Op de toekomst voorbereid

KRITISCH WISKUNDIG LEREN DENKEN

Onder invloed van digitalisering en globalisering verandert onze maatschappij in een rap tempo. Wat wordt er dan zo anders? De auteurs van dit artikel kijken naar de eisen die de maatschappij stelt en wat dat vraagt van het (reken)onderwijs.

Tekst
Geeke Bruin-Muurling en Marike Verschoor
Marike Verschoor is uitgever
Geeke Bruin-Muurling is ontwikkelaar en auteur

Computers nemen steeds meer van onze routinematige taken over. Daardoor verschuiven werkzaamheden en dat heeft gevolgen voor de kennis en de vaardigheden die werknemers van morgen moeten hebben. Het routinematige werk neemt af terwijl het uitvoeren van analytische taken en het samenwerken in (multidisciplinaire) teams juist toeneemt.
Het nadenken over vaardigheden die daarvoor nodig zijn is inmiddels bekend onder de gevleugelde term 21e eeuwse vaardigheden. Die term kent velerlei invullingen. Onlangs heeft SLO meerdere nationale en internationale modellen van 21e eeuwse vaardigheden met elkaar vergeleken (Thijs, 2014). In alle onderzochte modellen worden samenwerking, communicatie, ICT-gebruik en sociaal/cultureel bewustzijn, inclusief burgerschap, als belangrijke vaardigheden genoemd. Daarnaast speelt zelfregulering een belangrijke rol, dat wil zeggen, doelgericht een taak kunnen voltooien en daarvoor verantwoordelijkheid kunnen nemen.

Door de digitalisering ontstaan er ook inhoudelijke veranderingen. Tegenwoordig heeft iedereen altijd en overal de beschikking over uitrekenapparatuur die steeds complexere bewerkingen aankan. Het uit het hoofd of op papier uitrekenen wordt buiten het onderwijs nu al nauwelijks meer van ons gevraagd. Daarom wordt het steeds belangrijker dat we weten wat we aan het uitrekenen zijn, wat de uitkomst betekent en of er iets mis is gegaan. Het antwoord alleen heeft daarom steeds minder betekenis en het begrijpen van de vraag of opdracht wordt belangrijker.

INZICHT 2.0

Samenvattend zou je kunnen je zeggen dat bij de 21e eeuwse vaardigheden het probleemoplossend vermogen en het kritisch denken essentieel zijn. Dit sluit prachtig aan bij de nieuwe maatschappelijke eisen aan het rekenwiskundeonderwijs waarbij het probleemoplossen en het kritisch wiskundig denken een grotere rol spelen.
De grote vraag is natuurlijk: wat is wiskundig denken? En hoe zorg ik er voor dat mijn leerling een kritisch wiskundig denker wordt? Wij zien daarin twee componenten. De eerste is dat er inhoudelijke aanpassingen in het curriculum zullen moeten komen. We zullen meer op inzicht aan moeten sturen, en dat inzicht krijgt een andere invulling dan voorheen, omdat het rekenen een andere positie in onze maatschappij krijgt. Wiskundige structuren of grote ideeën als backbone van ons curriculum kunnen daarbij helpen. Ten tweede zal de ontwikkeling van het kritisch wiskundig denken en probleemoplossen meer ruimte in het curriculum moeten krijgen.
Aandacht voor wiskundig denken of inzicht is niet nieuw. In ons realistisch reken-wiskundeonderwijs is natuurlijk veel aandacht voor inzicht, maar het lijkt erop alsof er in de loop der jaren een valkuil is ontstaan.

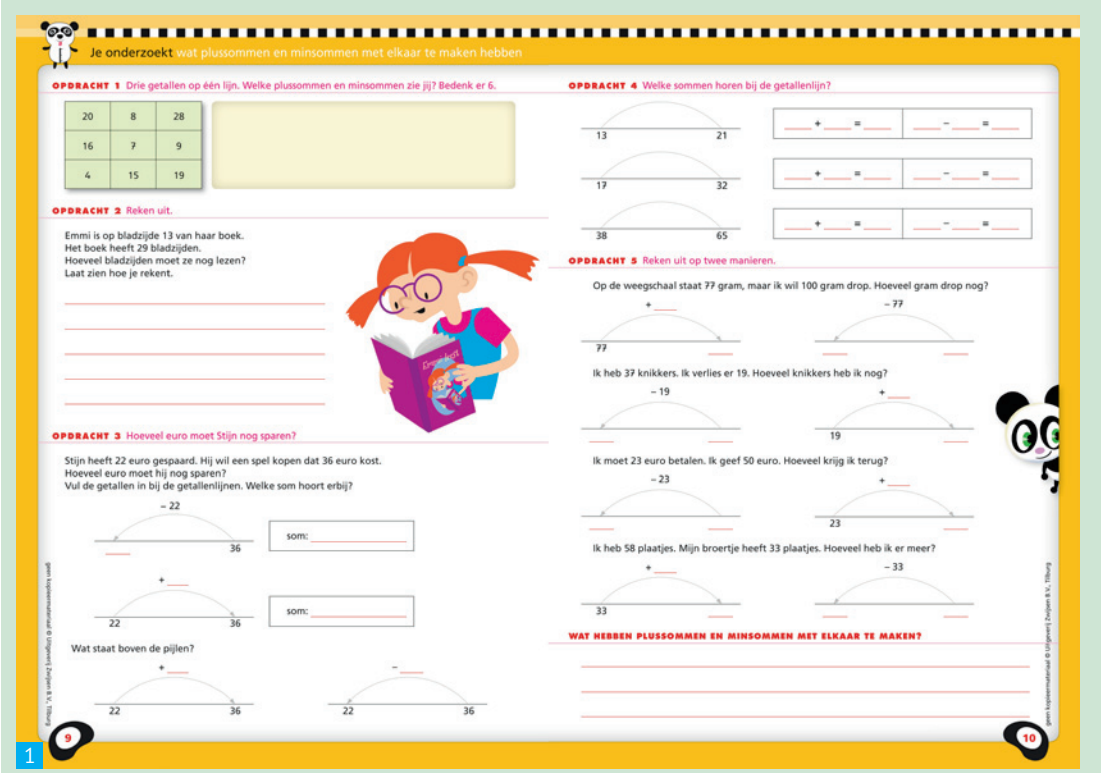
SCHIJNINZICHTEN

In de huidige uitwerking lijkt ons curriculum een geplaveide weg, met hier en daar nog een enkel scheurtje, waar we de leerlingen vervolgens uitgebreid voor waarschuwen en complimenteren als zij daarover heen zijn gestapt. Deze wekt de schijn dat leerlingen wiskundig denken, maar in feite imiteren de leerlingen andermans inzichtelijk handen zoals dat wordt voorgedaan in directe instructies. Het inzicht dat lijkt te ontstaan is daardoor een schijninzicht. Deze schijninzichten kunnen wel betekenis hebben voor het onthouden van de deelinzichten, maar ze hebben minder effect wanneer je ze wilt gebruiken in het grote plaatje. Het oorspronkelijke doel van de onderwijsvernieuwingen komt daardoor niet goed uit de verf. Omdat de leerlingen standaardproblemen voorgeschoteld krijgen, die de route naar het antwoord al zo in zich hebben dat ze nooit uitgedaagd worden echt te denken, kunnen ze verworden tot wat Dan Meyer zo mooi “ongeduldige probleemoplosssers” noemt (Meyer 2010).

ONDERLIGGENDE IDEEËN

Om daadwerkelijk wiskundig te kunnen denken is er meer nodig. Carl Sagan zei: “Science is a way of thinking much more than it is a body of knowledge” (Sagan, n.d.). Ook wiskunde is een

© 2015 Koninklijke Van Gorcum



Je onderzoekt wat plussommen en minsommen met elkaar te maken hebben

OPDRACHT 1 Drie getallen op één lijn. Welke plussommen en minsommen zie jij? Bedenk er 6.

20	8	28
16	7	9
4	15	19

OPDRACHT 2 Reken uit.

Emmi is op bladzijde 13 van haar boek.
Het boek heeft 29 bladzijden.
Hoeveel bladzijden moet ze nog lezen?
Laat zien hoe je rekent.

OPDRACHT 3 Hoeveel euro moet Stijn nog sparen?

Stijn heeft 22 euro gespaard. Hij wil een spel kopen dat 36 euro kost.
Hoeveel euro moet hij nog sparen?
Vul de getallen in bij de getallenlijnen. Welke som hoort erbij?

– 22 … 36 — som: ____

+ ____ … 22 … 36 — som: ____

Wat staat boven de pijlen?

+ ____ … 22 … 36 — – ____ … 22 … 36

OPDRACHT 4 Welke sommen horen bij de getallenlijn?

13 … 21 — ____ + ____ = ____ — ____ – ____ = ____

17 … 32 — ____ + ____ = ____ — ____ – ____ = ____

38 … 65 — ____ + ____ = ____ — ____ – ____ = ____

OPDRACHT 5 Reken uit op twee manieren.

Op de weegschaal staat 77 gram, maar ik wil 100 gram drop. Hoeveel gram drop nog?

+ ____ … 77 — – 77 … ____

Ik heb 37 knikkers. Ik verlies er 19. Hoeveel knikkers heb ik nog?

– 19 … ____ — + ____ … 19

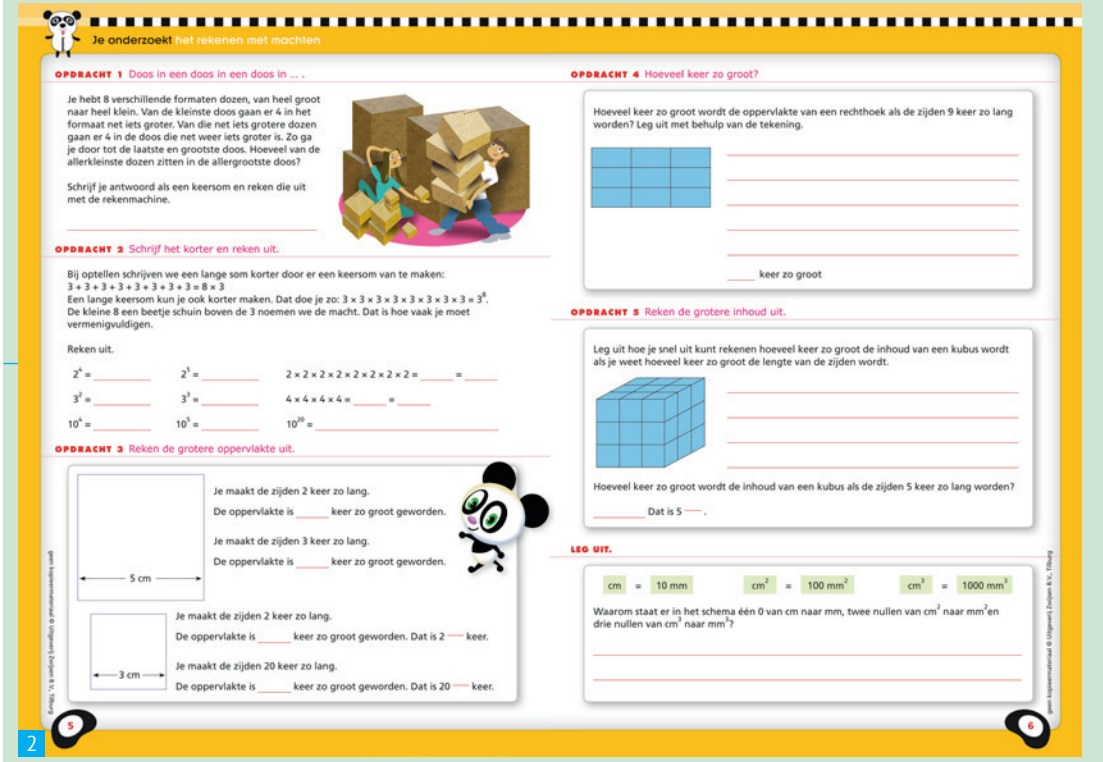
Ik moet 23 euro betalen. Ik geef 50 euro. Hoeveel krijg ik terug?

– 23 … ____ — + ____ … 23

Ik heb 58 plaatjes. Mijn broertje heeft 33 plaatjes. Hoeveel heb ik er meer?

+ ____ … 33 — – 33 … ____

WAT HEBBEN PLUSSOMMEN EN MINSOMMEN MET ELKAAR TE MAKEN?



Je onderzoekt het rekenen met machten

OPDRACHT 1 Doos in een doos in een doos in … .

Je hebt 8 verschillende formaten dozen, van heel groot naar heel klein. Van de kleinste doos gaan er 4 in het formaat net iets groter. Van die net iets grotere dozen gaan er 4 in de doos die net weer iets groter is. Zo ga je door tot de laatste en grootste doos. Hoeveel van de allerkleinste dozen zitten in de allergrootste doos?

Schrijf je antwoord als een keersom en reken die uit met de rekenmachine.

OPDRACHT 2 Schrijf het korter en reken uit.

Bij optellen schrijven we een lange som korter door er een keersom van te maken:
$3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 8 \times 3$
Een lange keersom kun je ook korter maken. Dat doe je zo: $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^8$.
De kleine 8 een beetje schuin boven de 3 noemen we de macht. Dat is hoe vaak je moet vermenigvuldigen.

Reken uit.

$2^5 =$ ____ $2^5 =$ ____ $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 =$ ____ = ____

$3^2 =$ ____ $3^3 =$ ____ $4 \times 4 \times 4 \times 4 =$ ____ = ____

$10^4 =$ ____ $10^5 =$ ____ $10^{20} =$ ____

OPDRACHT 3 Reken de grotere oppervlakte uit.

5 cm

Je maakt de zijden 2 keer zo lang.
De oppervlakte is ____ keer zo groot geworden.

Je maakt de zijden 3 keer zo lang.
De oppervlakte is ____ keer zo groot geworden.

3 cm

Je maakt de zijden 2 keer zo lang.
De oppervlakte is ____ keer zo groot geworden. Dat is 2 ____ keer.

Je maakt de zijden 20 keer zo lang.
De oppervlakte is ____ keer zo groot geworden. Dat is 20 ____ keer.

OPDRACHT 4 Hoeveel keer zo groot?

Hoeveel keer zo groot wordt de oppervlakte van een rechthoek als de zijden 9 keer zo lang worden? Leg uit met behulp van de tekening.

____ keer zo groot

OPDRACHT 5 Reken de grotere inhoud uit.

Leg uit hoe je snel uit kunt rekenen hoeveel keer zo groot de inhoud van een kubus wordt als je weet hoeveel keer zo groot de lengte van de zijden wordt.

Hoeveel keer zo groot wordt de inhoud van een kubus als de zijden 5 keer zo lang worden?

____ Dat is 5 ____ .

LEG UIT.

cm = 10 mm — cm^2 = 100 mm^2 — cm^3 = 1000 mm^3

Waarom staat er in het schema één 0 van cm naar mm, twee nullen van cm^2 naar mm^2 en drie nullen van cm^3 naar mm^3?

1. Voorbeeld uit Rekenpanda groep 4
2. Voorbeeld uit Rekenpanda groep 8

manier van denken en niet alleen een verzameling van kennis en feiten. En ook rekenen zou meer moeten zijn dan alleen uitrekenen, het gebruiken van geleerde feiten en rekenstrategieën. Wiskunde wordt wel het vak van de structuren genoemd. Een aantal structuren, grote ideeën, komen bij veel rekenwiskundige onderwerpen steeds terug, zoals maatverfijning, eenheid, inverse, equivalentie en absoluut versus relatief. Deze structuren zijn in de basis ook terug te vinden in het hele curriculum van het basisonderwijs, maar worden niet als zodanig uitgewerkt of expliciet gemaakt.

Inzicht in structuren is belangrijk, want als leerlingen niet beseffen dat het hogere niveau er is, kunnen ze dat hogere niveau ook niet gebruiken om tot een oplossing te komen. Eigenlijk maken we ze op die manier tot luie denkers. Dit geldt voor *alle* leerlingen. Voor de betere rekenaars blijft rekenen een vaardigheid waar ze toevallig goed in zijn. Het biedt hen weinig uitdaging en ze ontwikkelen de inzichten die ze nodig hebben voor een goede aansluiting met wiskunde (en ook andere vakken) op de havo of het vwo niet voldoende. Voor zwakke rekenaars is rekenen vaak een grote verzameling van onsamenhangende strategieën,

 © 2015 Koninklijke Van Gorcum

waarbij ze geen idee hebben wanneer je welke strategie moet gebruiken, en waarom.
Structuren lijken soms abstract. Door de verwarring die er vaak bestaat tussen 'abstract denken' en 'formeel weergeven' kun je in de verleiding komen om te denken dat jonge kinderen niet in staat zijn om abstract te denken. Het is echter een valkuil in het reken- en wiskundeonderwijs om erg veel belang te hechten aan het correct formeel weergeven in een heel vroeg stadium. Als we onze formele eisen loslaten en focussen op de (onderliggende) ideeën, dan blijkt dat leerlingen vrij abstracte ideeën in hun eigen taal gewoon begrijpen.

REKENPANDA

Bij Rekenpanda zijn werkbladen ontwikkeld waarmee leerlingen al op jonge leeftijd wiskundige structuren ontdekken.

In het voorbeeld in afbeelding 1 onderzoeken leerlingen in groep 4 hoe plus- en min- sommen met elkaar samenhangen, aan de hand van modellen die ze kennen. Hierdoor krijgt dat verband betekenis en worden leerlingen ondersteund om het waarom van de inverse relatie in eigen woorden te formuleren.

Op het werkblad in afbeelding 2 laten we leerlingen in groep 8 het verband onderzoeken tussen vergrotingsfactoren en de regelmaat bij de rijtjes van het metriek stelsel (voor lengte, oppervlakte en inhoud). Beide bladen laten zien dat kinderen goed in staat zijn om inzicht te verwerven in wiskundige structuren.

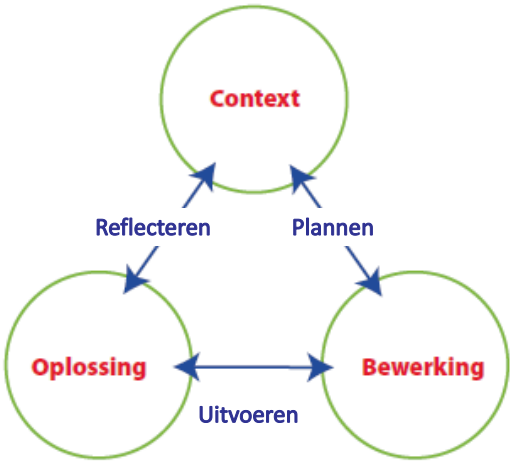
DE KRITISCH WISKUNDIG DENKENDE LEERLING

Om tot wiskundig denkende leerlingen te komen is het niet voldoende als we de inhoud aanpassen. Er zou een verschuiving moeten komen in aandacht en tijd die wordt geïnvesteerd in probleemoplossen versus het uitrekenen zelf. Vanuit de traditie wordt er in ons onderwijs veel tijd besteed aan het leren rekenen uit het hoofd en met pen en papier. Maar in de huidige maatschappij zijn die rekenvaardigheden steeds minder nodig en wordt het belangrijk om de juiste vragen te stellen en antwoorden en big data te analyseren. Om dit te kunnen moeten de werknemers van nu en straks in staat zijn om een dieper spectrum van wiskundige problemen op te lossen (Wolfram). Dus: wel grondig inzicht hebben in de structuur van ons talstelsel en analogie (en daarmee de bewerkingen tot 1000 vlot kunnen uitvoeren), maar niet meer met hele grote getallen handmatig moeten kunnen rekenen.
Door die andere rol die rekenwerk in onze maatschappij krijgt is er dus een verschuiving van het type wiskundig werk nodig in het onderwijs: van het aanleren en inoefenen van routinematig rekenwerk naar probleemoplossend vermogen.

Er is echter een ingeslepen gewoonte in het onderwijs die leren met inzicht in de weg staat, en die er voor zorgt dat het proces van meer aandacht geven aan probleemoplossen wordt afgeremd: een grote gerichtheid op het laten geven van antwoorden. Phil Daro verwoordt dat heel treffend: "Answers are like a black hole: it's hard to escape the pull", stelt hij (Daro, 2014). Hiermee geeft hij aan wat de gevolgen zijn wanneer je reken- of wiskundeonderwijs baseert op de kortste en snelste route naar het geven van een antwoord. Door aan een reeks kleine tussenantwoorden af te meten of het leerproces goed verloopt verliest de leerling het zicht op de essentie. De combinatie van dit 'vragen om antwoorden' en het risico op verwerven van schijninzichten is een wolf in schaapskleren.
Hoe lossen we dit op? Het betekent in ieder geval dat we nieuwe socio math norms moeten neerzetten. Eén daarvan is dat we niet meer bang moeten zijn voor de verwarde leerling, want verwarring is een essentiële fase in het leerproces. Bovendien hoort het opbouwen van de weerbaarheid van de leerling, als het even moeilijk wordt, bij het opbouwen van de 21e eeuwse vaardigheden, en het helpt de leerling om een creatieve en flexibele denker te worden.

DRIESLAGMODEL

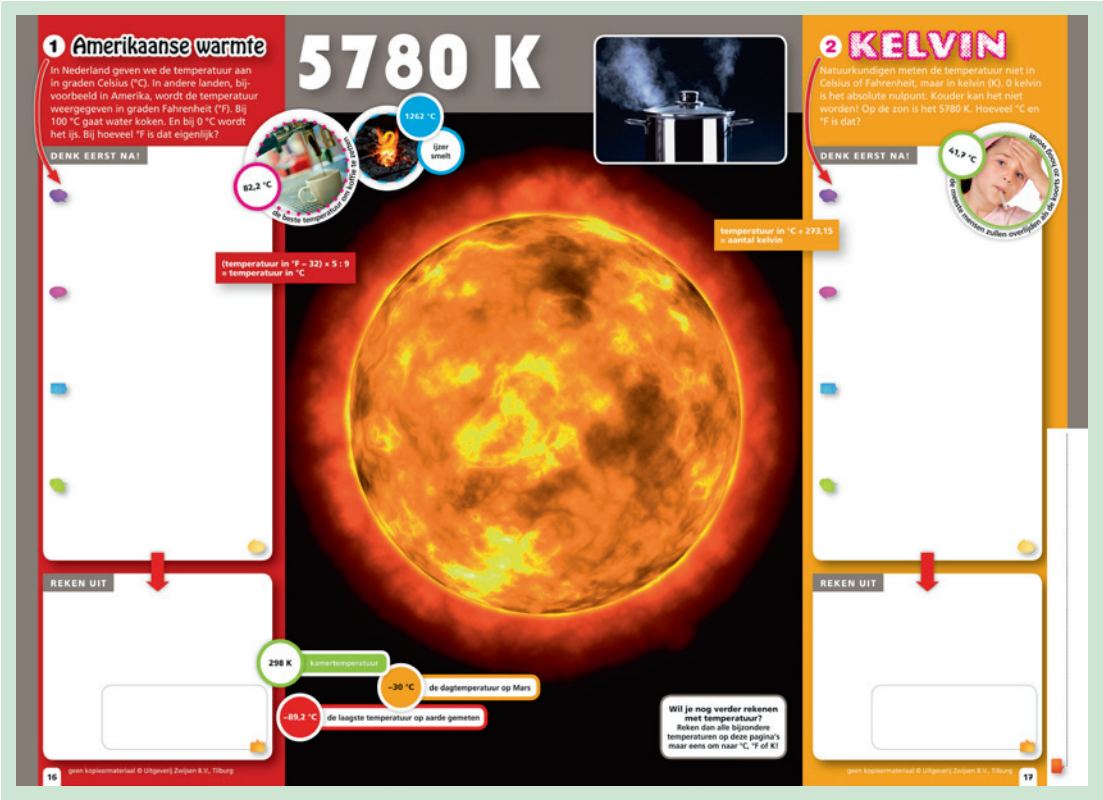
Door de leerling te ondersteunen op probleemaanpak in plaats van op de snelste route naar een antwoord, krijgt de leerling de kans zelf te gaan leren. Het drieslagmodel is een effectief model om deze ondersteuning te bieden (afbeelding 3). Het laat zien wat de fases in het probleemoplossen zijn.



3. Drieslagmodel (protocol ERWD)

Het hangt van de gekozen context af in hoeverre de leerling wordt uitgedaagd en wordt aangezet tot probleemoplossen; en wat de kwaliteit van het plannen en reflecteren kan zijn. Als de contexten meer uit open vragen bestaan, die geen antwoorden in zich hebben maar uitdagen tot authentiek probleemoplossen, kan er ruimte gegeven worden aan het eigen denkproces van de leerling. Dit wordt verder ondersteund door tijdens het proces van probleemoplossen niet meer aan te sturen op 'wat doe je', maar op 'hoe

© 2015 Koninklijke Van Gorcum



4. Voorbeeld uit Real Life Rekenen Exact groep 8

doe je het', en 'waarom doe je het op die manier'. De rol van de leerkracht verandert daarmee essentieel: hij of zij is geen vraagbaak meer, maar een coach, die het denken van de leerling stimuleert.

REAL LIFE REKENEN

Hoe dat in de praktijk uit kan pakken, illustreert onderstaand voorbeeld uit Real Life Rekenen (afbeelding 4).

In Real Life Rekenen wordt de leerling ondersteund op de laag van betekenis verlenen van het drieslagmodel: waar gaat dit over, wat heb je nodig, wat reken je uit, wat betekenen de getallen? De coachende leerkracht stelt vervolgens vragen over het denkproces en de wiskundige essentie: hoe heb je het aangepakt, en waarom heb je dat zo gedaan?

Vragen bij dit blad zouden dan kunnen luiden:

- Hoe pak je het aan?
- Hoe zit de formule voor het berekenen van Fahrenheit naar Celsius in elkaar? In welke volgorde reken je daar?
- Hoe kun je de formule 'andersom' in vullen? Welke stappen moet je dan zetten?
- Waarom zet je die stappen?
- Hoe schrijf je die stappen als een nieuwe formule? Waarom schrijf je dat zo?
- Hoe kun je die formule korter schrijven?

CONCLUSIE

Het is duidelijk: de ontwikkelingen in de maatschappij, en daarmee in ons onderwijs vragen om actie. Zonder alle opbrengsten uit het verleden weg te gooien, is er veel ruimte voor vernieuwing. Wij zien daarbij twee belangrijke aandachtspunten. De eerste is dat de doelen voor het rekenen zelf meer gericht zijn op niveauverhoging, op het begrijpen van wiskundige structuren en grote onderliggende ideeën. Reken- wiskundeonderwijs is daarmee een goede voorbereiding op verdere wiskundige en maatschappelijke ontwikkeling. Daarnaast zien wij een verschuiving in aandacht van het pure uitrekenwerk naar een combinatie van uitrekenen en begrijpen van wiskundige ideeën en stimuleren van het probleemoplossend vermogen. Wij hebben er vertrouwen in dat we de leerlingen een gedegen voorbereiding op hun toekomst kunnen geven, als we hier de komende jaren met elkaar aandacht aan gaan besteden.

literatuur

- Bruin-Muurling, G., (2013-2014) Van den Boomen, M., Froeling, L., Masselink, C., Vermeulen, W., Rekenpanda 4a, 5a en 8a (Tilburg, Zwijsen)
- Bruin-Muurling, G., Heeck-de Boer, M., Verschoor, M. (2012) Real Life Rekenen Werkboek exact groep 8 (Zwijsen)
- Daro, P. (2011). Against answer-getting. Retrieved at 12/12/2013 from http://vimeo.com/30924981
- http://www.kennisnet.nl/themas/21st-century-skills/
- Meyer, D., (2010) *Math class needs a makeover*. https://www.ted.com/talks/dan_meyer_math_curriculum_makeover/transcript
- Carl Sagan. (n.d.). BrainyQuote.com. Retrieved March 11, 2015, from BrainyQuote.com Web site: http://www.brainyquote.com/quotes/quotes/c/carlsagan124576.html
- Read more at http://www.brainyquote.com/citation/quotes/quotes/c/carlsagan124576.html#10aoXXXqgg7WIzSv.99
- Thijs, A., Fisser, P., & Hoeven, M., (2014) *21e eeuwse vaardigheden in het curriculum van het funderend onderwijs*. Enschede: SLO
- Wolfram C., *TEDGlobal 2010 talk* via http://blog.wolfram.com/2010/11/23/conrad-wolframs-ted-talk-stop-teaching-calculating-start-teaching-math/

 © 2015 Koninklijke Van Gorcum