

# Realistisch reken-wiskundeonderwijs in de 21<sup>e</sup> eeuw

*Koeno Gravemeijer, Wiskunde voor Morgen*

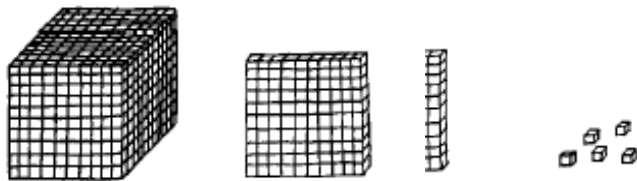
De computerisering en informatisering maken dat we ons onderwijs moeten veranderen om te blijven voldoen aan de eis om de leerlingen voor te bereiden op de maatschappij die ze straks betreden (Gravemeijer, 2016). Maar er ontstaan ook nieuwe mogelijkheden. Tegenwoordig kunnen we veel rekenwerk overlaten aan rekenapparaten. Dit betekent dat we in het onderwijs minder tijd hoeven te besteden aan het routinematig leren uitvoeren van die rekenbewerkingen die aan apparaten kunnen worden overgelaten. Uiteraard moeten de leerlingen deze berekeningen wel – globaal – kunnen controleren en begrijpen. In het reken-wiskundeonderwijs heeft altijd een spanning bestaan tussen beheersen en begrijpen. Het was vaak niet mogelijk om aan beide recht te doen. Doordat er nu meer rekenwerk door machines wordt gedaan ontstaat er meer ruimte voor nadenken en redeneren. En dat past goed bij het werken aan 21e eeuwse vaardigheden. Het rekenen-wiskunde lijkt sowieso uiterst geschikt voor het ontwikkelen van 21e eeuwse vaardigheden. In feite komen 21e eeuwse vaardigheden, als probleemoplossen, communiceren, en samenwerken, sterk overeen met wat ook in probleem-georiënteerd, interactief, realistisch reken-wiskundeonderwijs wordt nagestreefd. Echter, zulk reken-wiskundeonderwijs blijkt in de praktijk lastig te realiseren. Dan bedoel ik probleem-georiënteerd onderwijs waarin de leerlingen zelf dingen uitvinden, met elkaar overleggen om te achterhalen welke redeneringen kloppen en zo onder leiding van de leraar voortgang boeken in het leerproces.

Dit idee van reken-wiskundeonderwijs gaat verder dan het opnemen van probleem-georiënteerde activiteiten. Deze probleem-georiënteerde activiteiten moeten ook leiden tot het construeren van nieuwe reken-wiskundige kennis. De geschiedenis heeft echter laten zien dat dergelijk onderwijs niet gemakkelijk te realiseren is. In dit hoofdstuk wil ik een aantal aspecten bespreken die van belang zijn voor het wel-slagen van dit onderwijs. Ik wil me daarbij richten op gangbare opvattingen over het construeren van reken-wiskundige kennis, het idee van een hypothetisch leertraject, de rol van een lokale onderwijstheorie en het belang van de verandering van de klassencultuur.

## Construeren van reken-wiskundige kennis

De gedachte dat leerlingen een actieve rol moeten spelen in het ontwikkelen van kennis, of deze kennis in feite zelf moeten construeren wordt tegenwoordig breed aanvaard. Zeker in kringen van wetenschappers op het gebied van het reken-wiskundeonderwijs. Dit laatste heeft te maken met het feit dat de geschiedenis van de wiskunde laat zien dat er steeds weer nieuwe concepten worden geconstrueerd volgens een patroon waarbij processen worden omgevormd tot objecten, die vervolgens weer onderdeel van nieuwe processen worden (Sfard, 1991). Het feit dat wiskundige concepten door de leerlingen zelf geconstrueerd moeten worden biedt

bovendien een verklaring voor de problemen die we in het reken-wiskundeonderwijs tegenkomen. Dit betreft onder meer pogingen om met concreet materiaal tegemoet te komen aan het abstracte karakter van rekenen en wiskunde. Met concreet materiaal zou je wiskundige relaties en concepten zichtbaar kunnen maken. Bekend zijn de blokjes en staafjes waarmee tientallen, eenheden en dergelijke kunnen worden voorgesteld (Afb. 1).



Afb. 1. Tientallig materiaal.



Afb. 2. Een vaas óf twee gezichten.

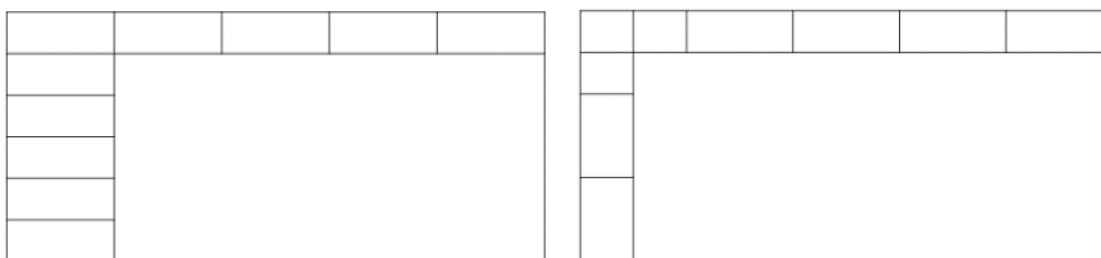
Omdat wij, als volwassenen, *enen*, *tienen* en dergelijke als concrete objecten ervaren, verwachten we dat de leerlingen deze concepten ook in de blokjes herkennen. Dat is echter niet het geval. De moeilijkheid van de concepten, die in het geding zijn, kunnen we illustreren aan het begrip *tien*. Het blijkt dat jonge leerlingen tien niet tegelijkertijd als *één tien* én *tien eenheden* kunnen zien. Ze zien aanvankelijk, óf de eenheden, óf het tiental, maar niet beide tegelijk. Een beetje zoals het bekende plaatje waarin een vaas of twee gezichten kan worden gezien, maar niet allebei tegelijk (Afb. 2). Het helpt dan niet om de leerlingen uit te leggen wat tien is, ze moeten dit concept zelf construeren. Pas als leerlingen voldoende ervaring hebben opgedaan met processen als tientallig groeperen, inpakken, uitpakken, tellen, vergelijken en dergelijke gaan ze *één tien* en *tien eenheden* als *één ding* zien.

## Hypothetisch leertraject

Inzichten als bovengenoemd stroken met de (socio)constructivistische theorie: kennis kan niet worden overgedragen maar moet door de leerlingen zelf geconstrueerd worden. Maar als de leerlingen zelf hun eigen kennis construeren, hoe kunnen we dit proces dan sturen? Simon (1995) bedacht dat dit kan door gebruik te maken van een hypothetisch leertraject (HLT). Met het hypothetisch leertraject anticipeert de leraar op de mentale activiteiten van de leerlingen als ze een geplande onderwijsactiviteit uitvoeren; hoe ze waarschijnlijk zullen denken en redeneren. Wanneer deze denk- en redeneeractiviteiten passen bij de beoogde leerdoelen, dan kunnen de geplande onderwijsactiviteiten daaraan bijdragen. Mits de feitelijke mentale activiteiten van de leerlingen overeen komen met de verwachte mentale activiteiten uiteraard. Ofwel, als ze denken en redeneren zoals verwacht. Omdat je dat vooraf niet zeker kunt weten, spreekt Simon van een *hypothetisch* leertraject. De leraar zal bij de uitvoering dus moeten vaststellen of zijn/haar verwachtingen kloppen, en zal die plannen zo nodig moeten bijstellen.

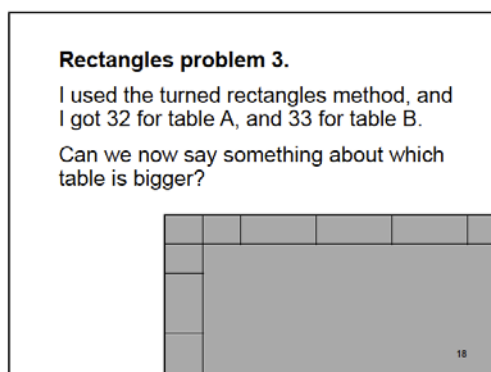
Simon illustreert dit aan een lessenserie aan aanstaande basisschoolleraars waarin hij hypothetische leertrajecten bedenkt en bijstelt. Doel van de lessenserie is om de

studenten een beter begrip bij te brengen van de oppervlakte-formule  $lengte \times breedte$ . Hij vermoedt dat de oppervlakte-formule voor veel studenten slechts een trucje is. Hij kiest voor een concrete ingang en vraagt de studenten daarom uit te zoeken hoe vaak een rechthoekig kartonnetje op hun tafeltje past. De studenten komen met twee verschillende oplossingen, één waarbij de rechthoek steeds in dezelfde stand wordt afgepast en één waarbij de rechthoek wordt gedraaid (Afb. 3).

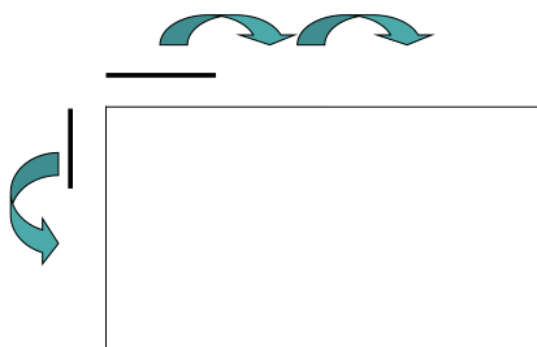


Afb. 3. In dezelfde stand (links); gedraaid (rechts).

De klassendiscussie levert uiteindelijk op dat *in dezelfde stand houden* de juiste methode is, waarbij een van de studenten dit nog eens helder onderbouwt. Simon krijgt echter het gevoel dat dit de andere studenten niet interesseert. Ze kennen de formule immers. Simon probeert hen daarop aan het denken te zetten, onder andere met de vraag of je met de gedraaide rechthoek als meetmethode toch iets over de oppervlakte van de gemeten tafels kunt zeggen (Afb. 4). De studenten twijfelen. Dan kiest hij voor een opgave waarbij de lengte en de breedte met twee verschillende stokjes worden gemeten (Afb. 5).

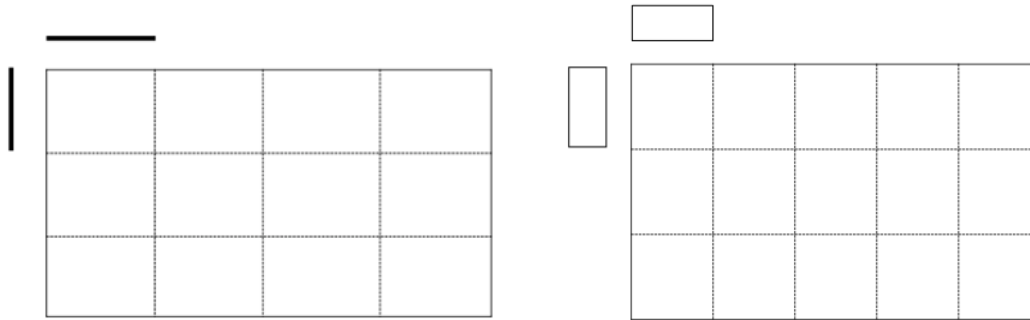


Afb. 4. Kun je iets zeggen over de oppervlakte?



Afb. 5. Meten met twee verschillende stokjes.

Nu zijn er verschillende studenten die opperen dat je met de twee stokjes een nieuwe rechthoek kunt maken en die in gedachten kunt afpassen. En dat je de uitkomst kunt bepalen door te vermenigvuldigen (Afb. 6). De anderen nemen dit idee over. En wanneer Simon nu op de gedraaide-rechthoek opgave terugkomt realiseren de studenten zich dat je daar hetzelfde kunt doen (Afb. 7). Zo worden de studenten zich bewust van het feit dat het bij de oppervlakteformule van een rechthoek gaat om een *virtuele maat* en om *handig tellen* hoe vaak die maat past.



Afb. 6. De oppervlakteformule  $\text{lengte} \times \text{breedte}$  berust op handig tellen met een virtuele maat.

De clou van dit verhaal is dat de docent (Simon) steeds een HLT bedenkt en deze op basis van de reacties van de studenten aanpast. In eerste ronde gaat hij ervan uit dat het uitzoeken hoe vaak het kartonnetje past, voldoende is om te bedenken dat het bij het vermenigvuldigen van lengte keer breedte in feite gaat om systematisch afpassen en handig tellen van hoe vaak je afpast. Dit blijkt echter niet te werken. Enkele studenten komen met de gedraaide rechthoek. Deze methode wordt in de discussie weliswaar afgekeurd, maar hij besluit dit idee te gebruiken om de studenten op een andere manier over de oppervlakteberekening te laten nadenken. Waarschijnlijk heeft hij het idee van het construeren van een nieuwe oppervlaktemaat dan al in gedachten, maar de studenten komen niet met deze oplossing. Anders gezegd, de mentale activiteit waar hij op had gehoopt treedt niet op. Simon realiseert zich dan dat de beschikbare oppervlaktemaat (het kartonnetje) waarschijnlijk een barrière vormt voor het ontwikkelen van een nieuwe maat. Hij kiest daarom voor stokjes. Dan komen de studenten wel op het idee dat je daarmee een rechthoek kunt maken die je als oppervlaktemaat kunt gebruiken. Via de geschetste reeks van activiteiten die hij steeds aanpast aan de reacties van de studenten bereikt hij uiteindelijk dat de gewenste mentale activiteiten optreden.

## Lokale onderwijstheorieën

Nu hoeven leraren dergelijke HLT's niet zonder hulp te ontwerpen. Als het goed is geven de leergangen in de methoden houvast. Dan moet zo'n leergang wel meer beiden dan een reeks van op elkaar aansluitende onderwijsactiviteiten. De methode zal ook zicht moeten bieden op de ideeën en redeneringen achter de leergang. Alleen met die kennis kan de leraar inspelen op wat de leerlingen uitvinden of niet uitvinden. In dit verband gebruik ik wel de term *lokale onderwijstheorie*. Zo'n lokale onderwijs theorie bevat een theorie over hoe het leerproces voor een gegeven onderwerp zou kunnen verlopen. Aangevuld met theorieën of theorie'tjes over hoe dit leerproces kan worden ondersteund/uitgelokt met bepaalde taken, gesprekken, en materialen. Voor zover zo'n lokale onderwijstheorie niet helder is beschreven, zal de leraar moeten proberen deze zelf te reconstrueren.

De lokale onderwijstheorie als zodanig is echter niet voldoende, de leraar zal daar zijn of haar eigen uitwerking aan moeten geven. De lokale onderwijstheorie kan als referentiekader functioneren, op basis waarvan de leraar HLT's kan ontwerpen. Maar

uiteindelijk moet de leraar zelf HLT's ontwerpen die passen bij zijn of haar doelen, klas en leergeschiedenis van de leerlingen. In veel gevallen zal dit betekenen dat de leraar de door de methode aangeboden activiteiten niet integraal overneemt, maar aanpast aan wat er in de klas gebeurt.

## Klassencultuur

Het onderwijs dat zo ontworpen en voorbereid is, moet uiteraard ook nog in de praktijk worden gerealiseerd. Een van de barrières die overwonnen moet worden betreft de gangbare klassencultuur. We spreken in dit verband van de 'classroom social norms' (Cobb & Yackel, 1996); er gelden impliciete normen ten aanzien van wat leraar en leerlingen van elkaar mogen verwachten. In veel klassen is het normaal dat de leraar naar de bekende weg vraagt. Leraren stellen vaak vragen waarvan ze de antwoorden weten. De leerlingen weten dat en proberen de antwoorden te geven die de leraar verwacht. Dit lijkt in de praktijk goed te functioneren, maar als je realistisch, probleem-georiënteerd, reken-wiskundeonderwijs wilt gaan geven veroorzaakt dit verwachtingspatroon problemen. Dan moet je namelijk naar een heel andere rolverdeling tussen leraar en leerlingen, dan moeten de leerlingen zelf nadenken over mogelijke oplossingen en die ook kunnen uitleggen. Die verandering wordt ook wel getypeerd als een verandering van *didactisch contract*. Leraar en leerlingen hebben uiteraard geen contract gesloten, maar ze handelen wel alsof er afspraken zijn gemaakt over wat ze van elkaar mogen verwachten. De leerlingen verwachten van de leraar dat hij of zij uitleg geeft en ze gaan ervan uit dat van hen wordt verwacht te reproduceren wat eerder is voorgedaan. Dit is zoals gezegd nooit expliciet afgesproken. Het is het resultaat van de ervaringen die de leerlingen in het onderwijs hebben opgedaan. Omdat het didactisch contract niet gebaseerd is op expliciete afspraken, maar op een reeks ervaringen, zal het niet voldoende zijn de leerlingen te vertellen dat ze van nu af aan zelf moeten gaan nadenken en met eigen ideeën komen. De leerlingen zullen moeten ervaren dat ander gedrag voortaan loont en dat de leraar geen oplossingen meer voorzegt. Daarbij kan de leraar concrete situaties aangrijpen om uit te leggen van wat er van de leerlingen wordt verwacht. De leraar geeft dan expliciet aan wat de nieuwe sociale normen zijn.

Daarnaast kan leraar een aantal dingen doen om de sociale normen die bij de nieuwe rolverdeling horen te cultiveren. Bijvoorbeeld door te laten merken dat eigen oplossingen en nieuwe oplossingen op prijs worden gesteld. En door zonder meer belangstelling te tonen – of beter: te hebben – voor het denken van de leerlingen. In dit onderwijs gaat het er immers niet om of de leerling denkt zoals door anderen is voor-gedacht, maar om zijn of haar eigen denken en hoe daarop kan worden voortgebouwd. Verder kan de leraar willekeurige leerlingen vragen de uitleg van de leerling die aan de beurt was eens in eigen woorden na te vertellen. Daarmee wordt een signaal afgegeven dat je naar de uitleg van andere leerlingen moet luisteren en deze moet proberen te begrijpen. In samenhang daarmee kan de leraar vragen waar de leerlingen mee komen doorspelen aan andere leerlingen, of aan de hele groep.

Verder zal de leraar zal ook productieve klassengesprekken moeten organiseren. Daartoe moet de leraar bepalen wat de wiskundige kern is, om daar de discussie op

te kunnen richten. In dit verband is de observatie van Daro (2011) interessant, die opmerkte dat Amerikaanse leraren vaak naar een procedure zoeken die goede antwoorden oplevert, terwijl Aziatische leraren eerder naar de wiskunde achter de opgave zoeken. In het eerste geval dreigt het gevaar dat de leraar het onderwijs gaat richten op procedures die leerlingen helpen om snel en efficiënt tot een goed antwoord te komen (bij een bepaald type opgaven). Wat bovendien best aantrekkelijk kan zijn omdat je met dit soort kennis succes kunt hebben op de gangbare toetsen. Probleem is echter dat dergelijke geïsoleerde kennis uiterst foutgevoelig is. Het gaat uiteindelijk om de wiskunde achter de opgave. Het begrijpen van de onderliggende wiskunde dient op de lange termijn de basis te vormen voor goede antwoorden. Het begrijpen van die wiskunde is bovendien wat je nodig hebt in een tijd waarin apparaten de reken-wiskundige bewerkingen voor je uitvoeren. Klassendiscussies zouden over die wiskunde moeten gaan. De leraar moet dus goed zicht hebben op de onderliggende wiskunde en kunnen beoordelen in hoeverre de of sommige leerlingen daar nog mee worstelen. We zagen dit bijvoorbeeld bij Simon die steeds weer probeerde om de discussie te richten op de wiskunde die achter de oppervlakteformule zit.

## Tot slot

De computerisering en informatisering maken het wenselijk en mogelijk dat we meer aandacht in het reken-wiskundeonderwijs verleggen naar begrijpen en probleemoplossen. Daarbij kan interactief, probleem-georiënteerd realistisch rekenen-wiskundeonderwijs een belangrijke rol spelen. In dit hoofdstuk heb ik enkele aspecten besproken die van belang zijn voor het welslagen van dit type onderwijs. Er zijn uiteraard meer aspecten te noemen, maar ik hoop hiermee een aanzet te hebben gegeven voor het doordenken van en experimenteren met deze vorm van reken-wiskundeonderwijs die kan worden ingezet om de leerlingen goed voor te bereiden op een toekomst in de informatiemaatschappij.

## Verder lezen?

Wiskunde voor morgen: [www.rekenenwiskunde21.nl](http://www.rekenenwiskunde21.nl).

## Literatuur

- Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational psychologist*, 31(3-4), 175-190.
- Daro, P. (2011). Against answer-getting. Retrieved from <https://vimeo.com/79916037>.
- Gravemeijer, K. (2016). Reken-wiskundeonderwijs voor de 21e eeuw: Zet vooral in op kennis die een aanvulling is op wat de computer al kan. *Tijdschrift voor Remedial Teaching*, 24(3), 20-22.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, 22(1), 1-36.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for research in mathematics education*, 114-145.

Gravemeijer, K. (2017). Realistisch reken-wiskundeonderwijs in de 21<sup>e</sup> eeuw. In: M. van Zanten (red.). *Rekenen-wiskunde in de 21<sup>e</sup> eeuw. Ideeën en achtergronden voor primair onderwijs* (pp. 169-174). Utrecht / Enschede: Panama, Universiteit Utrecht / NVORWO / SLO.