HOOG-
BEGAAFD

ERICA DE GOEIJ

In het spoor van

Plusklas puzzelt met getallen

Erica de Goeij liet haar sterke rekenaars uit de plusklas van groep 5 en groep 8 kennismaken met het Vermoeden van Collatz. Doel van deze lessen was het puzzelen met getallen, maar vooral ook ruimte bieden aan de verwondering over het feit dat wiskundigen zich al decennialang buigen over schijnbaar eenvoudige rekenregels.

Regels in een getallenreeks

Op het bord schrijf ik de volgende getallenreeks:

6 – 3 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1

'Er zijn twee regels die in het tot stand komen van deze reeks een rol spelen. Welke?' vraag ik aan de sterke rekenaars uit de plusklas van groep 5. Wat de kinderen direct opvalt is dat er vaak de helft van een getal wordt genomen. We noemen het halveren 'regel 1' en we noteren een 1 onder de getallen waarvan de helft wordt genomen:

6	–	3	–	10	–	5	–	16	–	8	–	4	–	2	–	1
1				1				1		1		1		1		

De tweede regel is wat moeilijker te vinden. Jelle ontdekt dat zes en tien samen zestien is en dat drie en vijf bij elkaar opgeteld acht oplevert. Deze sommen zijn af te lezen door steeds één getal in de reeks over te slaan. Dat is interessant. We noemen dit voorlopig de 'regel van Jelle' en spreken af deze regel bij een volgende getallenreeks nog eens te controleren.

Lars heeft iets ontdekt over de getallen waarbij we nog geen regel hebben genoteerd. Als je drie keer drie doet en er één bij optelt, wordt het tien. En drie keer vijf, plus één leidt tot zestien. De tweede regel is ontdekt: keer drie, plus één. En dat alles in een heel korte tijd. 'Kunnen we nu ook precies formuleren wanneer we welke regel toepassen? Waarin verschillen drie en vijf van de rest van de getallen?' Het zijn oneven getallen. Dus: *bij even getallen halveren we en bij oneven getallen doen we keer drie, plus één*. Het getal één aan het einde van de getallenreeks blijft onbenoemd. Ik laat dat even zo om straks de verrassing des te groter te laten zijn.

In de plusklas van groep 8 leg ik dezelfde getallenreeks aan de leerlingen voor. Het duurt langer voordat beide regels worden ontdekt. Voor het halveren geldt dit niet, maar bij de tweede regel blijven de leerlingen hangen in de volgende ontdekkingen: 6 + 3 + 1 = 10 en 10 + 5 + 1 = 16. De leerlingen hebben meer tijd nodig om van deze ontdekking te komen tot 'keer drie, plus één'.

Wanneer stoppen?

We kiezen nu het getal zeven en gaan eens kijken wat er gebeurt als we de twee regels opnieuw toepassen.

Collatz

7 – 22 – 11 – 34 – 17 – 52 – 26 – 13 – 40 – 20 – 10 – 5 – 16 – 8 – 4 – 2 – 1 – 4 – 2 – 1 – 4 – 2 – 1 …

Wanneer moeten we nu stoppen met deze getallenreeks? In groep 8 ontstaat een discussie. De ene helft van de leerlingen vindt dat we moeten stoppen bij één, zoals we ook deden bij de reeks die startte met het getal zes. De andere helft is van mening dat de reeks nooit stopt; na één wordt de regel 'keer drie, plus één' toegepast, wat vier oplevert. Dit getal kunnen we weer halveren tot twee, dat we ook halveren tot één en dan is de cirkel weer rond. In groep 5 is geen sprake van discussie, maar vooral van heel veel plezier. De kinderen hebben zich laten verrassen, of liever gezegd laten verwonderen, door het oneindige karakter van de reeks. We controleren nog even de 'regel van Jelle'. Gaat die hier ook op? We tellen zeven en elf bij elkaar op en komen helaas niet op zeventien uit. Ook 22 en 34 leveren samen geen 52 op. Het antwoord ligt wel in de buurt, maar dat is helaas niet genoeg om een regel te kunnen zijn.

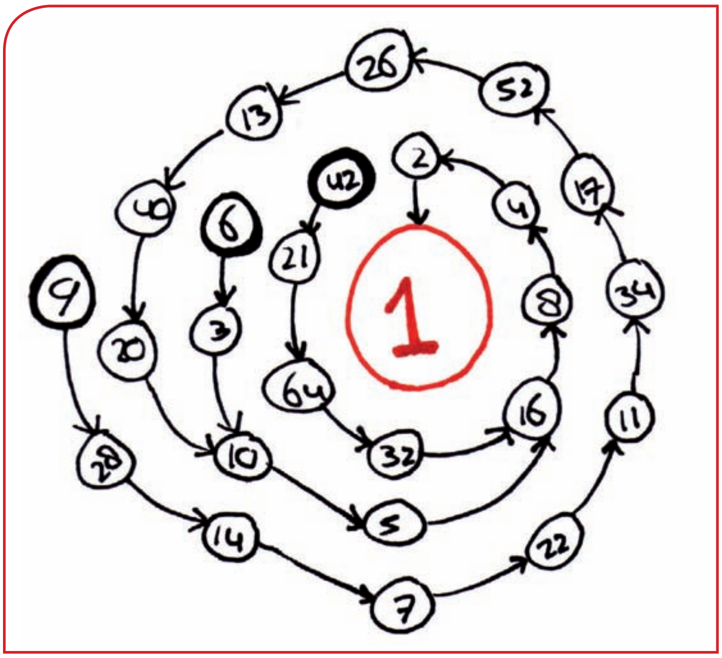
Op zoek naar sporen

Om met de kinderen uit te zoeken of de hiervoor beschreven regels vaker leiden tot een reeks die uitkomt bij het getal één, gebruik ik twee verschillende aanpakken. In groep 8 laat ik de kinderen kiezen uit een paar getallen: 9, 12, 15, 17 en 20. In groep 5 kiezen de kinderen, bij wijze van experiment, zelf startgetallen uit. Voordeel van de eerste aanpak is, dat je als leerkracht kunt bepalen dat er alleen getallen tussen zitten die tot een getallenreeks met een redelijk aantal berekeningen leiden. Ander voordeel is dat de leerlingen uit het rijtje getallen heel bewuste keuzes kunnen maken. Jaimy en Lukas zagen bijvoorbeeld dat het handig was om twaalf te kiezen. Na twaalf kom je door halvering namelijk op zes uit en dan is de reeks van het bord (zie de start van dit artikel) zo over te schrijven. De getallen negen, vijftien en zeventien hebben allemaal op een gegeven moment het getal twintig in hun reeks zitten. Wie dat ontdekt, kan de reeks bij het startgetal twintig ook gewoon overschrijven. Ook groep 5 ontdekt dit. Eva werkt bijvoorbeeld na het startgetal zeven de reeks die start met het getal negen uit. Als ze weer op het getal zeventien uitkomt, ziet ze dat ze het vervolg kan overnemen uit de reeks met het startgetal zeven en zegt: 'Kijk, ik kom nu weer op hetzelfde spoor uit.' Vanaf nu is het voor Eva alleen nog maar zoeken naar overeenkomstige sporen.

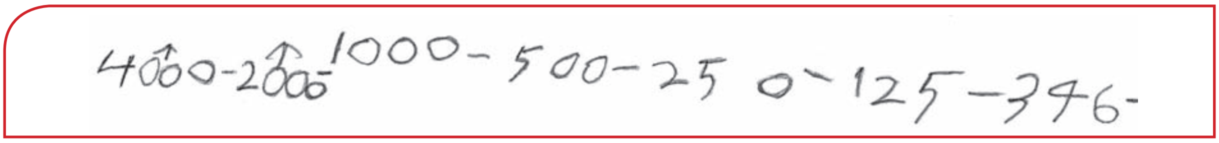
Leiden alle sporen naar één?

Op de website van de wiskundemeisjes[1] (www.wiskundemeisjes.nl) is afbeelding 1 te vinden. Het bleek een aardige opdracht om samen met de kinderen in deze weergave ook het idee van de sporen te ontdekken.

Van de sporen terug naar de vraag of alle gekozen startgetallen een reeks opleveren die uitkomt op één. Job heeft als startgetal 101 gekozen. En ja hoor, ook hij sluit de reeks af met het getal één. De verwondering doet zich opnieuw voor. Zal het dan écht *altijd* zo zijn? Jelle kiest voor het startgetal 1000. Ook hij is benieuwd of we dan op één uitkomen. Als hij ziet dat Thijs en Lars zijn idee overnemen, vreest hij voor zijn uniciteit en plakt hij



1. Een mooi spoor



2. De reeks van Jelle

voor de 1000 het getal 2000 en daarvoor het getal 4000 (een stuk van de getallenreeks is te zien in afbeelding 2). Hiermee is de basis gelegd voor een mooie vervolgopdracht ... En ja, ook met startgetal 4000 leidt de getallenreeks tot het uiteindelijke getal één.

Het vermoeden van Collatz

Neem een willekeurig geheel getal n.
Als n even is: deel n door twee. Als n oneven is: vermenigvuldig n met drie en tel er één bij op.

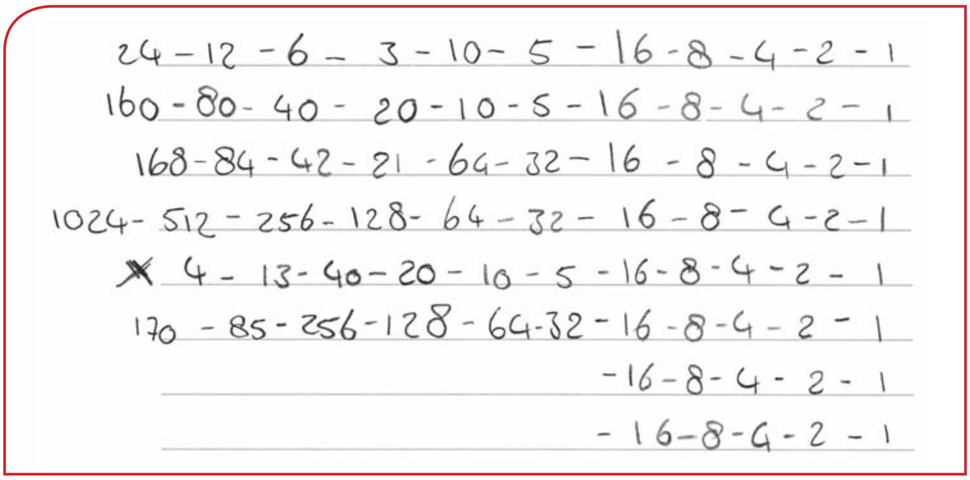
Het vermoeden van Collatz zegt dat welk geheel getal je ook kiest, *n* uiteindelijk altijd één wordt. Het was Lothar Collatz die in 1937 dit vermoeden als eerste heeft geformuleerd en tot op heden is het vermoeden van Collatz nog niet bevestigd of weerlegd. 'Als je getal kleiner is dan 10^{18} dan kom je zeker op één uit, tot die grens is het vermoeden namelijk met de computer getest. ... De meeste wiskundigen denken dat het vermoeden van Collatz waar is en dat je inderdaad voor elk getal bij één zult eindigen. Maar niemand heeft een bewijs', zo schrijven de wiskundemeisjes in hun nieuwe publicatie '*Ik was altijd heel slecht in wiskunde*' (Daems & Smeets, 2011). In de plusklas van groep 5 en 8 hebben we ervaren dat onze gekozen startgetallen inderdaad tot het getal één leiden. Echter, we weten niet zeker of het ook voor alle startgetallen geldt. We gaan de getallenreeks van Collatz daarom nog maar eens benutten om een paar mooie puzzelachtige problemen op te lossen.

Redeneren met getallenreeksen

De opdracht aan de leerlingen van groep 5 en 8 luidt als volgt: *Er zijn vier startgetallen die na zeven berekeningen op één uitkomen. Hoe kun je erachter komen welke vier getallen dit zijn?* Eigenlijk hebben alle leerlingen al snel door dat het laatste stuk van de getallenreeks er steeds hetzelfde uitziet: 16 – 8 – 4 – 2 – 1. Voor de acht kan namelijk niets anders staan dan het getal zestien. Via halveren van zestien kom je op acht. Er is echter geen geheel getal te vinden dat na vermenigvuldigen met drie en plus één ook op acht uitkomt. Voor de getallen die na de acht volgen, kunnen we dezelfde redenering opvoeren. De laatste vijf getallen in de reeks zijn dus altijd identiek. Maar op de plek vóór het getal zestien zijn twee mogelijkheden. Daar kan 32 staan, dat na halveren tot zestien leidt. En er kan het getal vijf staan. Vervolgens is de vraag wat er voor vijf en 32 kan staan. Al doorredenerend van achter naar voren komen we tot vier startgetallen die na zeven berekeningen op het getal één uitkomen: 3, 20, 21 en 128.
In groep 8 gaan we nog even door met de volgende vraag: *Hoeveel getallen leiden na tien berekeningen tot het getal één? Hoe kun je dit zeker weten?* Opnieuw maken we gebruik van het terugredeneren. We hebben dit nodig om er zeker van te zijn dat we alle startgetallen die aan deze eis voldoen hebben gevonden. Jaimy gebruikt de vier vondsten bij het vorige probleem en redeneert daarvandaan nog een aantal keren terug. Andere kinderen beginnen helemaal opnieuw. Opvallend is dat de meeste kinderen wel tot zes startgetallen komen, maar dat ze niet kunnen verwoorden waarom ze zeker weten dat het alle mogelijkheden zijn. De leerlingen vinden het ook lastig structuur aan te brengen in hun denken en in hun notatie. We kwamen dit eerder tegen in probleemstellingen rond combinatoriek (Bank & De Goeij, 2011).

Terugredeneren en handig noteren

In afbeelding 3 zien we hoe Maartje tot een oplossing komt. Haar uitwerking is nog niet compleet. Omdat de getallenreeksen er vanaf zestien steeds weer hetzelfde uitzien, heeft ze 16 – 8 – 4 – 2 – 1 alvast acht keer genoteerd zonder dat ze weet hoeveel ze ervan nodig heeft. Dan begint het terugredeneren. Maartje noteert ook van rechts naar



3. De oplossing van Maartje

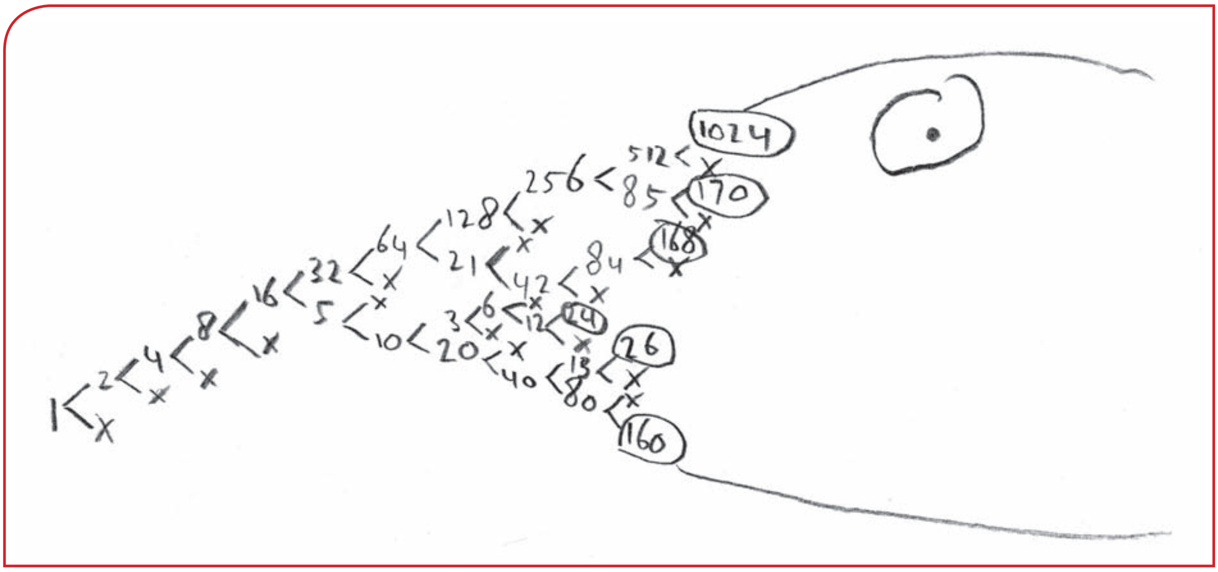
links. Voor de zestien kan een vijf staan en daarvoor een tien. Voor de tien kan twintig staan, maar ook drie. Zo ontstaan al twee versies. Op deze manier redeneert Maartje verder en begint ze voor elke nieuwe versie een nieuwe regel. Als in een reeks tien streepjes staan, kan ze stoppen. Bij Maartje is mooi te zien dat je via deze weg ook op getallenreeksen kunt komen die niet voldoen aan de gestelde regels. Als je terugredeneert kan voor het getal dertien 26 staan, maar ook het getal vier. Vier vermenigvuldigen met drie en één erbij optellen levert immers ook dertien op. Maar redeneren we van links naar rechts, dan zouden we vier moeten halveren. Die reeks doet dus niet mee, vandaar het kruisje ervoor.

Uit het werk van Maartje is nog moeilijk af te leiden of ook alle oplossingen worden gevonden. De notatie helpt ter plekke bij het redeneren, maar het is moeilijk te achterhalen of het geheel compleet is. Menno kiest (met hulp) voor de boomdiagram (afbeelding 4). Telkens bepaalt hij per getal wat eraan vooraf kan zijn gegaan. Als er alleen kan worden verdubbeld, noteert hij op de plek van regel 2 (keer drie, plus één; ofwel terugredenerend min één, gedeeld door drie) een kruisje. Zo sluit hij reeksen uit. Menno noteert van links naar rechts, dus eigenlijk tegen de richting van de reeks in. Na tien stappen stopt hij en kan hij de mogelijke startgetallen aflezen. Deze notatie past mooi bij het bewijs dat hij alle mogelijke startgetallen heeft gevonden. En nog een bijzondere bijkomstigheid; met een beetje fantasie kun je er een snavel van een vogel in zien.

Maud is in de ban geraakt van het vermoeden van Collatz. Zij kan zich eigenlijk niet zo goed voorstellen dat zo'n schijnbaar simpel vermoeden door wiskundigen niet kan worden bewezen of verworpen. Via internet komt Maud terecht op een site met nog meer wiskundige vermoedens. Ze ziet dat elke vier jaar een onderscheiding wordt uitgereikt aan enkele wiskundigen die een belangrijk bewijs hebben geleverd; de Fields-medaille. De Fields-medaille wordt alleen uitgereikt aan wiskundigen jonger dan veertig jaar, weet Maud. Ze vindt dat alle kinderen op de basisschool over het vermoeden van Collatz moeten leren: 'Als kinderen erover hebben geleerd, wordt het misschien wel opgelost.' Maud voelt de tijd dringen. Ze zou zo graag de Fields-medaille winnen ...

Met dank aan de leerlingen van de Julianaschool in Bilthoven. De namen van de kinderen zijn gefingeerd.

De auteur is docent rekenen-wiskunde op de Marnix Academie en leerkracht van de plusklas rekenen op de Julianaschool in Bilthoven



4. Boomdiagram van Menno

De Fields-medaille

De plusklasleerlingen zijn allemaal tevreden over het feit dat het vermoeden aan de orde is gekomen, ook al hebben ze het vermoeden niet kunnen bevestigen of verwerpen. Ze hebben met name het puzzelachtige karakter van de les kunnen waarderen, zoals het zoeken naar de rekenregels in de getallenreeks en het bewijzen van het aantal startgetallen dat met tien berekeningen tot het getal één leidt. Ze vragen zich wel af of gemiddelde en zwakke rekenaars dit leuk zouden vinden, maar ze zien wel mogelijkheden. Menno en Lukas vinden het vermoeden van Collatz een goede manier om de tafels van twee en van drie goed te oefenen.

Noot:

1. www.wiskundemeisjes.nl/?s=collatz&x=24&y=14

Literatuur:

Bank, B. & Goeij, E. de. (2011). De kond, de hikker en de peeuw. Combinatoriek op de basisschool. In *Volgens Bartjens, 31, 2,* p. 34-37.

Daems, J. & Smeets, I. (2011). *Ik was altijd heel slecht in wiskunde.* Amsterdam: Uitgeverij Nieuwezijds.