de vraag *Welke van deze twee opgaven is moeilijker en waarom?*

Over deze vraag kan door alle leerlingen worden nagedacht, ongeacht de mate van (niet) beheersing van de betreffende opgave. In het gesprek dat naar aanleiding van deze vraag ontstaat, kan alle relevante rekenwiskundige leerinhoud naar voren komen (Wiliam, 2014). Bovendien bieden de naar voren gebrachte antwoorden op deze vraag de leerkracht uitgebreid zicht op het denken en begrip van de leerlingen. De leerkracht leert dus ook door zo’n vraag, en wel over zijn of haar leerlingen.

[1] Zie ook het hoofdstuk van Koeno Gravemeijer.

De vraag *Welke van deze twee opgaven is moeilijker en waarom?* is een voorbeeld van een *oordelende vraag*. Daarbij moeten de leerlingen een bepaald oordeel geven of vanuit een bepaald oordeel redeneren – in bovenstaand voorbeeld gaat het om een oordeel over de (ervaren) moeilijkheid. Zulke vragen zijn vaak zinvol en eenvoudig in te zetten, zonder dat hiervoor aparte voorbereiding nodig is. Van deze en nog twee andere vraagtypes – *vragen over vragen* en *vragen naar eigen input* – geef ik hieronder een aantal concrete voorbeelden. Hoewel ik ze in drie categorieën heb ingedeeld, zijn de scheidslijnen ertussen niet altijd zo strikt en kunnen sommige voorbeeldvragen best in andere of meerdere categorieën worden ingedeeld.

Oordelende vragen

Het al genoemde voorbeeld van een oordelende vraag gaat over de moeilijkheid van opgaven. Andere voorbeelden van dat soort vragen zijn:

- Welke opgave is makkelijker en waarom?
- Wat maakt dat dit een makkelijke / moeilijke opgave is?
- Hoe moeilijk is deze opgave voor jou, op een schaal van 1 tot 10?
- Wat als de opgave zó (net iets anders) zou zijn?
- Welke opgave kan sneller worden opgelost en waarom?
- Als je één opgave mag kiezen om te maken, welke kies je dan en waarom?
- Welke opgave vind je mooier en waarom?
- Welke opgave zou je aan iemand in groep … kunnen geven en waarom?

Daarnaast kunnen oordelende vragen gaan over oplossingsmanieren. Bijvoorbeeld over de bruikbaarheid en toepasbaarheid ervan, waarbij ook steeds weer *en waarom?* kan worden toegevoegd:

- Zou jij deze manier graag willen gebruiken?
- Werkt / mag deze manier altijd?
- Is dit een snelle manier?
- Bedenk een situatie waarin de manier werkt / niet werkt.
- Welke manier (bijvoorbeeld keuze uit twee strategieën) zal bij deze opgave het snelst werken?
- Wat is de overeenkomst met / het verschil tussen deze manier en …?
- Wat heeft deze manier te maken met …?
- Kun je deze manier ook gebruiken voor deze andere opgave?
- Kun je een andere opgave bedenken die ook op deze manier kan worden opgelost?
- Wat is belangrijk om te onthouden?
- Waar zou je deze manier / dit voor nodig kunnen hebben?

Vragen over vragen

Een tweede vaak en eenvoudig toepasbare techniek is het stellen van vragen over vragen of over opdrachten. Daarbij kunnen verschillende perspectieven worden ingenomen. Voorbeelden van dit soort vragen zijn:

- Wat valt je op aan deze opgave?
- Wat is de overeenkomst tussen deze opgaven?
- Wat is het verschil tussen deze opgaven?
- Waar doet deze opgave je aan denken?
- Wat heb je geleerd van deze opgave?
- Hoe zou je dit met eenvoudiger getallen aanpakken?
- Wat weet je al dat je bij deze opgave zou kunnen helpen?
- Welke opgaven (van een les, verschillende lessen, een blok) horen bij elkaar en waarom?

Regelmatig bieden methodes rijtjes opgaven aan waarin een bepaalde structuur of volgorde zit, bijvoorbeeld zoals de rijtjes in afbeelding 1. Daarbij kunnen vragen worden gesteld als:

- Wat is het eerste waar je aan denkt als je deze opgaven ziet?
- In welke volgorde ga je deze opgaven maken; deze, of ga je iets veranderen aan de volgorde? Waar ga je beginnen?
- Wat zou de bedoeling van de methodeschrijver zijn geweest?
- Welke structuur / welk patroon zie je in de afzonderlijke rijtjes?
- Welke structuur / welk patroon zie je tussen de rijtjes onderling?
- Iemand gaf deze foute antwoorden (antwoorden met een andere volgorde of een andere structuur als de opgave). Hoe zou dat kunnen komen?

Reken uit.

15 × 60 = *900*	12 × 15 =	18 × 20 =	8 × 15 =
15 × 6 =	12 × 1,5 =	18 × 0,2 =	8 × 1,5 =
15 × 0,6 =	1,5 × 2 =	0,18 × 2 =	0,8 × 1,5 =
15 × 0,06 =	15 × 0,2 =	1,8 × 2 =	8 × 0,15 =
1,5 × 0,6 =	1,2 × 1,5 =	1,8 × 20 =	8 × 0,015 =

Afb 1. De Wereld in Getallen, lesboek groep 8, p. 58.

Vragen naar eigen input

Een derde eenvoudig toepasbare techniek is het zelf laten creëren van opgaven en variaties van opgaven. Om dit te doen gaan leerlingen als vanzelf nadenken over wiskundige inhoud en structuur van opgaven. Variaties van opgaven (bijvoorbeeld bij rijtjes als die in afbeelding 1) zijn bijvoorbeeld:

- Maak net zo'n rijtje, maar dan makkelijker / moeilijker.
- Maak net zo'n rijtje, maar dan met hele getallen / met breuken.
- Maak de rijtjes langer. Hoe kan de volgende opgave er uitzien?
- Maak een rijtje dat hier op lijkt, maar met steeds dezelfde uitkomst.
- Maak zo'n rijtje voor groep …

Een andere vorm van vragen naar eigen input is leerlingen te vragen alles (of zoveel mogelijk) op te schrijven wat ze weten van een bepaald reken-wiskundig onderwerp. Bijvoorbeeld over:

- Het getal 12 / een miljoen / …;
- Vermenigvuldigen;
- Het optellen van breuken;
- Oppervlakte;
- Procenten.

Deze werkvorm is geschikt om bijvoorbeeld de beginsituatie te inventariseren bij de introductie bij een nieuw onderwerp, maar ook bijvoorbeeld halverwege een leergang of blok om te kijken op welk gebied nog extra aandacht nodig is. Dit kan ook in groepjes plaatsvinden zodat leerlingen elkaar aanvullen en zo van elkaar leren. Verder kan dit in allerlei creatieve vormen worden gegoten zoals het maken van een *mindmap* of een tekening.

Andere voorbeelden van het vragen naar eigen input zijn bijvoorbeeld het maken van open opdrachten (zie het hoofdstuk van Adri Treffers), productief oefenen (zie het hoofdstuk van Julie Menne) en het laten vooruitblikken in de stof, bijvoorbeeld naar een volgend leerjaar (zie het hoofdstuk van Maarten Molenkamp).

Tot besluit

De voorbeelden van vragen en vraagtypes in dit hoofdstuk zijn zeker niet compleet. Er zijn nog allerlei variaties en andere mogelijkheden die ik hier niet heb gegeven. Laat vooral ook je eigen fantasie en creativiteit de vrije loop om vragen te verzinnen die leerlingen stimuleren tot nadenken en / of die je zicht geven op het denken van je leerlingen. Stel vooral vragen waarop je zelf het antwoord nog niet weet en laat je leerlingen je verrassen!

Literatuur

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics 1970-1990*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers

Gravemeijer, K. (2001). *Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw.* Utrecht: Universiteit Utrecht.

Wiliam, D. (2014). The right questions, the right way. *Educational leadership, 71*(6), 16-19.

Zelf rekenvragen bedenken – ervaringen van groep 6

Marjolijn Bakir, Alfonsusschool Enschede

Inleiding

Een van de dingen die veel van mijn leerlingen in groep 6 best moeilijk vinden is het omzetten van een contextsituatie in een rekenopgave. Bij het vertalen van een opgave in woorden naar een opgave in rekentaal is het bijvoorbeeld lastig om te zien wat er precies met de getallen moet worden gedaan om een antwoord te vinden op de gestelde vraag. Onze methode besteedt aandacht aan deze moeilijkheid door opgaven aan te bieden waarbij het juist gaat om het halen van de opgave uit een situatie, zoals bij de opdracht in afbeelding 1. Toch was dat niet genoeg. Ik wilde hier meer aandacht aan besteden. Het idee ontstond om het eens om te draaien en mijn leerlingen te vragen om zelf vragen te verzinnen bij contexten. Hiermee hoopte ik beter te zien wat er bij de leerlingen speelt en zo meer uit deze lessen te halen. Hieronder vertel ik over mijn ervaringen.

De familiekrant

De eerste keer dat ik dit uitprobeerde was bij een les met een opgave over een familiedag (Afb. 1). De bedoeling was dat de leerlingen uit vier stukjes uit een familiekrant steeds een opgave zouden halen. In drie van de vier stukjes lag nogal voor de hand welke opgaven er achter het verhaaltje zaten. Bij het stukje over de zes baby's zie je vier rammelaars en één speen op de tekening en kan dus worden gedacht aan 6 – 4 = 2 (twee rammelaars tekort) of 6 – 1 = 5 (vijf baby's hebben geen speen). Bij het middelste plaatje kan worden gedacht aan de vraag uit hoeveel leden de familie bestaat, dus aan de opgave 60 + 15 en bij het stukje over ome Jan kan worden gevraagd hoeveel kilo ome Jan tilde, wat kan worden uitgerekend door $4 \times 17{,}5$ kilo te doen. Bij het stukje over wat er allemaal werd gegeten ligt de rekenvraag minder voor de hand. De handleiding geeft als voorbeeld van een mogelijke vraag: Als twintig familieleden geen soep eten, en de rest krijgt elk een kom met drie deciliter soep, hoeveel soep blijft er dan over? maar dan klopt niet meer wat er staat, namelijk dat er twintig liter soep is gegeten. Ik besloot die specifieke vraag niet te gebruiken. De handleiding zegt verder dat de leerlingen zelf vragen kunnen bedenken met de gegevens uit de familiekrant en dat is precies wat ik ging doen. Na een korte inleiding mochten de leerlingen samen overleggen en rekenvragen bedenken bij de familiekrant.

Er werden verschillende vragen bedacht die me veel lieten zien over het denken van de leerlingen. Zo waren de meeste vragen die de leerlingen verzonnen eigenlijk geen rekenvragen maar leesvragen, zoals:

- Hoeveel familieleden waren er in totaal?
- Wie is de sterkste man van de familie?
- Hoeveel stokbroden waren er?

Al deze vragen konden worden beantwoord door goed de familiekrant te lezen.

Afb. 1. De Wereld in Getallen, lesboek 6b, p. 33.

Maar er waren ook rekenvragen waarbij een bepaalde basisbewerking moest worden uitgevoerd. Dit waren de voor de hand liggende vragen die ik al noemde zoals:

- Er zijn vier sambaballen en zes baby's. Hoeveel baby's hebben geen sambabal?

Waarbij *sambabal* natuurlijk rammelaar moet zijn, maar eerlijk is eerlijk: de rammelaars op het plaatje lijken erg op de sambaballen die de leerlingen kennen uit de muziekles.

Er werden ook een paar vragen bedacht waarbij de leerlingen zelf iets toevoegden aan de context, zoals:

- Hoeveel appels komen we tekort als iedereen van de familie er één krijgt?
- De familie gaat spelletjes doen. In elk groepje zitten 9 mensen. Hoeveel groepjes kunnen ze maken?

Die laatste vraag komt niet goed uit, wat natuurlijk geen probleem is maar juist aanleiding geeft om te gaan variëren met de getallen in de vraag. Daarvoor vond ik het deze eerste keer nog te vroeg. Hetzelfde gold voor de volgende bedachte vraag:

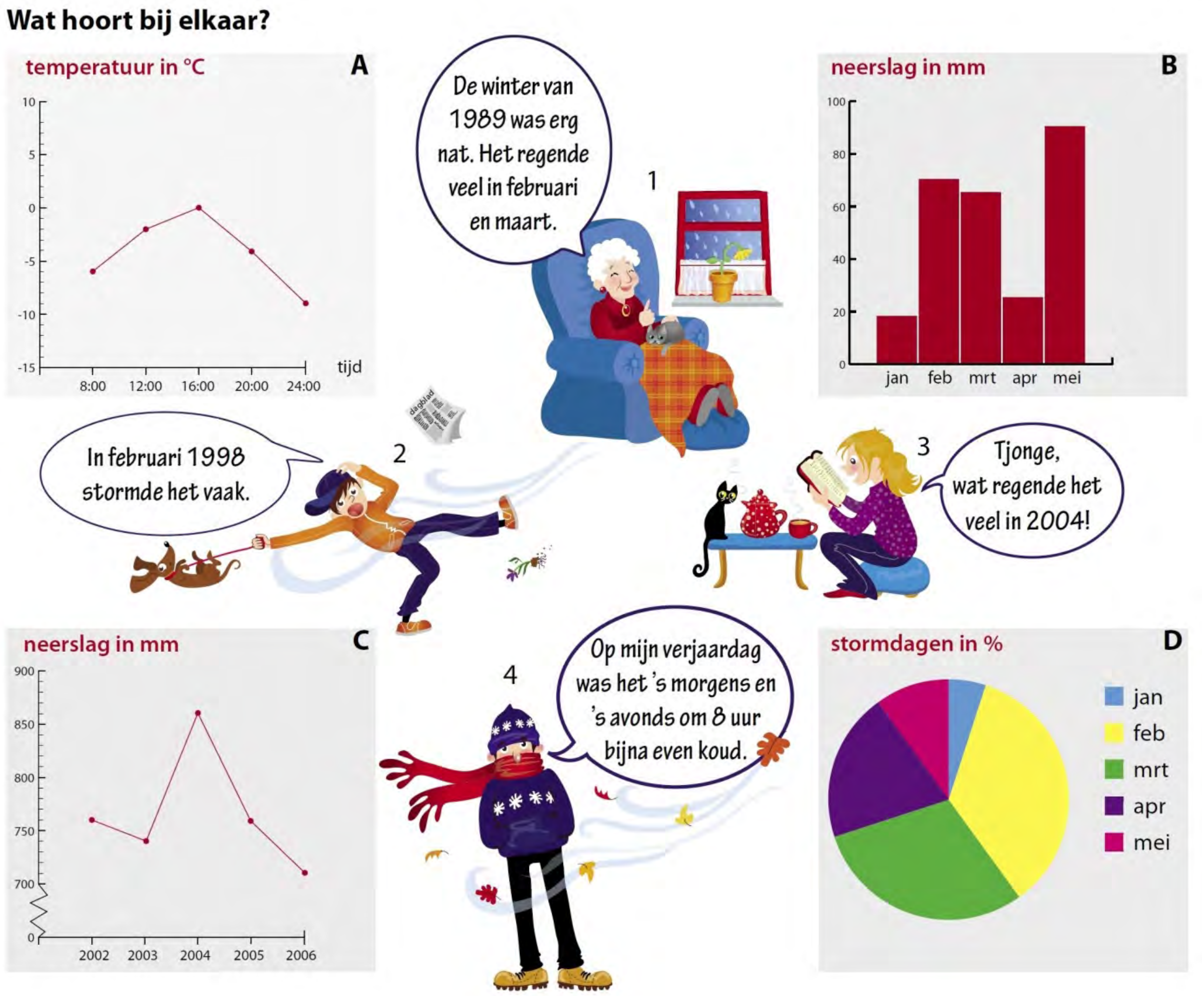
- Hoeveel borrelnootjes nam elk persoon?

Als je zou willen weten hoeveel borrelnootjes iemand neemt, zou je dat waarschijnlijk uitdrukken in *handjes* of *bakjes*. Deze vraag zou dus een mooie aanleiding kunnen zijn om het begrip *ongeveer* aan de orde te stellen, ook al omdat zou moeten worden

geschat hoeveel handjes of bakjes borrelnoten er uit twee kilo kunnen worden gehaald. De vraag biedt nog meer aanknopingspunten voor wiskundig denken. Niet iedereen neemt misschien nootjes, en een handvol van ome Jan is méér dan een handjevol van Charlotte van zes jaar. Zo zou je het begrip ‘gemiddeld’ kunnen introduceren. Zou het eigenlijk veel zijn, twee kilo nootjes voor zestig familieleden?
Omdat het me er nu om ging om meer zicht te krijgen op het denken van de leerlingen, ben ik niet op al deze mogelijke vragen ingegaan, maar dit liet me wel zien hoeveel er wel niet uit deze opgave valt te halen. Voor wat betreft het denken van de leerlingen viel het me op dat de meeste leerlingen niet zomaar een goede rekenvraag weten te bedenken. Daarom besloot ik om vaker de leerlingen zelf vragen te laten bedenken bij contextenopgaven.

Wat hoort bij elkaar?

Bij de opgave in afbeelding 2 komt heel wat kijken. De leerlingen moeten bij elke uitspraak de passende grafiek zoeken. Ze moeten daarvoor goed naar de verschillende grafieken kijken en de informatie die in elke grafiek wordt gegeven. Niet elke grafiek vertelt namelijk hetzelfde of heeft dezelfde context.



Afb. 2. De Wereld in Getallen, lesboek 6b, p. 28.

Het denkwerk dat deze opgave vraagt van de leerlingen verschilt nogal per uitspraak. Zo is er maar één grafiek die kan passen bij uitspraak 4: *Op mijn verjaardag was het 's morgens en 's avonds om 8 uur bijna even koud*. Alléén in grafiek A staat tijdsverloop gedurende een dag op een van de assen. De grafiek hoeft niet te worden afgelezen om te zien dat deze wel moet horen bij uitspraak 4. Maar voor uitspraak 1: *De winter van 1989 was erg nat. Het regende veel in februari en maart*, is dat anders. Er zijn twee grafieken waarbij het gaat om neerslag. Weliswaar kan ook nu de goede grafiek door alleen naar de assen te kijken (in grafiek C gaat het om 2002 – 2006, dus die valt af), maar als de leerling correct grafiek B wil kiezen, moet hij of zij zich niet laten afleiden doordat het in mei nóg meer regende. Die informatie doet niet ter zake, want in mei is het immers geen winter meer. Bij grafiek D zie je de verdeling van stormdagen over de maanden. Februari heeft het grootste part, dus zal deze grafiek bij uitspraak 2; *In februari 1998 stormde het vaak* moeten horen. Overigens zou het bij grafiek D best wel eens zo kunnen zijn dat het in die februari wel meeviel. Er staat bij dat het om percentages gaat en de daadwerkelijke aantallen dagen zijn dus niet bekend. Het taartpuntje van januari lijkt op het oog een twintigste deel van de cirkel te zijn, dus vijf procent. Als die vijf procent voor één dag zou staan, dan heeft het in die februari (weer op het oog) zeven dagen gestormd en daarover valt te twisten of dat nu vaak is of wel meevalt. Maar omdat in groep 6 procenten nog niet aan de orde zijn geweest, stel ik dit maar niet aan de orde. In groep 7 of 8 zou dat wel kunnen.

Hoewel deze opgave in het lesboek vóór de opgave van de familiedag zit, heb ik hem er later in het jaar nog eens bij gepakt, nu met de opdracht voor de leerlingen om er zelf vragen bij te bedenken. Omdat het bij grafieken zo is dat er informatie uit kan worden afgelezen, verwachtte ik dat de leerlingen vooral met zulke vragen zouden komen. Dat was voor een deel ook zo, bijvoorbeeld:

- Hoeveel graden was het warmer om 4 uur dan om 8 uur? (grafiek A)
- Hoeveel neerslag viel in januari minder dan in februari? (grafiek B)
- Hoeveel neerslag viel er in mei? (grafiek B)

Maar er waren ook vragen waarbij het rekenwerk er eigenlijk met de haren bij werd gesleept, zoals:

- Hoeveel millimeter regen is er gevallen in mei en februari samen? (grafiek B)
- Hoeveel neerslag is er samen gevallen in 2002, 2003, 2004, 2005 een 2006? (grafiek C)

Enkele verzonnen vragen gaven aanleiding om met de bedenkers even verder te praten. Deze vragen lieten misschien zien dat er iets nog niet goed werd begrepen. Voorbeelden van zulke vragen waren:

- Wat was het hoogste punt van de temperatuur in graden in tijd? (grafiek A)
- In welke maand was het 20 graden en in welke maand 90 graden? (grafiek B)

Bij die eerste vraag wilde ik weten of de interpretatie van de leerling verder ging dan alleen het hoogste punt opzoeken in de grafiek, oftewel of hij ook de link kon leggen met de betekenis van dat hoogste punt: hoe laat was het die dag het warmst? Bij de tweede vraag gaat het in de grafiek om millimeters (neerslag) en niet om graden. Dat maakt nogal uit voor de betekenis. Dat de leerling vraagt in welke maand het 90 graden was, zou wel eens kunnen betekenen dat hij nog geen besef van temperatuur heeft.

Ook deze keer waren er weer een paar mooie vragen die aanleiding konden zijn om bepaalde zaken te bespreken:

- Hoeveel graden was het gemiddeld op die dag? (grafiek A)
- Hoe vaak past het blauwe stukje in het gele stuk? (grafiek D)

De vraag naar het gemiddelde van die dag geeft gelegenheid om te spreken over het begrip gemiddelde: hoe bepaal je dat en wat betekent het? Kun je uit grafiek A eigenlijk wel het gemiddelde van de hele dag bepalen? De tweede vraag biedt aanleiding om nader te kijken naar de verdeling en na te denken over hoeveel dagen de verschillende parten zouden kunnen representeren. Zover kwamen we deze les nog niet. Bij het uitwisselen van de vragen werden de leerlingen steeds enthousiaster en kwamen ze op steeds nog meer vragen. Het besef dat er uit grafieken heel veel informatie kan worden gehaald, meer dan alleen op het eerste gezicht opvalt, was een belangrijke opbrengst voor mijn groep.

Tot besluit

De leerlingen zelf vragen laten verzinnen bij contextopgaven, bleek een succesvolle activiteit. In de eerste plaats waren de leerlingen heel enthousiast. Ze gingen heel bewust naar de opgaven kijken en waren er veel gerichter mee bezig dan anders. Niet alle vragen waren meteen even zinvol, maar dat geeft niet. Dit levert juist gespreksstof op, waarvan de leerlingen weer leren. Bovendien leveren de vragen die leerlingen zelf verzinnen mij als leerkracht heel veel informatie op over wat de leerlingen al wel of nog niet snappen. Het zelf vragen verzinnen staat in mijn rekenlessen inmiddels regelmatig op het programma en ik kan het alle collega's aanraden!

Kinderen die vragen …

Belinda Terlouw, Katholieke Pabo Zwolle,

Kijken naar Kinderen & Leren van Kinderen.

> *We're all hungry today for better answers. But first we must learn to ask the right question* (Warren, 2014)

Inleiding

In het onderwijs gaat het om vertrouwen. Vertrouwen in de ontwikkelkracht van ieder mens. Dit vraagt om kijken, luisteren en oprechte nieuwsgierigheid. Wie zijn die kinderen? Wie is die leerkracht? Wat hebben zij nodig om optimaal tot ontwikkeling te komen? Het begint met vragen stellen en ruimte bieden aan de vragen van de ander.
Jonge kinderen stellen wel honderd vragen per dag. Ze zijn benieuwd. Ze stellen ook vragen waar wij als volwassenen geen antwoord op weten. Waarom? Waarom? Waarom? Ze willen alles weten en begrijpen. De vragen verstommen naarmate ze langer op school zitten. Al snel wordt duidelijk dat er voor al die vragen die in hen opkomen, geen tijd is. Het is lastig voor de juf of meester, want ze moeten verder. Kinderen stellen op den duur alleen nog maar vragen die gericht zijn op het juiste antwoord. Dat zijn de antwoorden die de leerkracht wil horen. Ze denken niet meer zelf na en zijn blij als hun antwoord het goede antwoord is. Vragen stellen staat voor hen op den duur gelijk *aan iets niet snappen wat zojuist is uitgelegd* en heeft niets meer met hun nieuwsgierigheid te maken.
Het klinkt raar, maar je ziet dan ook niet vaak lerende kinderen in de rekenles. Je ziet kinderen die kunnen reproduceren wat hen is voorgedaan, maar je ziet niet wat zij nog meer kunnen. Ze weten nog zoveel meer, maar daar worden ze niet op bevraagd. Je ziet ook kinderen die het niet kunnen, maar de oorzaken daarvan en hun manieren van denken worden niet altijd zichtbaar.
Kinderen, en ook leerkrachten, worden niet geholpen door ze na te laten doen wat wordt voorgedaan, keer op keer, net zolang totdat ze doen wat is voorgedaan, maar is dat leren? Leren heeft te maken met zelf denken, met vrijheid, met zelfvertrouwen en met vragen stellen. Het rekenonderwijs zou daar ruimte voor moeten bieden. Er gaat veel creativiteit verloren als men niet bereid is om de vastomlijnde kaders los te laten.
Als leerkracht weet je wat je de kinderen in jouw groep hebt te leren op rekenwiskundig gebied. Je weet wat er aan jouw groep vooraf is gegaan en je weet wat er in de volgende jaren van je leerlingen wordt gevraagd. Dit biedt je de mogelijkheid om te spelen met het aanbod en keuzes te maken, maar dat kan alleen als je goed weet wie de kinderen zijn en wat ze al kunnen. Het goed in kaart brengen van de beginsituatie is dan ook het halve werk. Daar zou je als leerkracht veel tijd in moeten investeren, zodat je aanbod passend is en het de kinderen in hun kracht zet. Een beginmeting kan je hierbij helpen.

Vraag het de kinderen

Een vierdejaarsstudent van de Katholieke Pabo Zwolle deed een beginmeting in groep 5 op het gebied van getalbegrip. In een nieuwsbrief van Kijken naar Kinderen is hier al eens verslag van gedaan.[1] De student, Esther de Koning, wist wat de kinderen konden en wat zij nodig hadden, maar ze wist ook dat een aantal kinderen de doelen allemaal al hadden behaald nog voor ze met haar lessenserie begon. Ze stelde zich de vraag wat zij met hen aan moest. Ze besloot de kinderen zelf te vragen wat zij wilden leren binnen de getallenwereld. Het was bijzonder te zien wat er gebeurde toen de kinderen de ruimte kregen hun eigen vragen te formuleren.

Kiezen

De kinderen van juf Esther dachten over haar vraag na. Neushoorns, planeten, de ruimte en tijgers…daar viel veel aan te rekenen. In tweetallen gingen ze de uitdaging aan. Ze vonden het moeilijk om te beginnen, want ze hadden nog nooit zoiets gedaan. Jonas vertelde dat het ook moeilijk was om tot één onderwerp te komen. *Je bent met zijn tweeën en dan moet je er ook samen uitkomen. Als de een het over voetbal wil doen en de andere niet, is dat lastig.*

Achter de computer zochten de kinderen hun weg, maar ook dat kwam moeizaam op gang. Toen juf Esther de kinderen meer ging begeleiden, kwam er structuur in hun aanpak. Eenmaal gekozen voor een onderwerp, moesten de kinderen een vraag formuleren.

Getallenwereld in de ruimte

Jaden en Thijs wilden op zoek gaan naar de getallenwereld in de ruimte. Ze wilden eerst onderzoeken hoe heet de zon was. Daar vonden ze een antwoord op. De zon is 5.700 graden Celsius. Ze wilden gaan uitzoeken hoeveel planeten er in de ruimte zijn en verwachtten dat dat een groot getal zal zijn. Hoe spreek je die getallen uit? Daar moesten ze een antwoord op krijgen.

Nicky en Daniah wilden weten hoeveel tijgers er nog op de wereld zijn. Dat zijn er nog maar 3.500. Ze spraken dit uit als *35 duizend*. Best lastig om zo'n getal uit te spreken. Björn en Jonas deden iets soortgelijks. Zij zochten uit welke soorten neushoorns er zijn en hoeveel

[1] Zie www.kijkennaarkinderen.nl bij nieuwsbrieven, nieuwsbrief 6.

er daar nog van over zijn. De aantallen telden zij bij elkaar op. Ze wilden nu ook gaan uitzoeken hoe de neushoorns in de prehistorie er uit zagen en wilden die soorten op grootte gaan vergelijken met de neushoorns van nu.

Planeten

Het tweetal dat zich verdiepte in de planeten binnen ons zonnestelsel hebben van iedere planeet opgezocht hoe ver ze van de zon af lagen. Omdat ze ook opgaven wilden maken, hebben ze deze afstanden bij elkaar opgeteld. Ook nu ontstond er een discussie over hoe je dit uitspreekt. De afstanden onderling werden vergeleken. Welke planeet ligt het verst weg? Daarvoor moet je de getallen goed begrijpen. Ze vergeleken ze in eerste instantie op het aantal cijfers binnen het getal en bij een gelijk aantal was het zoeken naar hoe je kunt bepalen wat groter is.
De kinderen vertelden dat ze het fijn vonden dat juf Esther hen de kans gaf om dit tijdens de rekenles te mogen doen. Ze vonden ook dat zij alles goed uitlegde. Niet door het voor te zeggen, maar door te helpen bij het denken. Ze gaf dan een voorbeeldje dat leek op de opgave die gemaakt moest worden en soms maakte ze een tekeningetje. Dan wist je hoe je verder kon en mocht je toch zelf denken.

Samenwerken

Op de vraag wat ze nu eigenlijk geleerd hadden, vertelden de kinderen dat ze heel veel over hun onderwerp te weten waren gekomen. Ze hebben niet alleen kennis opgedaan. Jonas vertelde dat hij ook geleerd heeft samen te werken. Het kon namelijk niet zo zijn dat de een alles deed en de ander niets. Het handig inzetten van de computer was ook een leerproces. Je moet even weten hoe je kunt zoeken en je moet leuke vragen kunnen bedenken waar je echt nieuwsgierig naar bent. Je wordt dan een onderzoeker.
Wat ze verder wilden onderzoeken, vonden de kinderen nog wel lastig te bepalen. Als je niet weet wat er te weten valt, is dat moeilijk. In een brainstormsessie zijn ze samen gaan kijken wat ze nog meer over hun onderwerp te weten kunnen komen. Een tijgervoetafdruk op ware grootte proberen te tekenen als je de afmetingen hebt gevonden. Onderzoeken hoeveel poep een neushoorn per dag produceert en wat dat op jaarbasis is en je daar een voorstelling van proberen te maken. De omtrek van de verschillende planeten moet ook te vinden zijn en die kun je dan met elkaar vergelijken. Het tweetal dat de ruimte onderzocht, wil weten hoe groot het universum eigenlijk is.
Juf Esther gaf aan zelf ook veel geleerd te hebben van de kinderen en van het proces.

Vakmanschap en los durven laten

Projecten als deze vragen om leerkrachten die hun vak verstaan en de moed hebben los te laten en te vertrouwen op de ontwikkelkracht van de kinderen. Het vraagt ook om een onderwijssysteem waarin leerkrachten die vrijheid krijgen.

Het is een feest om te zien wat er gebeurt als kinderen de ruimte krijgen op basis van hun eigen vragen zich te ontwikkelen. Einstein deed niet anders. Hij stelde zichzelf als kind al voortdurend bijzondere vragen. Zijn leven lang zag hij nieuwsgierigheid als iets heiligs.
Berger (2014) schrijft in *A more beautiful question* over de impact van vragen stellen. Het gaat niet om de antwoorden, maar om de juiste vragen. Die bewerkstelligen groei. Hij vraagt zich af waarom het onderwijs de natuurlijke behoefte van kinderen om vragen te stellen niet voedt. Hij ziet veel overeenkomsten tussen wetenschappers en jonge kinderen die onderzoeken en haalt de kinderpsychologe Alison Gopnik aan, die aangeeft dat kinderen de onderzoeks- en ontwerpdivisie van de mensheid vormen. Als ze onderzoek mogen doen, hun eigen vragen mogen bedenken en onderzoeken, zonder gehinderd te worden door instructies, tonen zij meer creativiteit en nieuwsgierigheid. Een belangrijke houding om de problemen van nu en in de toekomst op te kunnen lossen.
Een ieder in het rekenonderwijs heeft vast al wel eens mogen ervaren hoe mooi het is als kinderen zelf gaan denken en creëren. Kinderen voelen de vrijheid en zijn blij met het vertrouwen in hen dat de leerkracht hiermee impliciet uitspreekt. Ze voelen zich regisseur van hun eigen leerproces. Dat daagt ze uit en maakt de betrokkenheid groter. Waarom biedt het onderwijs hier dan zo weinig gelegenheid voor?

Wat houdt ons tegen?

In het reken-wiskundeonderwijs is over het algemeen de methode leidend en de leerkracht die het beste voor zijn leerlingen wil, voelt zich daar verantwoordelijk voor. Bovendien voelt de leerkracht zich niet altijd competent genoeg om de (handleiding van de) methode los te laten. Het aanbod staat centraal. Sommige leerkrachten zijn bang om keuzes te maken in die methode omdat ze denken zo mogelijkerwijs hun kinderen te kort te doen. Ze zijn dus bang om fouten te maken en dat zorgt er weer voor dat ook hun leerlingen bang worden om fouten te maken. Dat is jammer, want het zijn juist de fouten waar zoveel van geleerd kan worden en waardoor onze denkkracht groeit. Dit geldt voor leerkrachten en voor kinderen.
Boaler (2016) roept op tot een reken-wiskundeonderwijs dat een *Growth Mindset* stimuleert. Zulk onderwijs moedigt kinderen aan, gaat uit van vertrouwen en waardeert de worsteling en het maken van fouten. Het boek zet aan tot een andere kijk op een methodegerichte aanpak, waarin de leerkracht geneigd is pas problemen aan de kinderen voor te leggen nadat ze hen hebben uitgelegd en geïnstrueerd hoe het probleem opgelost moet worden. Dit ontmoedigt kinderen zelf creatief te denken en maakt ze afhankelijk. Dit is een hardnekkig probleem, ook omdat veel leerkrachten zelf in de veronderstelling leven dat zij moeten doen wat anderen hebben bedacht en geen ruimte ervaren om zelf te mogen experimenteren in een minder vastomlijnde situatie. Dat zou hen de mogelijkheid kunnen bieden om kinderen meer uit te dagen en actiever en creatiever te laten leren, waardoor zij zelf ook meer kunnen leren van hun kinderen.

Experimenteren

Binnen de methodegerichte aanpak kan al ruimte gecreëerd worden voor creatief denken. Productief oefenen en de juiste vragen stellen over het aanbod, zetten de kinderen al tijdens de methodeles aan tot denken, nodigen uit tot interactie en verhogen de opbrengsten op velerlei gebied.[2] Dit maakt het mogelijk onderwijstijd te winnen.

In de overgebleven tijd kan gerekend worden buiten de methode om, op basis van wat kinderen zelf samen willen onderzoeken en leren. Kinderen leren veel van het opdoen en aangaan van dit soort ervaringen. Het ontwikkelt hun probleemoplossend vermogen, een belangrijke wiskundige vaardigheid. De leerkracht wordt begeleider, spreekt zijn vertrouwen in de kinderen uit, is nieuwsgierig naar het proces en stelt vragen om kinderen op verhaal te brengen. Het is een kwestie van gewoon uitproberen en experimenteren en accepteren dat het tijd vraagt. Daarbij kan men genieten van het feit dat er fouten gemaakt mogen worden. Fouten zijn het bewijs dat je het probeert.

Het experiment begint met de vraag wat kinderen graag zouden willen onderzoeken. Dat kan aansluiten bij het domein dat op dat moment centraal staat binnen het rekenonderwijs in de groep. Stel je hebt gewerkt binnen het domein meetkunde, dan zou je bijvoorbeeld kunnen vragen hoe dit domein in het alledaagse leven voorkomt en waar leerlingen nieuwsgierig naar zijn. Dit is in het begin misschien een beetje vreemd voor de leerkracht, maar zeker ook voor de kinderen, die over het algemeen geneigd zijn te wachten op een gerichte opdracht die de leerkracht ze geeft. De kunst is echter om henzelf te laten nadenken over wat zij nu eigenlijk echt willen onderzoeken en hoe ze dat willen aanpakken. Maak duidelijk dat het hun onderzoek is en dat je in ze gelooft. Volg het proces, stel vragen en bied ruimte aan de vragen van de kinderen. Aan het eind presenteren de kinderen hun opbrengst. Laat je verrassen door hun creatieve invallen en onorthodoxe werkwijze, leer en geniet!

Literatuur

Berger, W. (2014). *A more beautiful question*. New York: Bloomsbury USA.

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets*. San Francisco, CA: Jossey-Bass

[2] Zie ook de bijdragen in deze bundel van Julie Menne en Marc van Zanten.

Groeien in de getallenwereld

Dolf Janson, JansonAdvies

Inleiding

Wat nodig is om leerlingen succesvol te laten zijn, is inmiddels wel bekend. We weten uit zowel onderzoek als praktijkervaringen wat het effect is van motivatie en uitdaging. We weten dat het beeld dat leraren van leerlingen hebben vaak werkt als *selffulfilling prophesy*. Dit blijkt ook te gelden voor het beeld dat leerlingen van zichzelf ontwikkelen. In dit hoofdstuk gaan we na wat nodig is om in rekenlessen die *mindset* van leerlingen een oriëntatie op groei te geven.

Praktijk?

Jonge kinderen maken op allerlei manieren kennis met getallen en cijfers. Hun leeftijd, huisnummers, de (digitale) klok, de maximumsnelheid op borden onderweg, het nummer op de bus, het nummerbord van de auto, de maat van je nieuwe jas en zo nog veel meer. Zolang ze nog niet hebben kennis gemaakt met onderwijs hebben getallen en cijfers voor kinderen nog een neutrale of zelfs uitdagende betekenis. *Kijk, daar staat nog een 2!*

Kunnen kinderen, zodra zij leerling worden en aan onderwijs worden blootgesteld, deze onbevangen nieuwsgierigheid behouden? Als hun leraren zelf ook nieuwsgierig zijn en vragen stellen die tot nadenken uitnodigen, dan kan dat zeker. Leraren die niet vragen wie het antwoord goed had, maar naar de manieren waarop leerlingen dat antwoord hebben gevonden en waaraan zij herkenden dat dit de beste manier was. Daardoor merken die leerlingen dat de vooruitgang, hun volgende leerdoel, in die manier van uitrekenen zit en niet in het antwoord. Er zijn leraren die heel demonstratief de antwoorden op het digibord zetten: die weet ik al, want die staan in het boek…. Zo'n aanpak vraagt durf, want dat gaat in tegen een wijdverbreide traditie. Deze leraren hadden begrepen dat de opbrengst tijdens het leerproces en in de oefenactiviteiten in veel gevallen niet het antwoord is, maar het denkproces. Maar minstens zo belangrijk is dat zij in hun team afspreken dat ze dan ook niet bij de leerlingen de indruk moeten wekken dat die antwoorden toch, als puntje bij paaltje komt, het doel van het oefenen zijn. De kreet *opbrengstgericht* die de afgelopen jaren populair was, heeft helaas nogal wat teams in dit opzicht op het verkeerde been gezet: wat is eigenlijk de échte opbrengst van rekenlessen?

In sommige scholen hebben leraren om diezelfde reden ervoor gekozen hun groep niet meer in drie subgroepen te verdelen. Zij merkten dat in de dagelijkse lessen de motivatie van de leerlingen ernstig terugliep. Dat wil zeggen, de motivatie om zich in te spannen om hun eigen volgende doel te halen. Er bleken veel meer subtiele, maar essentiële verschillen tussen leerlingen, zodra zij dat op het niveau van de concrete oefendoelen gingen bekijken. De voorkennis varieerde soms enorm. Op deze scholen hanteren de leraren nu een veel grotere variatie in instructie- en coachingmomenten. De groepjes hebben een wisselende samenstelling en kunnen zowel een inhoudelijke noemer hebben als (ook) een aspect van leren leren (Claxton, 2011) en/of executieve functies.

Wat is het probleem?

Wat maakt dat zulke praktijken zo wenselijk zijn? De bekende onderwijsvernieuwer John Dewey schreef honderd jaar geleden al *Were all instructors to realize that the quality of mental process, not the production of correct answers, is the measure of educative growth something hardly less than a revolution in teaching would be worked* (Dewey, 1916, p. 207). Sindsdien kennen we meer heel concrete redenen om de rollen en de doelen in de rekenles anders te zien en het handelen van zowel leraren als leerlingen daarop af te stemmen.

We weten dat, om met succes te kunnen leren en je te kunnen ontwikkelen, ieder mens drie psychologische basisbehoeften heeft. De onderzoekers Decy en Ryan (1985; 2000) benoemden die als ***c****ompetence*, ***a****utonomy* en ***r****elatedness* (competentie, autonomie en relatie). De Groningse hoogleraar Minnaert maakte daar een geheugensteuntje bij. Die drie basisbehoeften vormen het woordje *car*: dat heb je nodig om vooruit te komen. Waar dat lukt ontstaat betrokkenheid, in het Engels is dat *engagement*. Als je die letter toevoegt aan de basisbehoeften ontstaat het woord *care*: zorg. Goed onderwijs is inclusief zorg. Die zorg is niet iets heel anders, dat erbij komt of de taak is van de ib'er, maar een manier van dagelijks afstemmen op onderwijsbehoeften.

Leerlingen aanspreken op hun competentie, en het mogelijk maken dat ze die competentie kunnen laten groeien, betekent dat de verschillen tussen leerlingen uitgangspunt zijn bij het inhoud geven aan en vormgeven van rekenlessen. Wie zich realiseert dat de leerlingen aan het eind van groep 8 uitwaaieren naar diverse typen vervolgonderwijs, van praktijkonderwijs tot tweetalig gymnasium, zal niet verbaasd zijn dat verschillen er ook al zijn in groep 4 of 6. Het begrip *competentie* krijgt dan ineens een heel concrete betekenis. Hoe bewust zijn de leerlingen zich van hun eigen competentie? Herkennen zij wat hun voorkennis is? Hoe speel je daarop in bij het introduceren van een nieuw onderwerp?

Voorbeeld 1

Bij de introductie van breuken is het belangrijk om eerst de leerlingen te laten nagaan welke woorden, die met breuken te maken hebben, zij ooit al zijn tegengekomen.

Dat roept verwante woorden op: breuk, breken, gebroken, breekbaar en zelfs gebrek en ontbreken.

Breuk en *gebroken* kunnen bij sommige leerlingen eerder de associatie met een ziekenhuis oproepen dan met getallen. Anderen hebben het woord breuk misschien gehoord in verband met een aardbeving of koppelen het aan aardrijkskunde. Het met elkaar verzamelen van zulke verwante woorden en betekenissen helpt om die relaties bewust te maken en zo vervolgens te bespreken wat die betekenissen met elkaar te maken hebben.

Verder zijn er natuurlijk namen van breuken die de leerlingen al kenden, lang voordat zij van breuken afwisten. Bij de klok kom je begrippen als halfnegen en kwart over drie tegen. Ook begrippen als kwartier, kwartaal en een driekwart mouw of broekspijp zijn ze misschien al eens tegengekomen. Thuis hebben ze misschien halfvolle melk in de koelkast of eten ze weleens een half haantje. Wie eet er trouwens weleens een heel haantje?

Mindset

De Amerikaanse psychologe Carol Dweck doet inmiddels al zo'n veertig jaar onderzoek naar motivatie bij leerlingen. Zij volgde leerlingen gedurende hun hele schoolloopbaan en nog wat jaren daarna en kwam zo tot een verontrustend inzicht. Er bleken twee patronen te onderscheiden, die leerlingen in de loop van de jaren ontwikkelden. Aan de ene kant waren er leerlingen die een nogal statisch beeld van zichzelf ontwikkelden. Zij zagen zichzelf als een tamelijk duidelijk te herkennen type: zo ben ik nu eenmaal, daar kan ik ook niets aan doen. Zij hadden zichzelf als het ware een etiket opgeplakt. In veel gevallen had de omgeving daar flink aan meegeholpen.
Het andere patroon was eerder het tegenovergestelde. Die leerlingen hielden de moed erin en probeerden toch elke keer weer vooruitgang te boeken, te veranderen en erbij te leren.
Die eerste groep had volgens Dweck (2006) een *fixed mindset*. Zij zochten oorzaken van wat hen overkwam niet (meer) bij zichzelf en dat gold daardoor ook niet voor de oplossingen daarvan. Wie moeite had met leren rekenen ging dat als excuus gebruiken (*Ik ben nu eenmaal slecht in rekenen*.) en deed geen moeite meer. Dweck ontdekte dat mensen met dit patroon later in hun opleiding, hun beroep en hun relatie ook problemen kregen en vastliepen.
Die andere groep ontwikkelde juist een *growth mindset*. Zij bleken zich te kunnen aanpassen, vol te houden als iets moeite kostte en niet in de slachtofferrol te gaan zitten. Zij bleken later ook succesvol in opleiding, beroep en relatie.

Verschillen in de groep

Welk patroon leerlingen ontwikkelen blijkt sterk te worden beïnvloed door de omgeving. In dit hoofdstuk beperken we ons tot invloed van lessen rekenen-wiskunde, maar het zal duidelijk zijn dat onderwijs en opvoeding veel breder invloed uitoefenen.
In ieder geval blijkt ook bij rekenlessen de leraar het verschil te maken. Dat verschil schuilt niet zozeer in de vraag of de stappen van het instructiemodel worden gevolgd. Veel belangrijker is hoe leraren hun leerlingen zien. Wie de voortgang van de methode als uitgangspunt neemt en leerlingen die zich niet aan dat tempo of die opbouw kunnen conformeren ziet als zorgleerlingen, zal dat op allerlei manieren, bewust of onbewust, laten merken. Leerlingen die altijd moeten meedoen met verlengde instructie, gaan zelf geloven dat ze zwak zijn en niet kunnen leren rekenen. De *fixed mindset* is dan geboren. Aan de andere kant van het spectrum geldt dat ook. Leerlingen die op grond van toetsscores structureel niet mee hoeven doen met de groepsinstructie en extra taken krijgen, kunnen dat ervaren als een soort beloning. Zij zullen graag aan dat beeld beantwoorden en niet snel laten merken dat zij iets niet begrijpen. Dat merk je nog meer bij leerlingen die het etiket *hoogbegaafd* opgeplakt hebben gekregen. Zij moeten voortdurend voldoen aan de vooroordelen

van de omgeving en gaan dat ten slotte zelf geloven: *Ik ben hoogbegaafd, dus aan mij kan het niet liggen…*

Antwoorden

Een factor die een op groei gerichte *mindset* tegenwerkt, is de hiervoor al genoemde nadruk op antwoorden, zeker in de oefenfase. Oefenen in de rekenles is in veel gevallen gericht op het veranderen of verbeteren van de manier van uitrekenen. Dat kan betekenen dat het leren gebruiken van een model (rekenrek, lege getallenlijn, strookmodel) of juist het loskomen van een model het doel is. Of het gaat erom minder tussenstappen te maken of handiger gebruik te maken van de relatie tussen getallen. Om die actieve houding van een leerling met een op groei gerichte *mindset* mogelijk te maken, is het nodig dat leerlingen weten wat hun volgende stap is om op vrij korte termijn een haalbaar doel te kunnen behalen. Zonder te weten of begrijpen wat hun oefenen hen concreet verder moet helpen, kunnen leerlingen geen moed putten uit of energie ontlenen aan de dingen die zij doen.

Voorbeeld 2

Bij het leren gebruiken van de lege getallenlijn als denkmodel en ontlasting van het werkgeheugen, gaat het erom dat de leerlingen snappen welke keuzes ze moeten maken. Het begint al met de vraag: waar zet ik het eerste getal? Doe ik dat links of rechts? Om die vraag te kunnen beantwoorden moeten ze voorzien wat er daarna gaat gebeuren en snappen wat dat voor gevolg heeft. Om af te trekken ga je terug op de getallenlijn, want door aftrekken houd je minder over. Dus moet je sprongen naar links kunnen maken, want hoe meer naar links, hoe kleiner de getallen. Dat is noodzakelijke voorkennis om de keuze te kunnen maken en zo te kunnen uitleggen dat het startgetal dan rechts moet staan.
Vervolgens is de keus of je begint af te trekken (sprongen op de getallenlijn te maken) met de tientallen of met de eenheden. Er is geen principiële reden om het een of het ander te doen, maar je moet wel kiezen. Kies je voor de tientallen, dan zou je dat eigenlijk in één sprong moeten kunnen. Op het moment in de leerstof dat de lege getallenlijn aan de orde is, zal het aftrekken tot tien al gememoriseerd zijn en is de relatie tussen de getallenrij van 0 tot 10 en die van 10 tot 100 al uitgebreid verkend en al springend geoefend. Wie dat nog niet vlot kan, moet je als leraar nog niet met opgaven als 64 – 48 aan de gang laten gaan. Toch doorgaan leidt dan weer tot een tellende aanpak (sprongen van tien) en onbegrepen handelingen.
Wie begint bij de eenheden kan ook een keus maken. Behalve eerst alle eenheden eraf te trekken, kan een leerling er ook voor kiezen eerst het tiental ‘leeg te maken’, dan eerst de tientallen eraf halen en dan pas de rest van de eenheden.
Naast voorkennis speelt hierbij steeds ook snappen een rol. Waarmee helpt dit model eigenlijk? In het verlengde daarvan moeten leerlingen kunnen overzien welke stappen en daarmee samenhangende keuzes zij moeten doen.

Bij zulke oefeningen is het proces veel essentiëler dan het antwoord. Het is zelfs aan te bevelen om dit soort oefeningen mondeling en in tweetallen te laten doen. Leerlingen kunnen dan om beurten een opgave hardop denkend uitwerken. Zij vertellen welke stappen ze zetten en waarom ze hier deze keuze maken. Hun maatje geeft

daarop feedback en pas als ze het samen eens zijn draaien de rollen om en gaat de ander met de volgende opgave aan de gang.
Zo wordt voor de leerlingen zélf zichtbaar of merkbaar welke vooruitgang hun oefenen en bespreken oplevert. Dat verschil zien ze niet aan antwoorden, want die blijven gelijk. Voorkennis bepaalt wat er te oefenen is. Al in groep 3 is dat heel duidelijk. In het begin van dat leerjaar kunnen veel leerlingen al goed tellen en vaak al veel verder dan tot 10 of 20. Het in hun werkschrift maken van oefeningen met het tellen van kleine hoeveelheden is dan geen oefenen. Het werkt zelfs eerder contraproductief, doordat leerlingen dan geen goed beeld krijgen van wat echt oefenen is.

Voorbeeld 3

Het traject van alle optellingen en aftrekkingen tot tien tellend uitvoeren tot en met dezelfde opgaven direct uit het hoofd weten (gememoriseerd hebben), kent een hele rij tussenstappen, onder andere via het leren kennen van de getalbeelden. Een leraar die per ongeluk alleen zou letten op de antwoorden van het oefenwerk of zelfs van de toets, loopt het risico niet op te merken dat bepaalde leerlingen die antwoorden tellend hebben verkregen. Wie telt, rekent niet en gaat dus door het oefenen ook niet in rekenvaardigheid vooruit, hooguit in telvaardigheid.
Doordat soms het klassikale meedoen en voortgaan met de methode de voorkeur krijgt boven leerlingen van het tellen af te helpen, kan er een steeds groter verschil in competentie ontstaan tussen dergelijke leerlingen en de rest van de groep. Het komt regelmatig voor dat de toetsresultaten in groep 5 ineens tegenvallen, terwijl daarvoor in de groepen 3 en 4 geen reden tot zorg was… Grote kans dat dit komt doordat dan pas de tellers door de mand vallen.

In groepen waar het nakijken de dagelijkse afsluiting van een oefenmoment is, ongeacht of het door de leerlingen zelf, door de leraar of door de software gebeurt, zal de leerling de conclusie trekken dat het tenslotte toch vooral om het (juiste) antwoord gaat. Leraren die doorhebben dat dit soort routines een op groei gerichte *mindset* belemmeren, zullen het oefenwerk niet meer (laten) nakijken, maar tijd investeren in het nabespreken van de manier van uitrekenen en de leerlingen stimuleren hun manier van uitrekenen (ook op papier of tablet) zorgvuldig weer te geven.

Anders kijken

De consequentie is dat verschillen tussen leerlingen een andere betekenis krijgen. Elke leerling volgt nu eenmaal een eigen *leer*lijn en dat is zelden een rechte lijn. Wat meestal als leerlijn wordt aangeduid, is in feite een leer*stof*lijn, een ordening van de te leren inhouden. Ook die leerstof heeft in werkelijkheid eerder een concentrische ordening dan een lineaire. Dit maakt dat het verbinden van de leerlijn en de leerstoflijn zorgvuldige afstemming vraagt. Dat proces noemen we *onderwijs*. De aandacht verschuift dan van toetsscores en het aantal goede antwoorden, naar de vraag welke voorkennis een leerling nodig heeft om een volgende stap te kunnen zetten. Dan blijkt dat het nog niet beschikken over een bepaalde kennis of vaardigheid het doorgaan naar een volgende stap in de leerstof verhindert. In plaats van die nieuwe stap in de verlengde instructie nog eens te bespreken en te demonstreren, blijkt het nodig eerst aan een of meer andere, voorafgaande doelen te werken.

Voorbeeld 4

Nadat het verschijnsel vermenigvuldigen is geïntroduceerd en door de leerlingen verkend en vergeleken met optellen, construeren leerlingen de tafels van vermenigvuldiging. Vervolgens leren ze hoe zij een gemakkelijke of bekende opgave kunnen gebruiken als hulpopgave om snel een nog niet bekende vermenigvuldiging te kunnen uitrekenen. Om 9×4 te kunnen uitrekenen ga je via 10×4 naar 9×4. Daartoe moet je wel $40 – 4$ weten. Wie zulke aftrek- en optelopgaven nog niet vlot kan uitrekenen, ervaart die hulpopgaven niet als hulp, maar als een extra moeilijkheid. Het heeft dan geen zin om nog een keer uit te leggen hoe zo'n hulpopgave werkt. Eerst moet die leerling opgaven als $30 + 12$ of $60 – 6$ met gemak kunnen uitrekenen. Dat is een ander doel!

Hier blijkt een andere psychologische basisbehoefte van belang: verbondenheid tussen leraar en leerling. De leerling moet kunnen merken dat het zijn/haar leraar wat kan schelen wat hij/zij doet en hoe. Door samen heldere en haalbare doelen af te spreken en hen te bemoedigen bij het uitvoeren van die taak door informatieve feedback en het laten blijken van vertrouwen in de goede afloop, ontwikkelt de leerling zelfvertrouwen. Carol Dweck waarschuwde er recent (2015) nog voor om die aanmoediging niet los te koppelen van de doelen waaraan een leerling werkt. Zij merkte namelijk dat haar verhaal over die *growth mindset* ertoe had geleid dat men alleen het bemoedigen was gaan toepassen, ook als de leerling geen resultaten behaalde of zelfs kon behalen. Dan werkt het niet, ook al roep je nog zo vaak "Super, wat heb jij hard gewerkt!" Leerlingen moet zelf merken dat zij vooruitgang boeken en de gestelde doelen halen. Dat kan alleen als die doelen samen zijn bepaald en maatwerk zijn. Bij bepaalde leerlingen betekent dit kleine en overzichtelijke stappen zetten, maar wel stappen, niet meer van hetzelfde. Bij andere leerlingen betekent het juist dat de doelen complexer moeten zijn om uit te dagen tot inzet en volharding. Maar ook dan is het nodig om samen met de leerling vanuit vertrouwen de criteria vast te stellen waaraan het resultaat moet voldoen. Een taak af hebben is geen doel, want een doel halen betekent iets hebben toegevoegd aan je kennis, inzicht en/of vaardigheid.

Actieve leerlingen

Bij de introductie van een nieuw onderwerp, waarbij de leerlingen een probleem krijgen voorgeschoteld dat ze op verschillende handelingsniveaus te lijf kunnen, is het leren met en van elkaar een reële mogelijkheid. Ieder kan immers actief deelnemen en zo een bepaald resultaat boeken. Dat lukt doordat de situatie betekenisvol voor hen is en de probleemstelling open. Er is niet één goed antwoord, maar er blijken verschillende wegen naar oplossingen te leiden. Dat daagt uit, maar is tegelijk ook bemoedigend. De leraar die de groep zo uitdaagt straalt ook uit dat er vertrouwen is dat ieder een bijdrage kan leveren.

In het vervolg daarvan kunnen leerlingen in kaart brengen welke kennis en vaardigheden met dit nieuwe gebied/onderwerp verbonden zijn. Zo kan bijvoorbeeld een *mindmap* ontstaan, die naar mate het onderwerp vordert, verder kan worden ingevuld en worden gedetailleerd. Ieder kan daarop de volgende stap herkennen die hij of zij nodig heeft. Zo kunnen zowel leraar als leerling voorkennis koppelen aan doelen en daardoor inspelen op de onderwijsbehoefte van die leerling.
De rol van de leraar is dan vooral ervoor te zorgen dat elke leerling blijft leren en zich verder kan ontwikkelen. Dat hoeft niet te leiden tot volledig individueel georganiseerd onderwijs, want op elk moment zijn er weer leerlingen te koppelen. Die clustering is echter nooit vast en altijd gebaseerd op effectiviteit. Wie veel oefening nodig heeft moet niet lang oefenen, maar wel vaak. Dat vraagt ruimte om frequent die korte momenten in te plannen en daarbij de mogelijkheid creëren om feedback te krijgen, van de leraar of van een andere leerling. Samen bedenken hoe je een bepaalde vaardigheid handig kunt oefenen schept een band en bevordert een goede sfeer. Moeten oefenen is dan niet een bewijs van falen, maar op weg zijn naar succes. *Moeilijk* is dan geen dreiging, maar logisch, want je bent aan het leren (mits het natuurlijk niet té moeilijk is).

Formatieve evaluatie

Dit vraagt dat elke leerling helder voor ogen heeft wat dat oefenen inhoudt. Het gaat om het besef van de leerling dat hij/zij iets *nog* niet goed genoeg kan of weet, maar eraan kan werken (Dweck, 2015). Dat woordje *nog* maakt het verschil. Bij een *fixed mindset* denken en zeggen leerlingen “Ik kan dat niet.” Bij een *growth mindset* klinkt “Ik kan dat nog niet.” Hiermee komen we aan de derde psychologische basisbehoefte: autonomie. Dat is bepaald niet hetzelfde als zelfstandigheid. Bij autonomie draait het om verantwoordelijkheid, eigen keuzes, initiatief en zelfkennis. Bij zelfstandig werken ligt het accent al snel op gehoorzaamheid en niet storen. Dat is een essentieel verschil. Dit maakt dat autonomie een belangrijke bijdrage levert aan die op groei gerichte *mindset*. Leerlingen moeten door de reacties uit hun omgeving in de vorm van getoond vertrouwen en informatieve feedback en *feedforward* ervan overtuigd raken dat het zin heeft om initiatief te nemen, vol te houden, te blijven oefenen of een andere vorm uit te proberen, omdat dit tenslotte leidt tot resultaat. Resultaat dat zij zelf hebben bereikt door hun doelgerichte inspanning en eigen keuzes. Dat kan dan bijvoorbeeld klinken als *Ik merk dat jij nu de meeste opgaven van de tafel van vier al vlot kent. Dat is je al gelukt! Dan hoef je dus alleen nog maar te oefenen met die drie opgaven die nog niet zo vlot gaan. Hoe zou je dat handig kunnen aanpakken?* Leerlingen deze ruimte en verantwoordelijkheid laten, betekent niet hen de vrijheid geven om zomaar wat te doen. Leerlingen moeten zich wel verantwoorden over wat en hoe ze geoefend hebben. Het aardige is dat een leerling die weet wat de bedoeling is en doelgericht heeft geoefend, dit heel goed kan verantwoorden en zo kan laten zien wat het oefenen al heeft opgeleverd.

Voorbeeld 5

In plaats van de opgaven de schuld te geven van hun *taligheid* besloot een leraar van de bovenbouw met de leerlingen te verkennen wat het probleem zou kunnen zijn bij verschillende soorten opdrachten. De leerlingen kwamen via een paar coöperatieve werkvormen tot een rijtje tips en aandachtspunten. Daarop liet de leraar onderstaand lijstje (Montague, 2003) zien en vroeg de leerlingen hun tips te vergelijken met deze punten, met de vraag: bij welk punt horen welke tips?

- Lees de tekst.
- Vertel het met je eigen woorden na.
- Maak een voorstelling van het probleem: hoe ziet het eruit? (Op papier of in gedachten)
- Bedenk een plan om het op te lossen.
- Reken het uit.
- Controleer of je antwoord klopt met de tekst.

Toen hebben leraar en leerlingen de verschillende suggesties vergeleken en besproken en kwamen zo tot een nog concretere invulling. Daarmee mocht een groepje aan het werk om het voor de hele groep mooi en overzichtelijk digitaal vorm te geven. In de weken daarna mocht ieder deze stappen in de rekenles gebruiken, vaak door er met een maatje mee aan de slag te gaan. Deze *steiger* hielp veel leerlingen inderdaad om opgaven beter te lezen, goed te analyseren en ze systematisch aan te pakken. De kracht bleek achteraf vooral te zitten in het feit dat alle leerlingen hadden meegedacht en het zo dus hun eigen geheugensteuntje was geworden, dat ze allemaal snapten doordat het werkte bij hun eigen opgaven.

Het soort evaluatie waarbij leerlingen voor zichzelf een tussenstand opmaken heet formatieve evaluatie. Dit is typerend voor een manier van werken die een op groei gerichte *mindset* wil bevorderen. Bij formatieve evaluatie vergelijkt de leerling resultaten met eerdere resultaten van zichzelf: wat doe/weet ik nu al anders/meer dan vorige week en wat kost nog moeite en moet ik daarom nog verder oefenen? De leraar kan hier echte, nieuwsgierige vragen stellen, verbanden verhelderen, feedback geven op het proces, en zo de leerling laten merken dat het loont om actief te zijn: initiatief nemen, zelf nadenken, passende keuzes maken en doorzetten (Sitskoorn, 2016).
Wie zo te werk gaat zal merken dat leerlingen niet alleen volgens een vast patroon en steeds op dezelfde manier van elkaar verschillen. Telkens worden wisselende verschillen zichtbaar bij de diverse onderwerpen en in de fasen van de leerprocessen waarmee ze bezig zijn. Leerlingen zijn niet in alles zwak of sterk, snel of langzaam. Leerlingen zijn meer dan hun toetsscore. Bovendien, en dat is een niet te onderschatten belang, ervaren zo veel meer leerlingen dat rekenen boeiend en haalbaar kan zijn, ook voor hen.

Literatuur

Claxton, G., Chambers, M., Powell, G., Lucas, B. (2011) *The learning Powered School – Pionering 21st Century Education*. Bristol: TLO

Deci, E.L. & Ryan, R.M. (1985). *Intrinsic motivation and self-determination in human behavior.* New York: Plenum Press.

Deci, E.L. & Ryan, R.M. (2000). The 'what' and 'why' of goal pursuits: human needs and the self-determination of behavior. In: *Psychology Inquiry 11,* 227-268.

Dewey, J., (1916). *Democracy and education.* New York: The Macmillan Company. https://archive.org/details/democracyandedu00dewegoog

Dweck, C.S., (2006); *Mindset*. New York: Ballantine. https://www.gutenberg.org/ebooks/852

Dweck, C. (2015). https://www.youtube.com/watch?v=ZyAde4nIIm8

Montague, M. (2003). *Solve It! A mathematical problem-solving instructional program.* Reston, VA: Exceptional Innovations.

Sitskoorn, M. (2016). *Ik² – De beste versie van jezelf*. Deventer: Vakmedianet.

Wagner, T., & Dinthersmith, T. (2015). *Most likely to succeed preparing our kids for the innovation era.* New York: Scribner.

Verder kijken?

https://www.leraar24.nl/video/3045/handelingsgericht-werken-kindgesprek#tab=0

Zelfregulerend vermogen stimuleren in Getal & Ruimte Junior

Esther van Vroonhoven & Maaike van den Brink, Noordhoff Uitgevers

Inleiding

Kinderen zijn van nature nieuwsgierig en willen dingen uitzoeken, proberen en ervaren, zelfstandig keuzes maken en dus zelf doen en leren! Sturing vanuit leerkracht en ouders zorgt voor een goede basis, maar als deze sturing continu plaatsvindt, worden kinderen niet voorbereid op zelfstandig functioneren (Boom e.a., 2005). Het is daarom belangrijk om op school aandacht te besteden aan het zelfregulerend vermogen, ook in de rekenles.
Bij de ontwikkeling van de nieuwe reken-wiskundemethode van Noordhoff Uitgevers, *Getal & Ruimte Junior*, is veel aandacht besteed aan het zelfregulerend vermogen van leerlingen. In dit hoofdstuk geven we een doorkijkje.

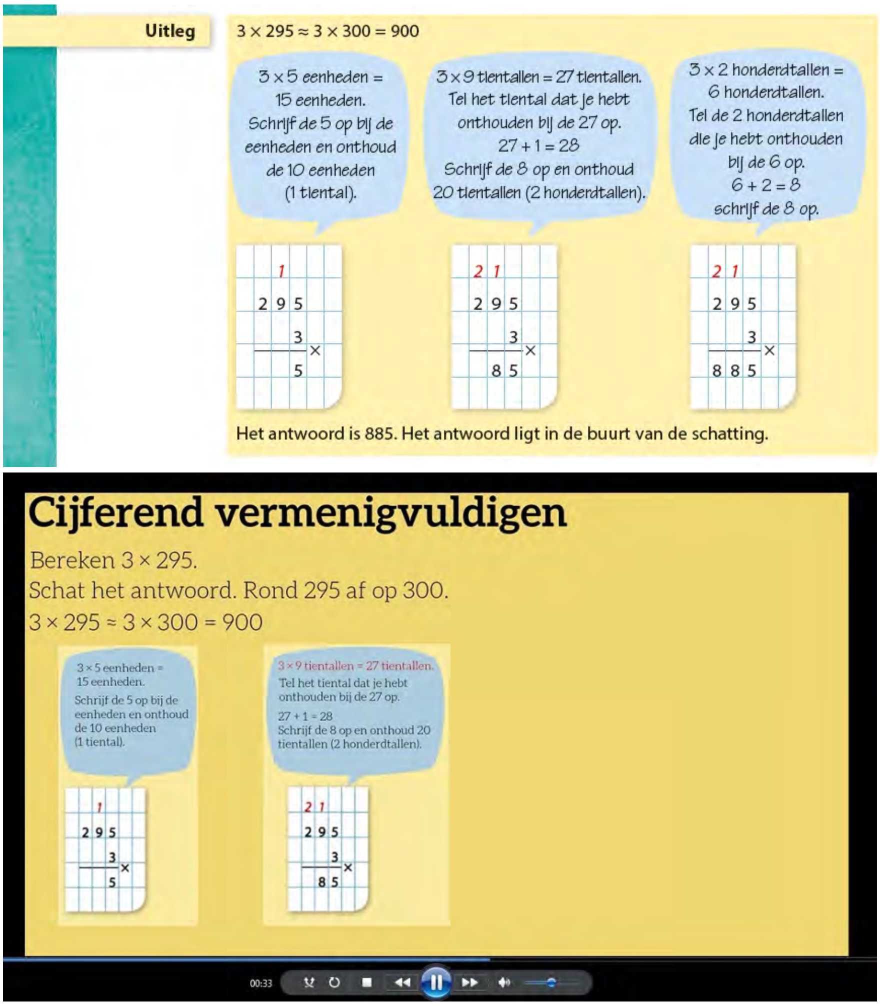
Zelfregulerend vermogen

Zelfregulerend vermogen is het vermogen om zelfstandig te handelen, rekening houdend met de eigen capaciteiten (Thijs, Fisser & Van der Hoeven, 2014). Daarbij draait het om:

- het stellen van doelen en prioritering aanbrengen;
- zichzelf kunnen motiveren voor een taak;
- het plannen van een taak;
- reflecteren op de uitvoering van de taak;
- inzicht hebben in het eigen kunnen en de ontwikkeling daarvan;
- verantwoordelijkheid nemen voor het eigen handelen en de consequenties daarvan.

Onderwijs dat expliciet aandacht besteedt aan het zelfregulerend vermogen van leerlingen, stimuleert leerlingen om eigen verantwoordelijkheid te nemen en meer zelfstandig taken uit te voeren. Voor leerlingen in het basisonderwijs is dat ook belangrijk. Eenmaal in de brugklas wordt ervan uitgegaan dat de leerlingen zelf hun huiswerk kunnen plannen en daarin prioritering kunnen aanbrengen.
De motivatie van een leerling is een belangrijke factor bij het bevorderen van het zelfregulerend vermogen. Succeservaringen, en de verwachting om zulke ervaringen op te doen, laten de motivatie stijgen (Wigfield & Eccles, 2000). Het is dus belangrijk dat leerlingen in de rekenles voldoende succeservaringen op kunnen doen. Naast motivatie als belangrijke factor, zijn er ook andere, externe factoren die zelfregulatie bevorderen, waaronder helderheid van de instructie en autonomie in de taak Boekaerts & Cascallar, 2006).
Bij de ontwikkeling van *Getal & Ruimte Junior*, is nadrukkelijk rekening gehouden met deze factoren. Zo is voor de leerling in het materiaal direct duidelijk wat van hem

verwacht wordt, doordat de leerling kan zien welke taken zelfstandig uitgevoerd kunnen of moeten worden. Daarnaast is iedere instructie voor de leerling beschikbaar in zijn boek en als animatie in de software (Afb. 1).



Afb.1. Instructie is beschikbaar en duidelijk herkenbaar voor de leerling in Getal & Ruimte Junior, zowel in het boek (boven) als digitaal (onder).

Try-outs lieten zien dat leerlingen het kunnen terugkijken erg fijn vinden. Ze kunnen zelfstandig aan de slag.

In de methode krijgt de leerling niet alleen leerstof aangeboden die bij een vaste niveaugroep (bijvoorbeeld zwak, gemiddeld, sterk) hoort. Uit onderzoek is namelijk gebleken dat verwachtingen van de leerkracht en indeling in vaste niveaugroepen invloed hebben op de prestaties van de leerlingen. Als een leerling in de ‘zwakke’ groep wordt geplaatst, is de kans groot dat hij zich daarnaar gaat gedragen, terwijl er misschien wel meer inzit. Het aanbieden van oefenstof op alle niveaus tijdens de zelfstandige verwerking, kan er dus voor zorgen dat kinderen meer het uit zichzelf halen. Getal & Ruimte Junior daagt de leerling bij iedere opdracht opnieuw uit een passend niveau te kiezen, met (soms onverwachte) succeservaringen tot gevolg. Het niveau is aangegeven met behulp van kleurverschil (Afb. 2).

We zien dat de leerlingen graag gebruikmaken van deze manier van differentiëren. De meeste leerlingen proberen ook nog even die moeilijke opgave uit. Regelmatig doet de leerling dan een succeservaring op en begint daarop breed te stralen. Natuurlijk lukt ook weleens iets niet. De leerkracht is hier de stimulans om te zorgen dat de leerling het maximale uit zichzelf weet te halen.

Reken uit en schrijf je berekening op.
Lotte en Sophie gaan winkelen.
Ze nemen elk € 20,- mee.
Na het winkelen hebben ze in totaal
nog € 5,20 over.

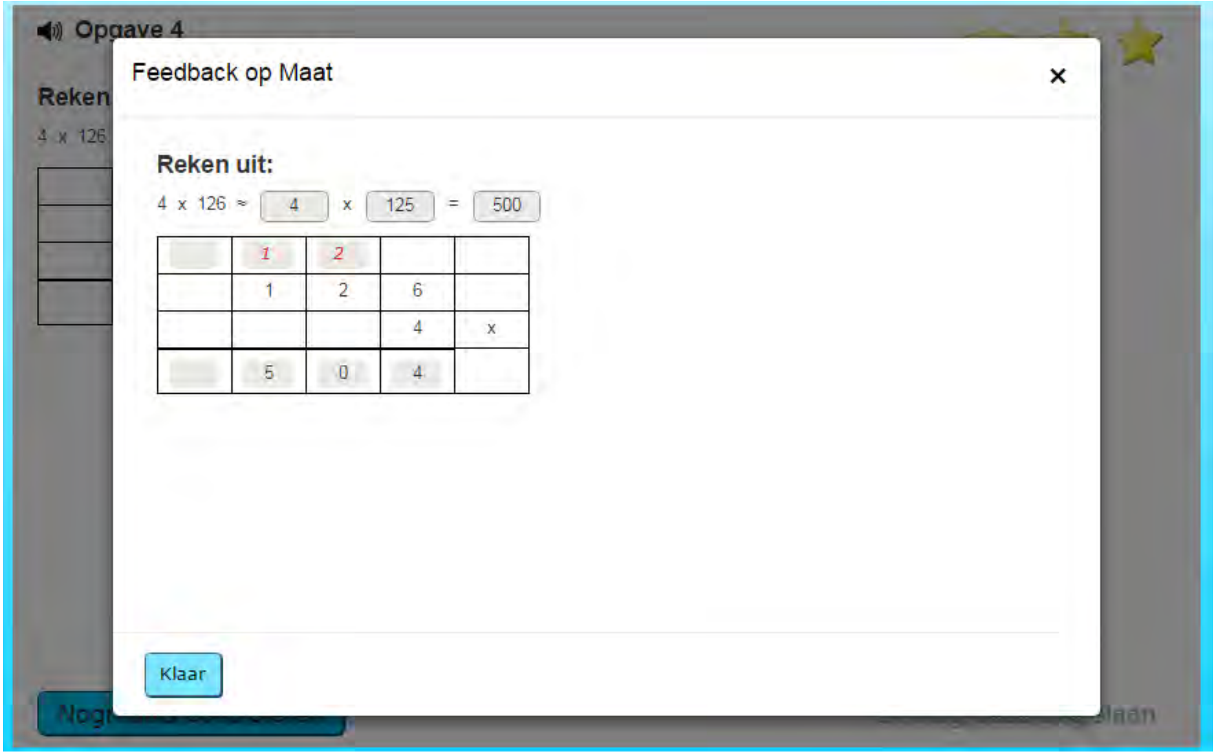
a Hoeveel geld hebben ze samen uitgegeven?
b Hoeveel is dat per persoon?

Afb. 2. In Getal & Ruimte Junior wordt gewerkt met zwarte en blauwe opgaven. De blauwe opgaven zijn vaak lastiger dan de zwarte opgaven en vormen bij elkaar een compacte leerroute.

ICT als hulpmiddel

Ook ICT kan een hulpmiddel zijn bij het ontwikkelen van zelfregulerend gedrag. Kennisnet (2013) stelt dat ICT de potentie heeft om bij te dragen aan meer motivatie en een efficiënter leerproces. De integratie van ICT in het onderwijs biedt mogelijkheden om meer in te spelen op de verschillen tussen leerlingen en het maximale uit iedere leerling te halen. Er is onderzoek gedaan naar de invloed van adaptieve digitale leermiddelen op de motivatie van leerlingen (Jansen e.a., 2013; Klinkenberg, Straatemeier & Maas, 2011). Uit deze onderzoeken kwam naar voren dat hoe meer succeservaringen leerlingen ervoeren, hoe gemotiveerder zij waren.
De digitale variant van Getal & Ruimte Junior is in een verkennend masteronderzoek onder de loep genomen (Van den Brink, 2016). Deze variant van de methode bevat digitale rekenopdrachten die op drie verschillende moeilijkheidsniveaus worden aangeboden. Het niveau van de opgave wordt bepaald aan de hand van het aantal goed gegeven antwoorden eraan voorafgaand. De leerlingen werken hierdoor automatisch op passend niveau. Bij het ene onderwerp kan dat het verdiepende niveau zijn en bij het andere onderwerp het basisniveau. Vaste niveaugroepen zijn er niet en leerlingen worden optimaal uitgedaagd. De leerlingen in de try-outs hadden snel door op welk niveau ze een opdracht aangeboden kregen en waren vaak blij verrast dat ze al zo goed konden rekenen.
Bij iedere opgave krijgen de leerlingen direct goed/fout-feedback en bij tweemaal een foute uitwerking krijgen de leerlingen stap voor stap te zien en te horen hoe deze specifieke opgave opgelost had kunnen worden (Afb. 3).
De leerlingen hoeven niet te wachten op hulp van de leerkracht, maar kunnen zelfstandig uitvinden wat ze niet goed begrepen hadden. Deze vorm van feedback noemen we Feedback op Maat. De opgedane kennis kunnen de leerlingen toepassen in de volgende opgave, die van hetzelfde niveau is, maar met andere getallen. Ze kunnen dus direct kijken of ze het nu wel begrijpen. In combinatie met

werken op het eigen niveau doen de leerlingen zo veel succeservaringen op, wat direct van hun gezichten af te lezen is. Het hierboven genoemde onderzoek liet zien dat de motivatie na de geteste lessen bij de leerlingen verhoogd was.



Afb.3. In de Feedback op Maat krijgt de leerling stap voor stap te zien hoe hij de opgave had kunnen oplossen. Deze animatie wordt ondersteund met audio.

De bij het onderzoek betrokken leraren zijn geïnterviewd (Van den Brink, 2016). Alle geïnterviewde leraren verwachten dat het inzetten van deze digitale rekenlessen het rekenonderwijs bij hen op school kan verbeteren of ondersteunen. Een voordeel dat zes van de tien leerkrachten noemen, is dat de leerlingen met de adaptieve digitale rekenmethode meer op een passend niveau werken. Daarnaast noemt de helft van de leerkrachten de Feedback op Maat die de leerlingen krijgen als voordeel: *Vond het ook een toegevoegde waarde dat wanneer de leerlingen een fout maakten dat ze meteen feedback kregen wat er fout was gegaan.* Een enkele leerkracht geeft aan te hopen hierdoor meer tijd over te houden om leerlingen op weg te helpen die dat nodig hebben: *… dat ze dan door konden. Vond ik heel prettig. Voor mezelf als leerkracht hoop ik in die zin tijd over te houden, waardoor je met die kinderen wat meer de diepte in kan op het moment dat dat gewenst is*.
Een ander positief punt dat de leerkrachten benoemen is het 'altijd een vinger aan de pols-gevoel'. Zij kunnen direct zien wat de leerlingen presteren en wanneer een leerling toch even vastloopt. Terwijl de leerlingen dus veel autonomie werd gegeven, met instructiefilmpjes en feedback op maat, heeft de leerkracht altijd overzicht.

Tot besluit

Een rekenles die de mogelijkheid biedt om op ieder onderwerp op het eigen niveau te kunnen werken en die daarnaast een heldere instructie biedt (die ook tijdens de verwerking beschikbaar blijft voor leerlingen), is aantrekkelijk voor zowel leerlingen als leerkrachten. In zo'n les ervaart de leerling veel autonomie en de leerkracht stimuleert de leerling om het maximale uit zichzelf te halen door de leerling niet in te delen in een vaste niveaugroep, maar steeds ook opdrachten aan te bieden die daar net boven liggen. De succeservaringen die een leerling hiermee opdoet, motiveren de leerling extra.

De digitale variant van Getal & Ruimte Junior ondersteunt het ontwikkelen van het zelfregulerend vermogen met instructiefilmpjes en Feedback Op Maat. Het verkennende onderzoek naar deze digitale variant liet na de geteste lessen een positieve veranderingen in de motivatie zien.

Informatie

In 2017 presenteert Noordhoff Uitgevers haar nieuwe rekenmethode Getal & Ruimte Junior. De methode is van dezelfde makers als de wiskundemethode van het voortgezet onderwijs: Getal & Ruimte. Vier lessen achter elkaar wordt gewerkt aan één onderwerp. Het toepassen in contexten wordt aangeboden met een stappenplan; volgens het drieslagmodel en het stappenplan uit Getal & Ruimte. De vijfde les is steeds herhaling van alle voorgaande basisvaardigheden.

Getal & Ruimte Junior is er zowel op papier als volledig digitaal. Een belangrijk kenmerk van Getal & Ruimte Junior is de uitgewerkte instructie, in de handleiding van de leerkracht, maar ook als uitleg(animatie) opgenomen in het leerlingenmateriaal. In de digitale variant is iedere opdracht voorzien van geanimeerde feedback, de zogenaamde Feedback op Maat.

Kijk voor meer informatie op de website www.getalenruimtejunior.nl.

Literatuur

Boekaerts, M., & Cascallar, E. (2006). How far have we moved toward the integration of theory and practice in self-regulation? *Educational Psychology Review, 18*, 199–210.

De Boom, W., Corstanje, P., Dijkstra, K., Den Dulk, H., Frouws, M., Hazes, R., …, De Wilt, M (2005). *De leraar als coach*. Apeldoorn/Antwerpen: Garant.

Jansen, B. R., Louwerse, J., Straatemeier, M., Van der Ven, S. H., Klinkenberg, S., & Van der Maas, H. L. (2013). The influence of experiencing success in math on math anxiety, perceived math competence, and math performance. *Learning and Individual Differences, 24*, 190-197.

Kennisnet (2013). *Vier in balans monitor 2013: De laatste stand van zaken van ict en onderwijs*. Zoetermeer: Kennisnet.

Klinkenberg, S., Straatemeier, M., & Van der Maas, H. L. J. (2011). Computer adaptive practice of maths ability using a new item response model for on the fly ability and difficulty estimation. *Computers & Education, 57*, 1813-1824.

Thijs, A., Fisser, P., & Van der Hoeven, M. (2014). *21e eeuwse vaardigheden in het curriculum van het funderend onderwijs.* Enschede: SLO.

Van den Brink, M. P. E. (2016). *Adaptief rekenonderwijs met ICT: Exploratief onderzoek naar het gebruik van een adaptieve digitale rekenmethode in het basisonderwijs*. Utrecht: Universiteit Utrecht (Masterscriptie).

Wigfield, A., & Eccles, J. S. (2000). Expectancy-value theory of achievement motivation. *Contemporary Educational Psychology, 25*, 68-81.

Creatief rekenen-wiskunde in de basisschool

Evelyn Kroesbergen, Universiteit Utrecht: Afdeling Educatie & Pedagogiek

Inleiding

Een van de belangrijkste doelen van het rekenen-wiskunde onderwijs is dat kinderen probleemoplossingsvaardigheden leren. Ze moeten in staat zijn om zelf oplossingen te bedenken voor een probleem dat ze nog niet eerder tegen zijn gekomen. De vraag is echter in hoeverre we dit in het reken-wiskunde onderwijs daadwerkelijk mogelijk maken. We leren kinderen vaak opgaven op te lossen waarvan het antwoord al bekend is. In hoeverre gaat het dan werkelijk om probleemoplossen? Vragen we niet vaak naar de bekende weg? Namelijk: los dit probleem op zoals je het hebt geleerd. Kinderen maken dan gebruik van strategieën of procedures die ze bij vergelijkbare opgaven hebben geleerd. Maar daarmee bereiden we kinderen onvoldoende voor op de problemen die ze in de toekomst gaan tegenkomen en waarvoor nog geen oplossingen voor handen zijn. Dan is het belangrijk dat kinderen over creatieve denkvaardigheden beschikken om zelf tot een oplossing te komen. In deze bijdrage willen we stilstaan bij wat *creatief denken* is in relatie tot rekenen-wiskunde, en hoe je die creativiteit kunt stimuleren in de klas.

Wat is creativiteit?

Creativiteit is niet alleen belangrijk binnen het rekenen-wiskunde onderwijs, maar ook in andere domeinen (Kaufman & Sternberg, 2010). Het betreft een domeinonafhankelijke vaardigheid, die lastig is te definiëren, maar in ieder geval betrekking heeft op het bedenken van iets nieuws. Originaliteit en effectiviteit zijn hierbij twee belangrijke componenten (Runco, 2004). Een belangrijk onderdeel van het creatieve proces is divergent denken: zoveel mogelijk oplossingen voor een probleem of antwoorden op een vraag bedenken. Om tot originele producten te komen, is het belangrijk dat je bestaande ideeën, kennis en ervaringen kunt combineren, en ook dat je je kunt voorstellen hoe die combinaties er uit zouden kunnen zien, om er één te kunnen kiezen om verder uit te werken.
In de dagelijkse praktijk wordt creativiteit vooral geassocieerd met kunst en muziek, en met de kunstvakken op school. We zien daarbij ook dat sommige kinderen veel creatiever zijn dan andere, wat vaak wordt toegeschreven aan een verschil in aanleg. In dit hoofdstuk gaat het om creatief *denken*. Ook daarbij zien we grote verschillen tussen kinderen. Een kind dat creatief denkt, zal bijvoorbeeld met originele oplossingen voor wiskundige vraagstukken komen, maar waarschijnlijk ook met originele producten bij de creatieve vakken; de verschillende vormen van creativiteit kunnen niet los van elkaar gezien worden. Het kan echter ook voorkomen dat een kind op bepaalde domeinen veel creatiever is dan op andere. Dit heeft natuurlijk te maken met de aanleg van het kind, maar zeker ook met de omgeving: in hoeverre creativiteit wordt gestimuleerd en het kind wordt uitgedaagd om zich creatief te uiten.

Verschillende onderzoeken hebben laten zien dat in de basisschoolleeftijd de creativiteit van kinderen steeds verder af lijkt te nemen (Claxton, Pannells, & Rhoads, 2005; Kim, 2011). De verklaring daarvoor is dat een cultuur van toetsen, met de nadruk op het goede antwoord, vaak tijdsgebonden, kinderen weinig ruimte geeft om alternatieve oplossingen te exploreren. De vraag is hoe de creativiteit van kinderen wel gestimuleerd kan worden. Voordat we hierop ingaan, zullen we eerst kijken hoe creativiteit binnen het rekenen-wiskunde vorm krijgt.

Creativiteit en rekenen-wiskunde

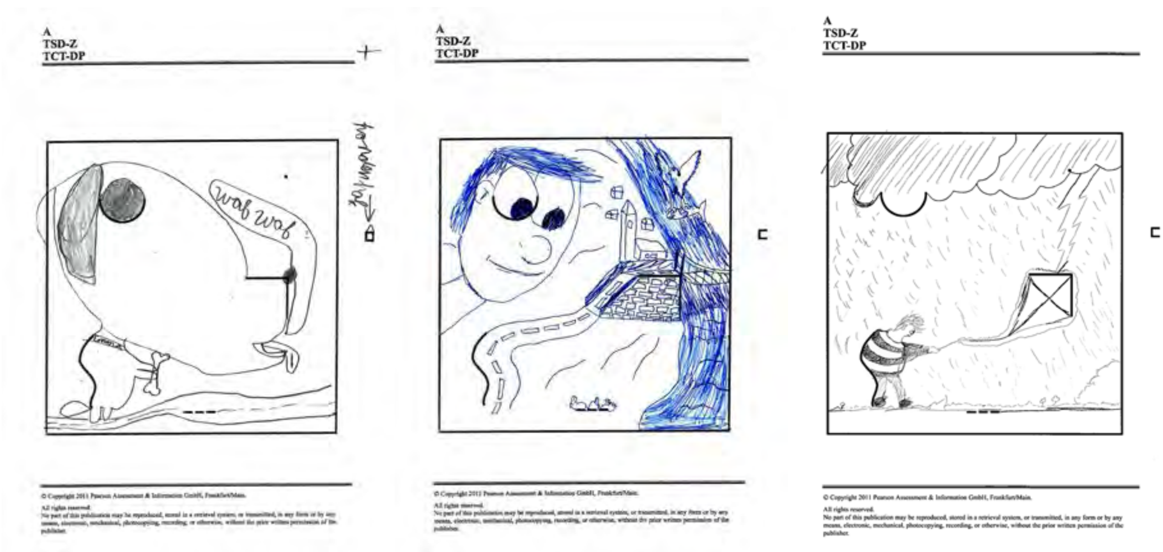
Rekenen-wiskunde is een domein gebaseerd op regels, procedures, algoritmes, feitenkennis. Je hebt kennis van deze feiten en regels nodig om goed te worden in rekenen-wiskunde, bijvoorbeeld $6 \times 7 = 42$. Als je dat als leerling nog niet weet, kun je wellicht een strategie gebruiken die je hebt geleerd, door te beginnen bij een vermenigvuldiging die je wel kent (bijv. 7×6 of 3×7). Op het eerste gezicht lijkt creativiteit misschien geen rol te spelen in het leren van dergelijke feiten of procedures. Toch is creativiteit juist binnen het domein van de reken-wiskunde belangrijk. Hier zijn verschillende redenen voor: (1) Als een kind op een creatieve manier naar oplossingen kan zoeken, verschillende manieren verkent en daarbij de relaties tussen getallen ontdekt, zal dat het inzicht in getallen en getalrelaties versterken en daarmee de rekenvaardigheid verbeteren; (2) Met een creatieve aanpak ben je beter in staat om nieuwe problemen op te lossen, waardoor je bijvoorbeeld in staat bent om ook de moeilijkste opgaven te maken, creativiteit is nodig voor excellente prestaties in rekenen-wiskunde; (3) Ervaring met het op creatieve wijze oplossen van reken-wiskunde problemen vergroot de algemene probleemoplossingsvaardigheden van het kind, en biedt daarmee een betere voorbereiding op de toekomst.
Wetenschappelijk onderzoek heeft inderdaad aangetoond dat creativiteit samenhangt met rekenvaardigheid (Kattou, Kontoyianni, Pitta-Pantazi, & Christou, 2013; Mann, 2006), en dat met name de excellente rekenaars zich onderscheiden van de gemiddelde rekenaars in hun creatieve denkvaardigheid (Leikin & Lev, 2007). Ook in Nederland hebben we gevonden dat bij leerlingen in groep 6 creativiteit een significant deel van de individuele verschillen tussen leerlingen in rekenvaardigheden verklaart, zelfs als er rekening wordt gehouden met verschillen in bijvoorbeeld intelligentie, werkgeheugen of getalbegrip (Kroesbergen & Schoevers, 2016).
Toch wordt creativiteit nog weinig gestimuleerd binnen de rekenles. Een nadruk op procedurele en feitenkennis, het *toepassen van de juiste strategie* kan zelfs het creatief denken belemmeren. Ook de houding van de leerkracht speelt hierin een belangrijke rol. Bevorderen van creatief denken vraagt dat een leerkracht de kinderen ruimte geeft om eigen oplossingsmanieren te ontdekken, ook als die in eerste instantie misschien over iets heel anders gaan. De dubbeldekbus die langs de school rijdt, kan een leerling bijvoorbeeld op een creatief idee brengen als hij een opgave aan het maken is over het vervoeren van veel mensen. Prikkels van buitenaf kunnen de creativiteit stimuleren, en moeten dus niet bij voorbaat afgeschermd worden.

Hoe meet je creativiteit?

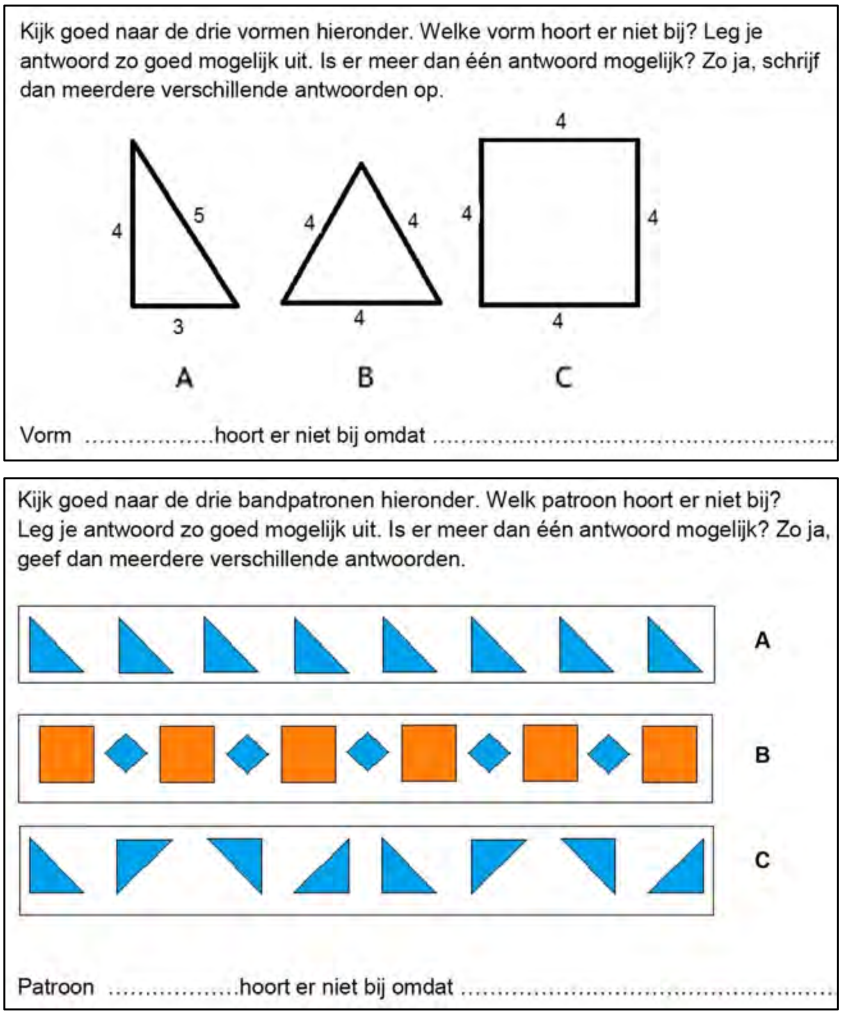
In wetenschappelijk onderzoek zijn verschillende manieren gebruikt om creativiteit te meten. Helaas zijn deze instrumenten nog maar heel beperkt te gebruiken in het onderwijs, vooral omdat de scoring van dit soort taken een complexe en tijdrovende aangelegenheid is. Toch worden er wel pogingen ondernomen, met als doel een instrument te ontwikkelen voor leerkrachten, zodat zij de vorderingen van hun leerlingen op deze manier kunnen volgen. We geven enkele voorbeelden van domeinonafhankelijke en domeinspecifieke taken waarmee je de creatieve denkvaardigheden van kinderen kunt meten. Een voorbeeld van een domeinonafhankelijke taak is bijvoorbeeld: bedenk zoveel mogelijk gebruiksmogelijkheden voor een lege doos (of een baksteen, een paperclip, enzovoort). Veel creativiteitstaken zijn hierop gebaseerd. Er wordt dan gekeken naar het aantal gebruiksmogelijkheden dat iemand noemt (*fluency*), hoe verschillend die antwoorden zijn (*flexibility*) en hoe origineel (*originality*). Een andere manier is de *Test for Creative Thinking – Drawing Production* (Urban & Jellen, 2010; zie ook Afb. 1), waarbij op veertien elementen gescoord wordt, waaronder het letterlijk *outside-the-box* tekenen, het verbinden van elementen, originaliteit, het gebruik van symbolen of humor). In Utrecht hebben we de *Mathematical Creativity Task* van Kattou en collega's (2013) vertaald en aangevuld met Meetkundige Creativiteitstaken (Schoevers & Kroesbergen, 2016) (Afb. 2). Ook deze taken worden gescoord op *fluency*, *flexibility* en *originality*.

Hoe stimuleer je creativiteit in de reken-wiskundeles?

Lange tijd is creativiteit gezien als iets mystieks, waarvan de ene leerling nu eenmaal meer heeft dan de ander. Recentere visie op creativiteit beschouwen het echter als iets dat je kunt aanleren (McWilliam, 2009) en verschillende creativiteitstrainingen zijn reeds ontwikkeld. Om creativiteit te stimuleren, moet allereerst een omgeving gecreëerd worden waarin het gestimuleerd wordt om risico's te nemen, regels/procedures ter discussie te stellen en je de ruimte krijgt om je gedachten de vrije loop te laten. Het is dan ook belangrijk kinderen open problemen aan te bieden waarin ze hiervoor de ruimte krijgen. Daarnaast kun je creativiteit ook direct trainen. Zowel het aanleren van specifieke vaardigheden als divergent denken, als het toepassen van deze vaardigheden in complexe, realistische problemen zijn effectief (Scott, Leritz, & Mumford, 2004). Daarbij werkt het het beste als kinderen kunnen samenwerken. Er zijn complete programma's beschikbaar, maar de eerste stappen zijn ook heel eenvoudig te zetten, door kinderen vaker uit te dagen om opgaven op meerdere manieren op te lossen. Dit is ook een hele goede oefening voor de betere leerlingen, omdat ze zo gedwongen worden eens op een heel andere manier naar de opgave te kijken, en ze op deze manier leren hun werk te controleren. Maar je kunt ook denken aan spelletjes zoals hoe je op verschillende manieren tot bijvoorbeeld het getal 91 kunt komen. Het gebruik van complexe, open opgaven, zeker als kinderen mogen samenwerken, is ook heel stimulerend. Denk bijvoorbeeld aan opgaven als op welke manier kunnen we het best/goedkoopst alle leerlingen van de school vervoeren naar Pretpark X (dit in tegenstelling tot een opgave als: er zijn 230



Afb. 1. Voorbeeldtekeningen uit eigen onderzoek (groep 6) van de Test for Creative Thinking - Drawing Production (TCT-DP; Urban & Jellen, 2010).



Afb. 2. Twee items uit de Mathematical Creativity Task (MCT; Schoevers & Kroesbergen, 2016).

kinderen op school, er kunnen er 50 in een bus, hoeveel bussen zijn er nodig). Bij al dit soort taken is de sfeer in de klas en de houding van de leerkracht het meest belangrijk: alternatieve strategieën (indien correct) moeten worden gestimuleerd en creatief denken moet worden gewaardeerd.

Voorbeeld onderzoek: Meetkunst

In 2015 is het Meetkunstproject[1] gestart (zie ook Wijers, Schoevers, Jonker, & Keijzer, 2016). In dit project worden de creatieve vaardigheden van leerlingen in groep 6/7 van het basisonderwijs gestimuleerd, met behulp van een programma gericht op zowel meetkunde als beeldend onderwijs. Het Meetkunst-project is een NRO-gefinancierd onderzoek, waarin zowel een lessenserie voor leerlingen als een nascholingsprogramma voor leerkrachten wordt ontwikkeld. Hoewel het onderzoek nog loopt en er nog weinig over de effecten van het programma gezegd kan worden, kunnen we al wel een tipje van de sluier oplichten om te laten zien hoe creativiteit in de rekenles, in dit geval de meetkundeles, ingezet kan worden.
Een gedeelte van de lessen is gewijd aan patronen. Kun je patronen herkennen in schilderijen? Kun je zelf een patroon maken? Wat zijn kenmerken van een patroon? Hoe voeg je bijvoorbeeld symmetrie toe? Een ander deel gaat over ruimte. In Wijers e.a. (2016) wordt een les beschreven waarin de leerlingen de opdracht kregen om zoveel mogelijk ruimte te vangen met één A4'tje. Kinderen gaan op zeer creatieve wijze om met deze opdrachten en het is leuk om te zien hoe ze op heel verschillende ideeën komen (zie Afb. 3). In een andere les wordt het begrip perspectief verder uitgewerkt, mede aan de hand van schilderijen. Waarom lijkt het ene voorwerp dichterbij en het andere verder weg? Hoe kun je dat zelf tekenen? De creativiteit wordt in deze lessen steeds gestimuleerd door kinderen een heel open opdracht te geven, waarin heel veel ruimte is om een eigen strategie te bedenken en te ontwikkelen en de kinderen uitgedaagd worden een probleem van verschillende kanten te bekijken.

Afb. 3. Voorbeelden van ruimte vangen.

Conclusie

Om kinderen voor te bereiden op het oplossen van problemen die ze in de toekomst tegen zullen komen, hebben zij een bepaalde mate van creatief denken nodig. In tegenstelling tot wat vroeger werd gedacht, is creatief denken heel goed aan te leren.

---

[1] Het Meetkunstproject wordt gefinancierd door de Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO), projectnummer 405-15-547. Zie ook het hoofdstuk van Karen de Moor.

Een belangrijk onderdeel hierbij is divergent denken: het kunnen bedenken van verschillende oplossingen bij een probleem. Natuurlijk volgt hierop ook een fase van convergent denken: selecteren, uitvoeren en controleren van de gekozen strategie. Om creatief denken in de rekenles te bevorderen, is het - naast een stimulerend klimaat – belangrijk dat kinderen leren om heel verschillende oplossingen bij een probleem / opgave te bedenken. Het gebruik van open opgaven en samen mogen werken met klasgenoten zal het creatief denken nog eens extra stimuleren.

Verder kijken?

Meetkunst: http://meetkunst.sites.uu.nl.

Literatuur

Claxton, A. F., Pannells, T. C., & Rhoads, P. A. (2005). Developmental trends in the creativity of school-age children. *Creativity Research Journal, 17,* 327-335.

Kattou, M., Kontoyianni, K., Pitta-Pantazi, D., & Christou, C. (2013). Connecting mathematical creativity to mathematical ability. *ZDM, 45,* 167-181.

Kaufman, J. C, & Sternberg, R. J. (2010). *Cambridge Handbook of Creativity*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Kim, K.H. (2011). The creativity crisis: The decrease in creative thinking scores on the Torrance Test for Creative Thinking. *Creative Research Journal, 23,* 285-295.

Kroesbergen, E. H., & Schoevers, E. M. (2016). *Domain general and domain specific creativity as predictor of mathematical ability.* Paper presented at MIC Conference, Bologna, Italy.

Leikin, R., & Lev, M. (2007, July). Multiple solution tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In *Proceedings of the 31st international conference for the psychology of mathematics education* (Vol. 3, pp. 161-168). Seoul, Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30,* 236-260. doi:10.4219/jeg-2006-264

McWilliam, E. (2009). Teaching for creativity: From sage to guide to meddler. *Asia Pacific Journal of Education, 29,* 281-293.

Runco, M.A. (2004). Creativity. *Annual Review of Psychology, 55,* 657–687.

Schoevers, E. M., & Kroesbergen, E. H. (2016). *Geometrical Creativity Task.* Utrecht University: Internal publication.

Scott , G., Leritz, L. E., & Mumford, M. (2004). The effectiveness of creativity training. *Creativity Research Journal, 16,* 361-388.

Urban, K. K., & Jellen, H. G. (2010). *Test for Creative Thinking - Drawing Production* (TCT-DP). Frankfurt am Main: Pearson Assessment & Information GmbH.

Wijers, M., Schoevers, E., Jonker, V., & Keijzer, R. (2016). Ruimte vangen: Meetkunde en kunst. *Volgens Bartjens, 36*(1), 8-11.

Kunst = taal en rekenen

Waar kunst- en rekenlessen elkaar ontmoeten

Karen de Moor, Museum Boijmans Van Beuningen

> *Het is toch vreemd dat scholen een gymzaal hebben waar je met je lijf mag wapperen, maar geen atelier waar je met je geest mag wapperen.* (Wolf Brinkman, kunstenaar)

Inleiding

Meester Wolf vertelt de leerlingen van groep 3 dat hij een bijzonder kunstwerk in het museum heeft zien hangen. Hij wil het de klas laten zien. Groot op het digibord verschijnt een heleboel wit met in het midden een piepklein vierkantje. *Dat is helemaal niets*, *Die foto is niet goed*, en *Je kunt het schilderij bijna niet zien*, reageren de kinderen bij het zien van deze eerste dia. Als de meester verbaasd vraagt wat er is misgegaan reageren de kinderen betrokken: *Meester, u heeft teveel stapjes naar achteren genomen*. Gelukkig heeft Wolf nog meer foto's gemaakt. De volgende foto toont het canvas van dichtbij. *Hé, het lijkt wel een beetje op mijn spijkerbroek*, zegt een meisje in de klas. *Er staat helemaal niets op*, zegt een ander. *U bent te dichtbij gaan staan*, concludeert een derde. De daaropvolgende foto's geven ook geen compleet beeld van het schilderij. Ze tonen de zijkant en de hoek van het doek. Wolf stelt voor dat hij in het museum nieuwe foto's zal gaan maken, die hij dan volgende week kan laten zien. *U moet ongeveer vijf stapjes van het kunstwerk af gaan staan*, beredeneren de kinderen samen.

Onderzoeken

In 2013 startte een samenwerking tussen kunstenaar Wolf Brinkman, de Fridjof Nansenschool in Rotterdam, OBS De Taaltuin in Schiedam en Museum Boijmans Van Beuningen, in de vorm van het Boijmans Taal- en rekenprogramma. Toen een aantal jaar geleden de nadruk binnen het primair onderwijs in Rotterdam sterk op taal en rekenen kwam te liggen, vroeg het museum zich af of kunst en taal/rekenen wel zulke gescheiden werelden zijn en of kunstonderwijs taal- en rekenvaardigheden misschien juist kan versterken. Samen met kunstenaar en scholen onderzocht het museum welke mogelijkheden kunst(onderwijs) biedt voor het reken- en taalonderwijs. Drie jaar lang gaf Wolf wekelijks kunstlessen aan vier klassen, twee op elk van de partnerscholen. Bron van inspiratie was de collectie van het museum. Wolf belichtte de werken vanuit zijn eigen fascinaties, interesse en perspectief en wist daarmee nieuwsgierigheid, conceptueel

Afb. 1. Mark Rohko, 'Grey, Orange on Maroon, No.8', 1960.

denken en onderzoekend vermogen bij leerlingen te stimuleren. In overleg met de leerkrachten kwamen verschillende taal-en rekenvaardigheden aan bod, maar was er ook veel aandacht voor onderwijsaspecten zoals zelf ontdekken, onderzoekend leren, verwonderen en samenwerken.
En zo startte Wolf met een aantal 'mislukte' foto's in de groepen 1-2 en 3-4 een lessenreeks waarbij tien weken lang Mark Rothko's schilderij *Grey, Orange on Maroon, No. 8* (Afb. 1) centraal stond. Met vaak zelfbedachte experimenten probeerden de kinderen antwoorden te vinden op de vragen van Wolf en die van henzelf. De kinderen probeerden met voeten, handen en hun hele lichaam, erachter te komen hoe groot het schilderij nu eigenlijk is. Hoe groot is hun eigen voet en hoe kom je daar achter? Hoe vaak past hun voet in het schilderij, of hun hele lijf? Uiteindelijk lag de hele klas op de grond, als een levend schilderij van Rothko. Zo groot moet het ongeveer zijn, de hele klas past er in (Afb. 2)! Niet veel later bezochten de leerlingen Museum Boijmans Van Beuningen en zien 'hun' schilderij van Rothko voor het eerst in het echt (Afb. 3).

Afb. 2. Kleuters van de Fridtjof Nansen school beelden het schilderij 'Grey, Orange on Maroon, No. 8' van Mark Rothko uit tijdens de Boijmans Taal- en rekenlessen in de klas (foto: Wolf Brinkman).

Afb. 3. Nadat ze wekenlang het schilderij zorgvuldig hebben onderzocht zien leerlingen van de Fridtjof Nansen school 'Grey, Orange on Maroon, No. 8' in het echt. Ook nu weer ontdekken ze nieuwe dingen in het kunstwerk (foto: Inèz Veldman).

Raakvlakken

Rekenen en kunst raken elkaar op veel vlakken, soms heel concreet. Zo heeft een kunstenaar in zijn werk regelmatig met allerlei rekenkundige en meetkundige zaken te maken. Toen perspectief in de vroege Renaissance werd uitgevonden, konden kunstenaars op vaak verbazingwekkende wijze de illusie van ruimte creëren. En net als perspectief en ruimte zijn vorm, maat, verhouding, compositie, tijd, beweging, constructie, patroon, ritme, enzovoort aspecten waar een kunstenaar mee speelt om tot een kunstwerk te komen. Deze begrippen spelen, soms nadrukkelijk en soms haast 'ongemerkt', een rol in de lessen van Wolf.

De ervaringen van Wolf Brinkman op de partnerscholen vormden de basis en inspiratie voor de taal-en rekenlessen die het museum ontwikkelde. Deze bestaan uit zowel lessen die schoolklassen in het museum kunnen volgen, als uit online materiaal dat leerkrachten zelf in de klas kunnen gebruiken.

Tijdens de museumles *Tijd* verkennen leerlingen het begrip tijd en onderzoeken ze diverse aspecten die daarmee te maken hebben. Wolf ging er eerder mee aan de slag in de klas, op verzoek van twee leerkrachten uit groep 5 en 6. Hoewel er vanaf groep 3 aandacht besteed wordt aan de klok, viel het hen op dat veel leerlingen er moeite mee bleven houden, zelfs nog in groep 8. De cultuurcoördinator van de school vulde aan: *Eigenlijk ook heel logisch, want hoe kun je een kalender of klok lezen als je geen idee hebt wat tijd eigenlijk is?* De kunstlessen boden ingangen om te filosoferen over het begrip tijd, de beleving van tijd en hoe je tijd kunt vastleggen of meten.

In de museumles *Tijd* staat telkens opnieuw de vraag *wat is tijd eigenlijk* centraal. Leerlingen ondervinden wat het betekent een minuut naar een kunstwerk te kijken. Duurt dat lang? Of juist kort? Vervolgens vergelijken ze dat met een minuut maaktijd: een opdracht waarin ze zelf een minuut krijgen om een cirkel te tekenen en in te kleuren. Ze vergelijken elkaars werkwijze met die van kunstenaars op zaal. *Als je heel precies werkt, dan duurt het ook langer*, concludeert een van de kinderen (Afb. 4).

In de zaal met archeologische voorwerpen zoeken ze naar een voorwerp waaraan duidelijk te zien is dat het oud is. Ze kiezen een lepel *want hij is niet zo glad meer* en *hij is kapot: er zit een klein gaatje in*, en *hij is een beetje gebogen*. In het bijschrift staat dat de lepel gemaakt is tussen 1700 en 1800. Hoe lang geleden is dat? De museumdocent rolt een meetlint uit over de vloer. *Stel nou dat de nul nu is, en iedere centimeter is een jaar. Waar moeten we dan de paperclip plaatsen van jullie geboortejaar?* De kinderen denken even na en besluiten dat hun geboortejaar ruim acht jaar geleden moet zijn, dus tussen de acht en de negen. Vervolgens plaatsen ze een paperclip hoe lang het geleden is dat hun opa geboren is. En waar moet nu de paperclip komen voor de lepel? *Dat past niet*, zegt een van de leerlingen. De museumdocent pakt er nog een meetlint bij en legt deze tegen de eerste aan. De leerling mag aanwijzen waar de paperclip van de lepel dan moet komen. *Hier ongeveer,* zegt hij opgewekt. *Ja, dat klopt wel zo'n beetje. Ongeveer 300 jaar geleden werd de lepel gemaakt*, vult de museumdocent aan. *We weten het dus niet helemaal precies, maar het zal inderdaad ergens aan het einde van het tweede meetlint geweest zijn*.

Afb. 4. Leerlingen bespreken in het museum de resultaten van één minuut tekenen en vergelijken dit met de schilderwijze van twee verschillende kunstenaars (Kandinsky en Mondriaan) waarvan kunstwerken in de zaal te zien zijn (foto: Elsje Miedema).

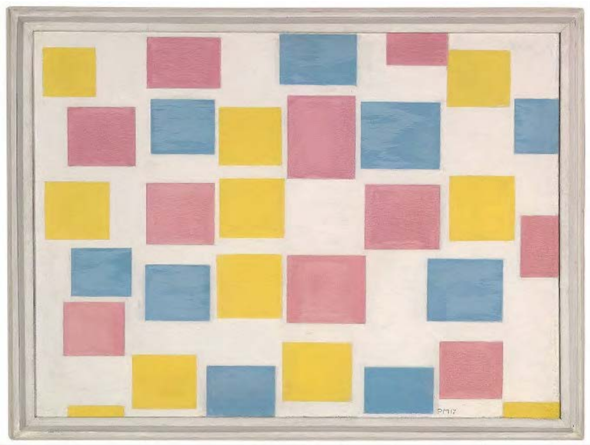
Proces

In zowel de museumlessen als in de lessen op school wordt niet het eindproduct, maar de weg er naar toe: het proces, centraal gesteld. Leerlingen onderzoeken op hun eigen manier, vanuit eigen interesses en vragen en op eigen tempo de problemen en vragen die Wolf hen voorlegt. Met vaak zelf bedachte experimenten proberen ze materialen uit. Hierdoor bewandelen de leerlingen niet allemaal hetzelfde pad; waar de één rechts gaat, slaat de ander links af. Ook het eindresultaat verschilt per leerling sterk. De leerkrachten waarmee Wolf samenwerkte, moesten daar in eerste instantie soms aan wennen. Maar al snel raakten ze overtuigd van de kracht van Wolfs lessen. Kinderen pasten op een voor hen passende manier diverse taal- en rekenvaardigheden en meetinstrumenten haast ongemerkt toe. *Het gaat heel erg om het proces,* zei een van de leerkrachten, *en het doel moet een beetje losgelaten worden. Hoe spannend is het om niet te weten waar je op uit komt? Niet iedere leerkracht kan dat denk ik, op een PABO leer je dat bijvoorbeeld niet*. De leerkracht is minder sturend, maar meer een begeleider die observeert, stimuleert en faciliteert.
Daarbij bleek dat de kunstlessen ook invloed hadden op de manier van leren van leerlingen. *Bij creativiteit gaat het niet alleen om goed kunnen tekenen, maar juist ook om denkprocessen waaruit leerlingen bepaalde leerstrategieën uithalen*, zag een leerkracht uit groep 5. Een andere leerkracht noemde de manier van werken holistisch leren: *Het gaat om zowel de inhoud als de manier waarop je leert, waarop je op je eigen manier de stof tot je neemt en steeds nieuwe ontdekkingen doet*.

Klodder

Wolf bekijkt samen met de leerlingen het schilderij *Lente in Vétheuil* van Claude Monet (Afb. 5). De kinderen krijgen eerst een detail te zien van een klodder uit het schilderij. Wat is een klodder eigenlijk? Kun je een klodder ook namaken? De kinderen gaan het proberen. En zo onderzoeken zij samen met Wolf allerlei aspecten van het kunstwerk. Of eigenlijk: ze *onderdekken*. De kinderen noemen zichzelf geen onderzoekers of ontdekkers, maar onderdekkers. Van klodders gaat het onderwerp over in patronen. Wat zijn patronen eigenlijk? In verschillende kunstwerken worden patronen ontdekt. Of juist niet. Zo zegt een leerling bij het zien van het schilderij *Compositie met kleurvlakjes* van Piet Mondriaan (Afb. 6): *Het was ooit een patroon, maar nu is het door elkaar*. Met de hele klas proberen ze samen een patroon te maken (Afb. 7). Goed overleggen en verwoorden is dan belangrijk. Er ontstaan patronen in alle soorten en maten. Een paar dagen na de les van Wolf steekt een kleuter in de klas zijn vinger op: *Juf, vandaag is ook een patroon, kijk maar. Eerst was er regen, toen zon, en nu weer regen*.

Afb. 5. Claude Monet, 'Lente in Vétheuil', 1880.



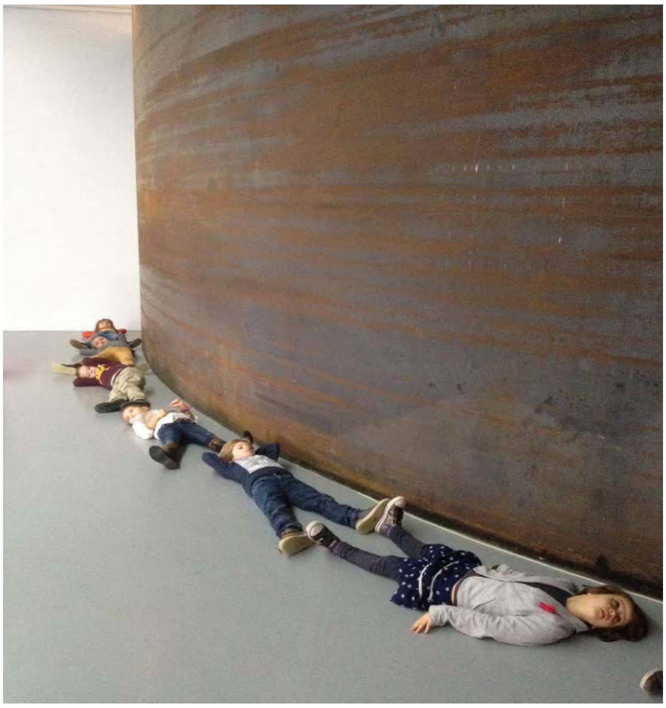
Afb. 6. Piet Mondriaan, 'Compositie met kleurvlakjes', 1917. Museum Boijmans Van Beuningen (foto: Studio Tromp, Rotterdam).

Leren door ervaren

Kunstlessen en museumbezoek kunnen een bijdrage leveren aan taal- en rekenvaardigheid, maar zijn ook belangrijk om de blik op de wereld te verbreden en creativiteit en tolerant denken te bevorderen. Diverse 21e eeuwse vaardigheden hebben een plek binnen het programma: samenwerking, kritisch denken, communicatie, flexibiliteit en de al eerder genoemde probleemoplossende vaardigheden en creativiteit. *De leerlingen bewegen zich vrijer*, merkte één van de leerkracht op. *Ze geven hun eigen mening en werken meer samen*. Een andere leerkracht noemde: *Een kleuter leert door ervaren, wat de afgelopen jaren verwaarloosd wordt in het onderwijs door druk van bovenaf. Ervaren met je lichaam, zo moet het. Kinderen die zich normaal laten ondersneeuwen staan nu op en nemen haast het voortouw*.

Kunstmaten is een museumles voor leerlingen van groep 3 en 4, waarin ervaren met je lichaam en zelf oplossingen aandragen een grote rol hebben. Ook in deze les wordt het onderzoekend vermogen van kinderen aangesproken. Bij de enorme sculptuur van Richard Serra, bestaande uit twee wanden, worden de kinderen eerst uitgenodigd om er eens omheen te lopen en het goed van verschillende kanten te bekijken. Wat gebeurt er als je er vanuit een andere hoek naar kijkt? Wat voor vormen herken je? *Het is hol en bol: allebei!* roept een leerling enthousiast. Zijn beide wanden precies hetzelfde? *Nee, die heeft meer bruin hier en bij de andere is het een beetje anders gekleurd*, merkt een van de kinderen op. En als je kijkt naar de vorm? Zijn ze even krom en even lang? En qua hoogte? De kinderen lopen er nog eens door- en omheen. De wanden zijn zo groot dat je niet in een keer in het geheel kan zien. Hoe zouden we daar nou achter kunnen komen? Een jongen steekt enthousiast zijn vinger op: *Ik weet het: we zetten ze tegen elkaar!* Een hele mooie manier om beide wanden te vergelijken natuurlijk, maar mag dat ook? Het is natuurlijk wel een kunstwerk. En zelfs als het zou mogen, zouden we wel sterk genoeg zijn om ze te verplaatsen? Na overleg bedenken de leerlingen een andere manier en besluiten ze te gaan meten. In een lange slinger gaan ze eerst naast de ene wand liggen en vervolgens langs de andere. Zijn de slingers die de kinderen maken langs de wanden precies even lang (Afb. 8)?

Afb. 7. Leerlingen van groep 4 van OBS De Taaltuin maken tijdens de lessen van meester Wolf samen één patroon: goed overleggen en verwoorden is dan belangrijk (foto: Wolf Brinkman).



Afb. 8. Wat is er nodig om de 'Wassende Bogen' van Richard Serra goed te kunnen meten? Leerlingen van OBS De Taaltuin proberen verschillende manieren uit (foto: Inèz Veldman).

Lesmateriaal ter inspiratie

Het Boijmans taal- en rekenprogramma wil leerkrachten inspireren en middelen aanreiken om hun lessen anders in te richten en tegelijkertijd kinderen met kunst en cultuur te laten kennismaken. Ook scholen die niet naar het museum kunnen komen, bijvoorbeeld omdat ze buiten de regio gevestigd zijn of de middelen niet hebben, wil het museum de gelegenheid bieden met de kunstwerken en aanpak aan de slag kunnen. Voor hen werden video's en lessuggesties voor in de klas ontwikkeld. Aan de hand van verschillende schilderijen wordt bijvoorbeeld het begrip perspectief uitgelegd of gaan kinderen op zoek naar de verschillende vormen die in het museum en in de kunst te vinden zijn.

Daarnaast ontwikkelde het museum samen met het Freudenthal Instituut voor rekenwiskundeonderwijs de nascholing *Meetkunst* voor leerkrachten die de verbinding zoeken tussen kunstonderwijs en rekenen-wiskunde. Bij deze nascholing hoort een onderzoek, uitgevoerd door de Universiteit Utrecht, waarin wordt bekeken welke invloed creatief probleemoplossend leren, zoals gestimuleerd binnen het Boijmans Taal- en Rekenprogramma, kan hebben op de rekenlessen in de klas. De nascholing reikt leerkrachten handvatten aan om die verbinding tot stand te brengen, de leerlingen meer ruimte te geven onderzoekend te leren en het proces meer centraal te stellen dan het eindproduct. In de eerste bijeenkomst worden de specifieke kenmerken besproken van de reguliere kunstlessen en daarnaast de lessen die die verbinding opzoeken. De tweede bijeenkomst vindt plaats in het museum en stelt kunstbeschouwing centraal: hoe kun je met leerlingen naar kunst kijken en waarom zou je het doen, wat kun je ermee bereiken? In de derde bijeenkomst wordt uitgebreid ingegaan op het begeleiden van creatieve processen. Hoe kan de leerkracht zich meer als begeleider en stimulator opstellen en hoe hou je het proces op gang? In de vierde bijeenkomst komt alles uit de eerste drie bijeenkomsten samen en wordt expliciet de verbinding gelegd met reken-wiskundelessen: hoe leg je verbindingen en hoe kun je ook weer beschouwen en het begeleiden van creatieve processen toepassen in een reken-wiskundeles?

De eerste nascholingsbijeenkomsten zijn inmiddels achter de rug. Leerkrachten proberen een aantal meetkunstlessen zelf uit. De ervaringen zijn positief. In alle groepjes was er grote betrokkenheid en een vorm van samenwerking. Tijdens het kijken naar kunst kwam een aantal prachtige uitspraken langs. Bij de vraag wat de hoogste toren op een schilderij is, zei een leerling bijvoorbeeld: *Ik kan meten met mijn ogen*, en tegelijk wees het kind met de armen op afstand. Een ander zei: *De toren rechts is hoger, want er zit een wolk boven en dus is die tot in de wolken*, en *De toren rechts staat misschien op een huis en dan kun je niet weten hoe hoog die is*.

Na drie jaar onderzoek sluit het museum dit avontuur niet af. De nascholing loopt door, het online lesmateriaal wordt uitgebreid en museumdocenten worden getraind om ook lessen(series) op scholen te geven. In februari 2017 verschijnt er een boek, waarin we samen met de scholen en de kunstenaar nader verslag doen van onze bijzondere ervaringen en bevindingen.

Verder lezen en kijken?

www.boijmans.nl
http://collectie.boijmans.nl
http://www.arttube.nl/nl/video/Boijmans/Taal_museum_Brinkman

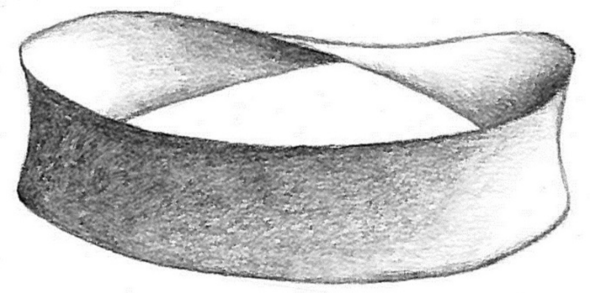
Wisknutselen in de klas: creatief met wiskunde

Florine Meijer, Wisknutsels

Inleiding

Creativiteit en wiskunde, gaat dat samen? Kan je wiskunde doen en tegelijk knippen en plakken, of haken, breien en borduren? Bij wiskunde denk je al gauw aan cijfers, formules en strenge regels. Meetkunde bijvoorbeeld gaat over een ideale wereld die alleen in onze gedachten bestaat, vol met praktisch onmogelijke figuren zoals kaarsrechte, oneindig lange lijnen zonder breedte en perfect gladde oppervlakken. Des te leuker is het dan om die strenge, kille wiskunde te combineren met alledaagse, tastbare materialen zoals gekleurd karton of zachte katoen.

Ik heb gemerkt dat het niet alleen heel leuk is om iets te (wis)knutselen, maar dat het ook helpt om wiskunde beter te begrijpen. Als je bijvoorbeeld een Möbiusband hebt gemaakt door van een strook papier een ring te maken door de uiteinden aan elkaar te plakken, maar eerst één van de uiteinden een halve slag te draaien (Afb. 1), en erop hebt geschreven (*dit is de voorkant van de Möbiusband, dit is de voorkant van de Möbiusband, dit is de voorkant van de…*), en je hem hebt doorgeknipt in de lengte, dan heb je een beter begrip van zo'n ding dan wanneer je alleen naar dit plaatje hebt gekeken.



Afb.1. Möbiusband.

Zo kwam ik ooit toevallig op het idee om een Möbius band te haken. Maak een ketting van lossen, en maak er een halve slag in voor je de band sluit. De eerste rij vasten komt dan aan de onderkant van die ketting, en als je een keer rond bent, kom je vanzelf aan de bovenkant uit. En als hij af is, zie je dat de voorkant en de achterkant van de band naast elkaar liggen.

In dit hoofdstuk deel ik drie voorbeelden van wisknutsels die geschikt zijn voor de basisschool: een kubus vlechten, de binnenstebuiten-kubus en een Pythagoras-puzzel. Veel (leer)plezier!

Kubus vlechten

Dit is een manier om kubussen (en andere driedimensionale objecten) te maken van papier. Het resultaat is vrij stevig en je kan goed variëren met verschillende kleuren.

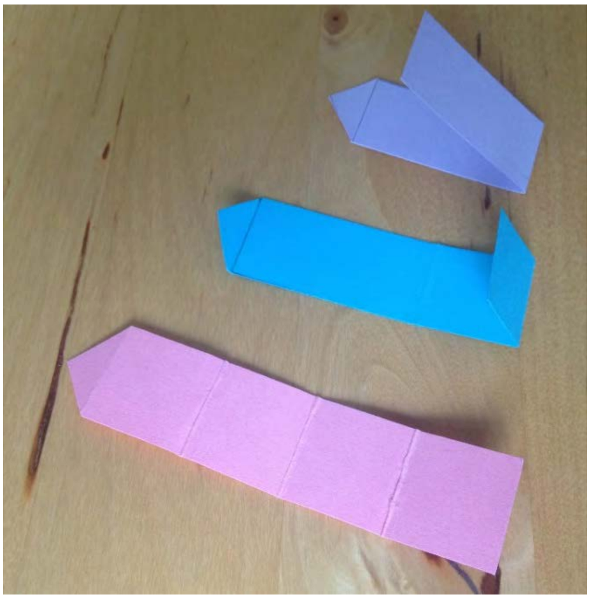
Om een eenvoudige kubus te vlechten heb je drie even grote stroken papier nodig. Neem drie verschillende kleuren, dan zie je goed wat je doet. De lengte van de strook is *iets meer dan* vier keer de breedte, plus een (klein) plakstrookje. Als je stroken precies vier keer zo lang zijn als breed, is het erg moeilijk vlechten, vooral bij wat dikker papier.

Stap 1

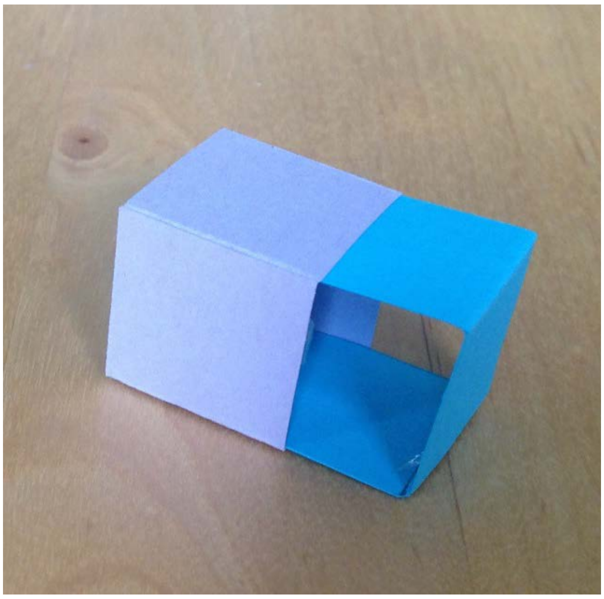
Vouw het plakstrookje om en vouw de overgebleven strook dubbel en weer open, en vouw de twee helften elk tot het midden. Je hebt nu een rij van vier vierkantjes en een plakstrookje (Afb. 2). Doe hetzelfde met de andere stroken.

Stap 2

Plak twee van de drie stroken tot een vierkante lus en schuif de een in de ander. Je hebt nu al een kubus, maar hij is nog niet stevig. Je ziet een kleur maar aan twee kanten, en de andere kleur, van de buitenste strook, aan vier kanten.



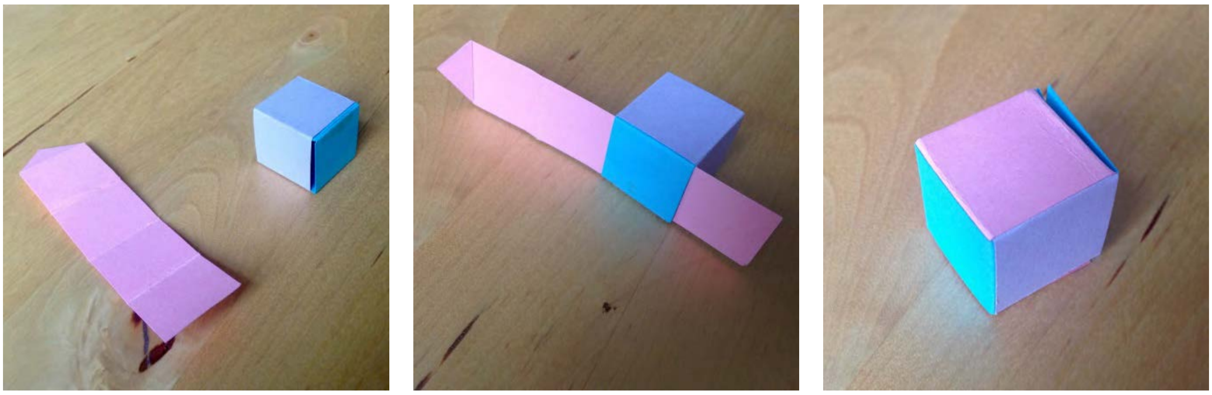
Afb. 2. Drie stroken.



Afb. 3. Twee vierkante lussen in elkaar.

Stap 3

De derde strook vlecht je nu tussen de andere stroken door: onder de binnenste door, en over de buitenste heen. Omdat je de vouwen al hebt gemaakt krijg je een stevige kubus met rechte hoeken.



Afb. 4. De kubus van drie stroken.

Klaar!

Je hebt nu een kubus in drie kleuren die elk op twee tegenoverliggende kanten zitten. Als je goed hebt opgelet, zie je dat elke strook zijn eigen richting heeft: eentje gaat van voor naar achter over de kubus heen, een ander gaat er van links naar rechts overheen, en de derde gaat via de zijkanten, van voor naar achter en terug.

Tip

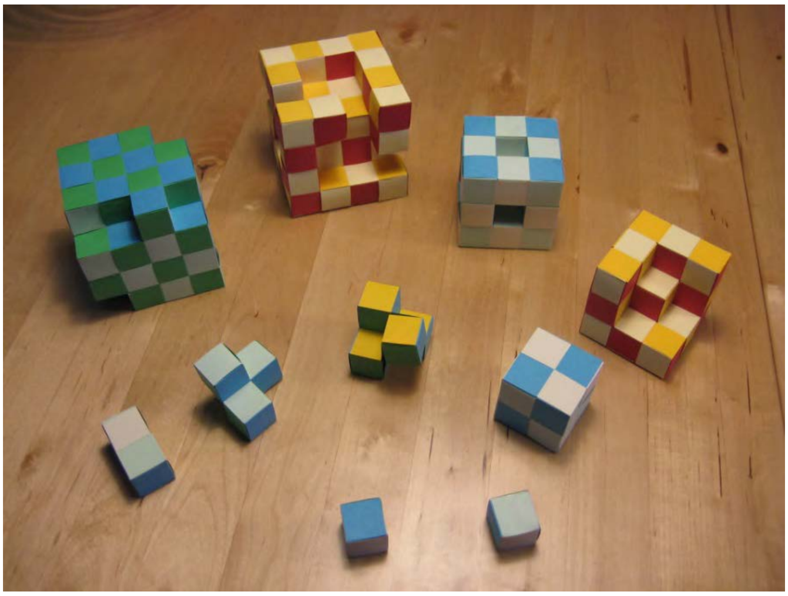
Zeker bij wat dikker papier, is het in elkaar zetten wat gemakkelijker als je de strook ietsje smaller maakt. De strook is dan iets langer dan vier keer de breedte. Het resultaat kan wel iets minder stevig worden.

Variaties

Kan je een grotere kubus maken van even brede stroken papier, bijvoorbeeld een die twee keer zo hoog, breed en diep is? Dan heb je van elk van de drie kleuren twee stroken nodig, die ook langer moeten zijn: elke strook gaat helemaal om de kubus heen dus is 2 + 2 + 2 + 2 = 8 vierkantjes lang, dus twee keer zo lang als de strook van de kleine kubus.
Hoe werkt dat dan met vlechten? In één richting (kleur) maak je de lussen al dicht, dan begin je met de stroken in de tweede richting, nog niet plakken, eerst vlechten: over de ene strook, onder de tweede, dan terug over de tweede en onder de eerste. Dan de derde richting; dat is het meeste gepriegel.

Kan je ook een balk maken, die bijvoorbeeld 5 centimeter breed is en 2,5 centimeter hoog en diep? Als je alle stroken even breed wil hebben, hoeveel heb je er dan nodig, en hoe lang zijn ze? Kan het ook met drie stroken die niet allemaal even breed zijn?

Als je het principe beheerst, zijn allerlei variaties mogelijk (Afb. 5).



Afb. 5. Blokjes afgeleid van de Fibonacci-reeks (zie https://wisknutsels.wordpress.com/).

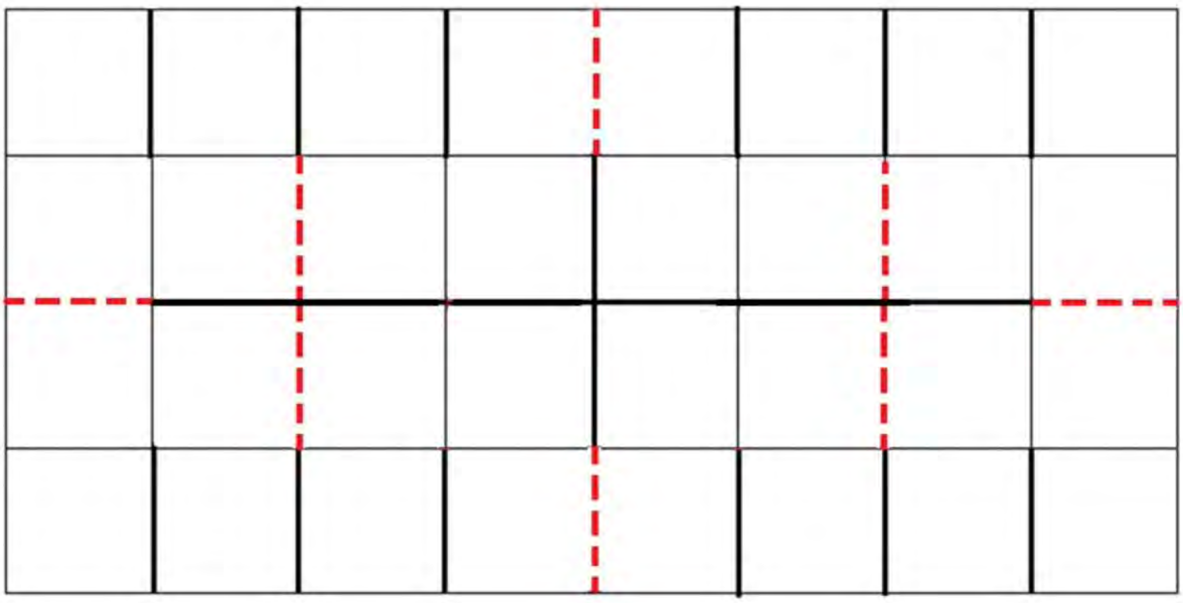
De binnenstebuiten-kubus

Een binnenstebuiten-kubus bestaat uit acht kubusjes die met de randen aan elkaar zitten, op zo'n manier dat je hem kunt uitvouwen tot een platte rechthoek en binnenstebuiten kunt keren (Afb. 6). Ze worden wel gemaakt als promotiemateriaal; er is er bijvoorbeeld eentje van Scala leuker leren, met rekenopgaven.

Afb. 6. Een filmpje hoe de binnenstebuiten-kubus werkt vind je op https://wisknutsels.wordpress.com/.

Stap 1

Knip of snijd de bouwplaat uit de bijlage bij dit hoofdstuk (Afb. 7) twee keer uit. De bouwplaat voor een helft van de kubus bestaat uit een rechthoek die twee keer zo lang is als breed, verdeeld in vier bij acht vierkanten. De lijnen tussen de vierkanten zijn vouwen of snijlijnen. De dikke lijnen zijn snijlijnen, die moet je losknippen of snijden, de lichte lijnen zijn bergvouwen en de stippellijnen zijn dalvouwen.



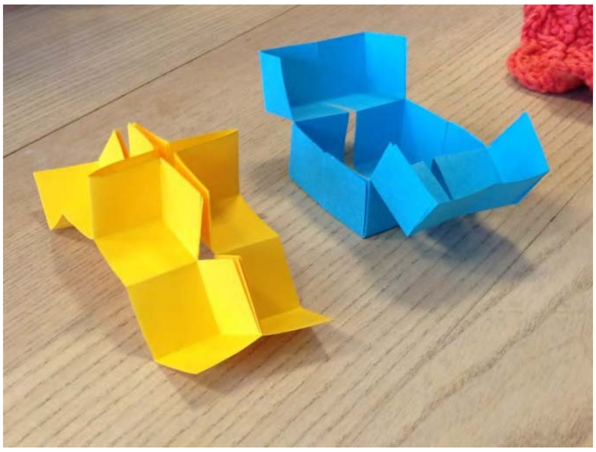
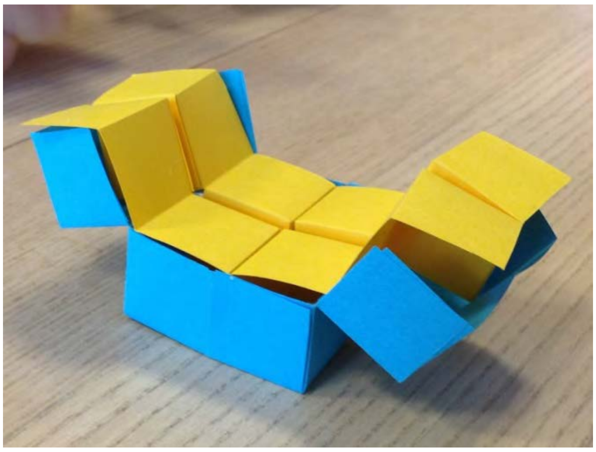
Afb. 7. Bouwplaat van de binnenstebuiten-kubus (zie ook de bijlage bij dit hoofdstuk).

Stap 2

Door op de aangegeven plaatsen twee vierkantjes op elkaar te vouwen en vast te plakken krijg je de acht hoeken van de kubus. Je kunt nu al een kubus vouwen, maar als je hem binnenstebuiten keert, zie je dat je de helft van de zijvlakjes mist. Dat binnenstebuiten keren moet je een beetje in de vingers krijgen, maar als je alle vouwen goed hebt gaat het vrij gemakkelijk. Tijdens het doordraaien zie je elke vorm (zoals de kubus) twee keer langskomen, maar de zijvlakjes die de ene keer open zijn, zijn de andere keer dicht.

Stap 3

Maak volgens hetzelfde bouwplan nog een helft, en draai die ook een paar keer binnenstebuiten. Zet tot slot de twee helften in twee bij elkaar passende vormen, en pas ze in elkaar. Dat lukte mij het gemakkelijkst met de trapvorm op de foto. Plak de twee helften (met plakband) aan elkaar.

Afb.8. De twee vormen zijn samen de binnenstebuitenkubus.

Stap 4

Versier je binnenstebuiten-kubus bijvoorbeeld met doorlopende tekeningen.

Pythagoras-puzzel: de stelling van Pythagoras bewijzen met een legpuzzel

Volgens de stelling van Pythagoras is het kwadraat van de lengte van de schuine zijde van een rechthoekige driehoek altijd gelijk aan de som van de kwadraten van de rechthoekszijden. Neem bijvoorbeeld een driehoek met rechthoekszijden van drie en vier centimeter. De kwadraten zijn negen en zestien, dat is samen vijfentwintig. De schuine zijde heeft dus lengte vijf (Afb. 9). Ofwel in het algemeen: $a^2 + b^2 = c^2$.

Er zijn enorm veel bewijzen van de stelling van Pythagoras, en een hele categorie daarbinnen zijn de puzzelstukjesbewijzen. Omdat je het kwadraat van een lengte kunt zien als de oppervlakte van een vierkant, zegt Pythagoras: het vierkant langs de lange zijde van de driehoek is even groot als de vierkanten langs de korte zijden samen.

Een puzzelstukjesbewijs laat dat zien door het grote vierkant uit dezelfde stukjes op te bouwen als de twee kleine. Deze Pythagoraspuzzel is daar een voorbeeld van.

Afb. 9. Een postzegel met een afbeelding van de stelling van Pythagoras.

Stap 1

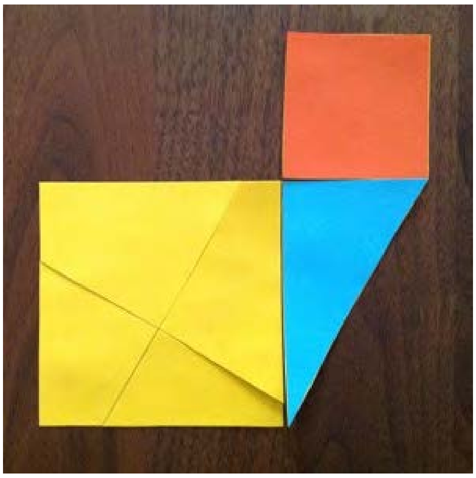
Knip een hoek van een vel papier zodat je een driehoek krijgt. Zorg dat de twee korte zijden niet (bijna) even lang zijn.

Stap 2

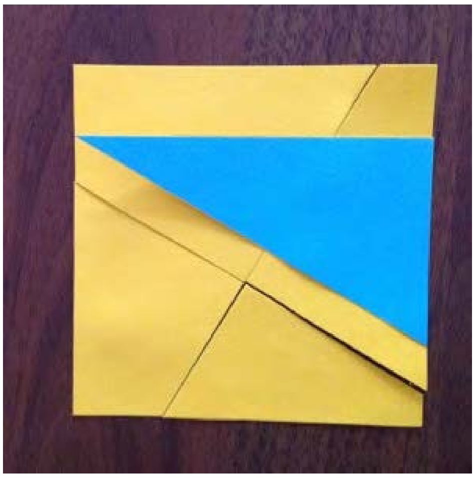
Teken twee vierkanten die precies langs de korte kanten van de driehoek passen, en knip ze uit (Afb 10).

Stap 3

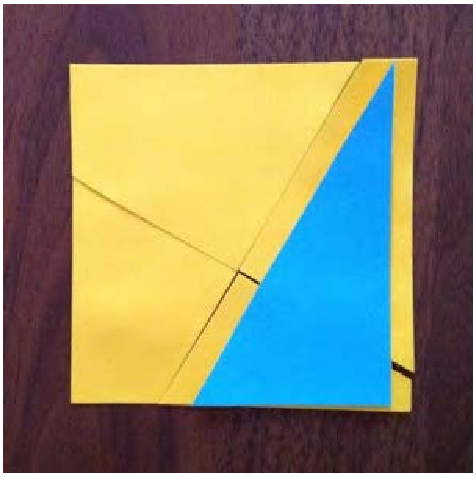
Leg de driehoek op het grootste vierkant, met de korte kant tegen een zijkant, en trek een lijn langs de schuine zijde. Draai de driehoek en trek nog zo’n lijn, loodrecht op de eerste. Knip het vierkant in vieren over deze lijnen (Afb. 11a en 11b).



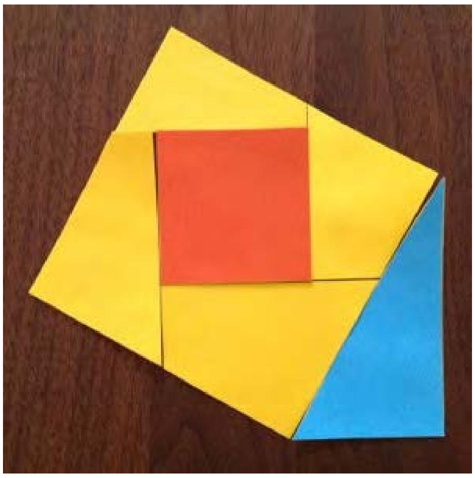
Afb. 10.



Afb. 11a.



Afb. 11b.



Afb. 12.

Klaar!

Met deze vijf stukken, het kleine vierkant en de vier delen van het andere, kun je een nieuw vierkant maken dat precies langs de schuine zijde van de driehoek past (Afb. 12).

Tip

Je kunt het grote vierkant versieren met een tekening of figuurtjes in de vier hoeken voor je het in vier stukken verdeelt. Dat maakt de puzzel gemakkelijker.

Doordenkvragen

Iedereen kan zijn eigen puzzel maken, met een eigen driehoek: die kunnen allemaal verschillend zijn, als ze maar een rechte hoek hebben. Ook bij met maken van de puzzelstukjes heb je vrijheid, maar hoeveel? De lijnen waarmee je in stap 3 het vierkant in stukken verdeelt moeten precies schuin genoeg lopen (evenwijdig aan de schuine zijde van de driehoek), maar maakt het ook uit waar ze precies beginnen? Moeten ze dwars over het vierkant lopen, naar de zijde aan de overkant, of hoeft dat niet?

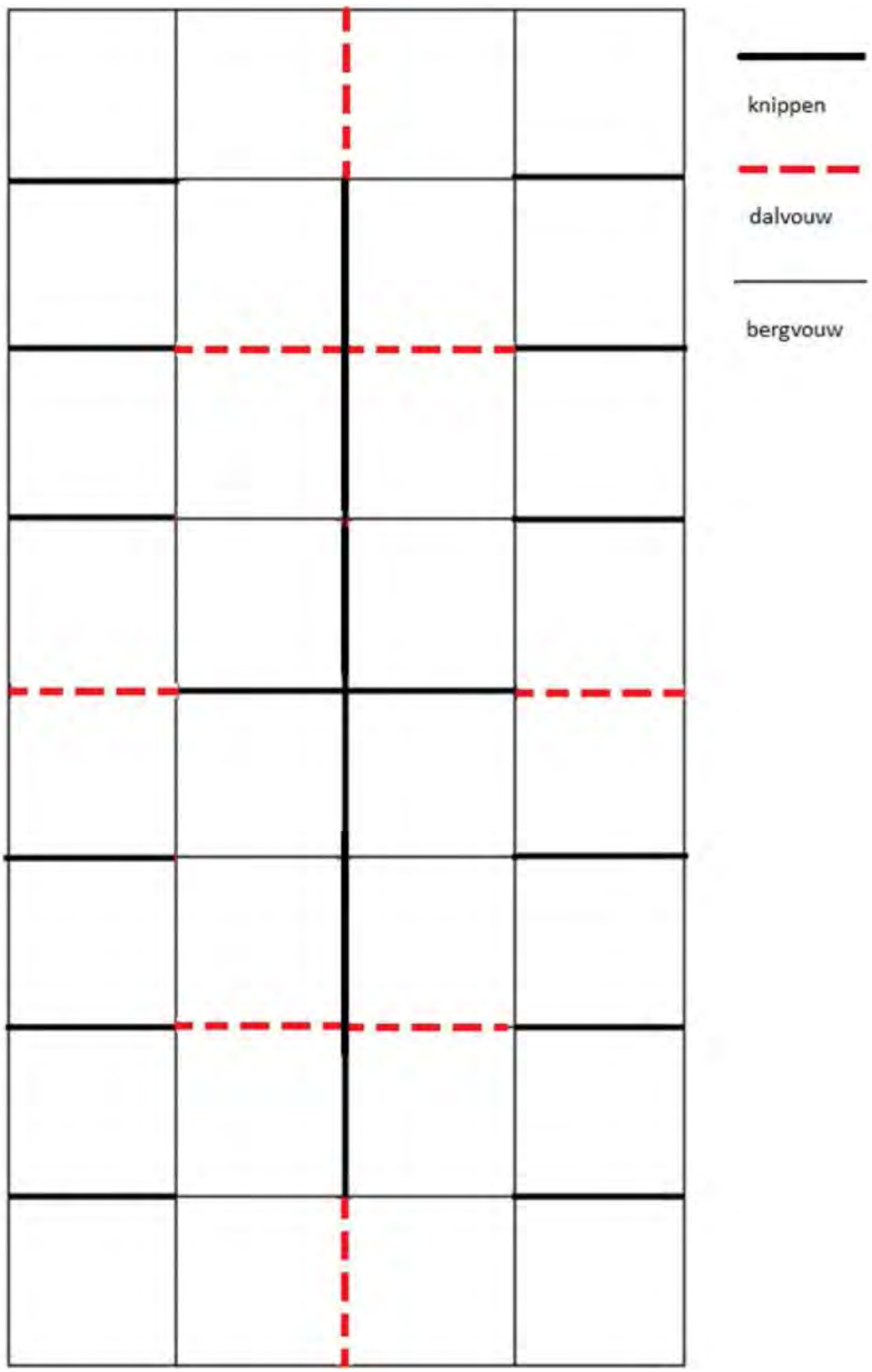
Voor sommige leerlingen kan het een leuke uitdaging zijn om een andere puzzel te ontwerpen die ook werkt als bewijs.

Meer wisknutselen?

Nog veel meer beschrijvingen van wisknutsels, waaronder bijvoorbeeld ook de gehaakte Möbius band, zijn te vinden op https://wisknutsels.wordpress.com/.

Bijlage bij *Wisknutselen in de klas*

Bouwplaat van de binnenstebuiten-kubus



Kunst knippen

Joyce Hiddink, Hildebrand- van Loonschool, Amsterdam

Inleiding

Groep 5 van de Hildebrand- van Loonschool deed in 2016 mee aan het onderzoek *Creatief en kritisch denken bij rekenen-wiskunde* van het Kohnstamm Instituut van de Universiteit van Amsterdam. In deze bijdrage deelt Joyce Hiddink een van de lessen die ze gaf in het kader van dit onderzoek.

In de les *Kunst knippen* (Schrover, 2014) bekijken de leerlingen een afbeelding van een kunstwerk heel precies en maken zij deze twee keer zo groot na. In de les gaat het om verschillende leerinhouden. In de eerste plaats biedt de les een oefening in goed, kritisch observeren. Qua rekenen-wiskunde gaat het om meten, vergroten en verhoudingsgewijs redeneren. Verder wordt in deze les gewerkt aan samenwerken en overleggen, omdat iedere leerling een bepaald stuk van het kunstwerk namaakt, wat goed moet aansluiten op de andere stukken die door andere leerlingen worden gemaakt.

Voorbereiding

Voor deze les heb je afbeeldingen van een of meerdere schilderijen nodig. Een afbeelding wordt in stroken geknipt en het moet duidelijk te zien zijn hoe deze stroken aan elkaar passen. Houd daar rekening mee bij het uitkiezen van de schilderijen.

Er is een goede afbeelding nodig om op het (digi)bord te tonen, om als voorbeeld te gebruiken en te bespreken met de leerlingen.

Per groepje leerlingen is een afbeelding van een schilderij nodig en dezelfde afbeelding in stroken geknipt (Afb. 1).

Verder heeft elke leerling een liniaal, tekenpapier, tekenpotlood, en kleurpotloden of ander kleurmateriaal nodig.

Afb. 1. Van Gogh, ‘Vissersboten op het strand van Les Saintes-Maries-de-la-Mer’, 1888.

Introductie

Goed nadenken begint met goed waarnemen. Precies kijken vraagt dat je soms als het ware je hersenen even stil moet houden, om écht te zien wat er is, en niet meteen aan te komen met wat je vooraf al denkt te weten wat iets is. Dat

is moeilijk, en dat zullen de leerlingen merken bij deze opdracht.
Bekijk met de leerlingen bijvoorbeeld het schilderij *Coquelicots* (Klaprozen) van Monet (Afb. 2). Hierop zie je een paar figuren in een veld met klaprozen. Bij *veld* heb je gemakkelijk de associatie met *gras* en *groen*. Maar als je goed kijkt, zie je dat grote stukken van het veld helemaal niet groen van kleur zijn; er zijn ook allerlei andere kleuren te zien. Dit is een voorbeeld van hoe, als je niet uitkijkt, dat wat je *denkt* te weten, je daadwerkelijke observatie kan beïnvloeden. Dit moeten leerlingen leren.
Het is niet erg als leerlingen in eerste instantie zeggen (denken) dat het grasveld groen is. Vraag ze dan preciezer te kijken naar bepaalde stukjes van het veld. Juist van de ervaring dat wanneer je preciezer kijkt, iets er anders uit kan blijken te zien dan dat je eerst dacht, is een goede leerervaring in deze les. Daarvan leer je anders en beter te kijken. Observeren met een *open mind*, dus zonder je eigen vooropgezette ideeën naar voren te schuiven, is de basis van goed nadenken en zelfs van wetenschap.

Afb. 2. Monet, 'Klaprozen', 1873.

Door gerichte vragen te stellen laat je de leerlingen goed kijken naar het schilderij. Vragen kunnen gaan over welke kleuren waar te zien zijn, wat de doorgaande lijnen en vormen zijn, waar het schilderij over gaat, en waarover je allemaal zou moeten overleggen als je in een groepje samen dit schilderij vergroot zou gaan natekenen, waarbij je elk een stuk doet.

Vergroten: verhoudingen en meten

De nieuwe afbeeldingen moet twee zo groot worden als het origineel, met dezelfde verhoudingen. Dat betekent dat alles in de lengte én in de breedte twee keer zo lang wordt (en dat de oppervlakte vier keer zo groot wordt). De leerlingen mogen zelf nadenken over hoe ze het kunnen aanpakken. Ze mogen een liniaal gebruiken om zaken op de afbeelding op te meten en om af te meten op hun eigen tekening hoe groot het daar moet worden. Een andere manier is om op de afbeelding een raster te tekenen en op de eigen tekening een raster waarvan de hokjes twee keer zo groot zijn. Dan kun je per hokje kijken en tekenen.
De leerlingen krijgen in groepjes van bijvoorbeeld vier of vijf een kaart met de afbeelding van een schilderij en dezelfde afbeelding in stroken geknipt. De leerlingen verdelen de stroken. Ze moeten goed kijken om de afbeelding goed vergroot na te tekenen en moeten ook goed samen overleggen om een mooie overgang te realiseren tussen de verschillende delen van de afbeelding.

Afb. 3. Goed meten en samen overleggen.

Afb. 4. Vincent van Gogh, 'De slaapkamer', 1888.

Nabespreken

Welke stroken (geen namen) zijn het best qua kleur? Qua grootte en aansluiting? Kunnen leerlingen ook iets zeggen over de sfeer van de afbeeldingen? Leerlingen vertellen hoe ze te werk zijn gegaan. U kunt ook bespreken wat er goed is gelukt bij deze opdracht en de leerlingen samen tips laten bedenken voor andere leerlingen die deze les gaan doen. Kunnen de leerlingen zelf vertellen wat ze geleerd hebben?

Literatuur

Schrover. E. (2014). *Het grote vooruitwerklabboek 2.* Nijmegen: Stichting Ontwikkeling Leermethoden.