Een didactisch tovervierkant

Open opgaven - vrije producties

Adri Treffers, Universiteit Utrecht: Freudenthal Instituut

Inleiding

Vanaf 1980 heeft zich in het Nederlandse rekenonderwijs de overgang van procedurele naar conceptuele rekenmethodes voltrokken.[1] Uit drie grootscheepse Cito-onderzoeken in de periode 1987-1997 bleek dat de leerlingen met de conceptuele methodes – traditionele en moderne – op vrijwel alle rekendomeinen aanzienlijk hoger scoorden dan ze met de procedurele rekenboeken deden.[2] Dit betekent echter niet dat er nu niets meer te wensen overblijft. Met name ten aanzien van de zogenoemde open opgaven, waarvan de antwoorden (en soms ook de vragen) niet op voorhand vaststaan, hebben de moderne rekenboeken de didactische mogelijkheden nog niet volledig benut. De oorzaak daarvan ligt mede in het feit, dat het kunnen maken van vrije of eigen producties bij dergelijke open vraagstukken, niet expliciet in de *Kerndoelen basisonderwijs* (OCW, 1993) werd opgenomen - dit in tegenstelling tot de leerdoelen van de *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool* (Treffers, De Moor & Feijs, 1989; Treffers & De Moor, 1990) die er wel expliciet aandacht aan schonken.
Bij het denken over de toekomst van het rekenonderwijs is het daarom dienstig dit type opgaven nog eens onder de aandacht te brengen, te beginnen met de betrekkelijk korte historie ervan.

Open opgaven in traditionele rekenmethodes (1960-1990)

In tegenstelling tot wat nogal eens wordt beweerd, kunnen de traditionele rekenmethodes uit de periode 1875-1975 niet onder één noemer worden geplaatst, maar dienen ze grofweg in drie richtingen uiteen gelegd te worden, namelijk die van de procedurele, conceptuele en duale methodes.

Procedurele methodes

Eerst kunnen dan kennen is het adagium van de procedurele rekenmethodes. De leerstof staat daarin centraal. Het is zaak om de rekenstof nauwkeurig uit te lijnen, dat wil zeggen te splitsen in moeilijkheden; elk onderdeel wordt tot in de kleinste details uiteengerafeld. Aan herhaling wordt veel aandacht besteed: oefening baart kunst en kunde. Aan inzicht als basis voor het inoefenen, zoals in het geval van de tafels bijvoorbeeld, wordt weinig waarde toegekend. Het gaat allereerst om het memoriseren van rekenfeiten, het automatiseren van bewerkingsschema's en het

---

[1] Dit artikel bevat fragmenten uit *Weg van het cijferen. Rekenmethodes vanaf 1800 tot heden* (Treffers, 2015).
[2] De vergelijkende scores van de traditionele, procedurele methode *Naar Zelfstandig Rekenen* en de traditionele, conceptuele methode *Nieuw Rekenen* staan op p.128 van *Weg van…* vermeld. En die van *Naar Zelfstandig Rekenen* met de moderne, conceptuele methode *Wereld in Getallen* op p.190.

herkennen van opgaventypen bij het maken van toepassingen. De procedurele aanpak is eensporig, regelgeleid en werkt zo snel mogelijk naar één efficiënte standaardmethode toe om een bepaald opgavetype op te lossen.
Toepassingen komen pas aan het eind van de leergang aan bod, en dan nog maar in bescheiden mate. Handig, flexibel (hoofd)rekenen en schattend rekenen staan niet op het programma. De standaardrecepten van het cijferen voor de vier basisbewerkingen met gehele getallen, kommagetallen en breuken, worden achtereenvolgend na groep 4 ingeoefend. Daaraan voorafgaand worden voor het rekenen tot tien, twintig en honderd de bewerkingen eveneens volgens een vast voorschrift uitgevoerd, te beginnen bij het splitsen bij tien voor het optellen onder de twintig. De opgave 6 + 7 bijvoorbeeld dient via 6 + 4 + 3 berekend te worden, en niet volgens 6 + 6 + 1 of 5 + 1 + 5 + 2, alvorens een ‘weetje’ te worden. Ook in het aanvankelijke rekenen is er geen of weinig aandacht voor levensechte rekensituaties.

Conceptuele methodes

De conceptuele rekenmethodes verschillen op vrijwel alle genoemde aspecten van de procedurele methodes. Hun didactische leidraad luidt *eerst kennen dan kunnen, eerst denken dan doen*. De leerstofopbouw is niet zo sterk geatomiseerd als die van de procedurele methodes. Aan inzicht wordt ook bij het aanleren van rekenfeiten en procedures veel waarde toegekend. Mede om deze reden komen niet meteen de meest verkorte vormen van de cijferalgoritmen aan bod. Toepassingen staan, als basis voor de begripsvorming, al aan het begin van de leergangen. Getalinzicht, flexibel (hoofd)rekenen en soms ook schattend rekenen krijgen, naast het cijferen, een centrale plaats. Kinderen worden in de gelegenheid gesteld om, binnen het kader van welomschreven doelstellingen, zelf methoden te ontwikkelen, op hun eigen niveau te werken, en soms zelfs zelf opgaven te ontwerpen. En tot slot: de relaties tussen de vier basisoperaties en tussen de leerstofdomeinen van verhoudingen, breuken, procenten en meten worden hecht verankerd.

Duale methodes

De duale methodes ten slotte bevatten in de verschillende leergangen elementen van beide: de leergang van hoofdrekenen bijvoorbeeld kan volgens het conceptuele model zijn uitgelijnd en die van het cijferen puur procedureel.

Open opgaven en vrije producties in methodes

Op grond van het voorgaande viel niet te verwachten dat in de procedurele en deels ook de duale methodes een plaats voor open problemen werd ingeruimd, en dat was ook inderdaad niet het geval. Maar wel lag het in de rede dat conceptuele methodes als die van Versluys en Van Pelt uit de negentiende eeuw en van een duale methode als van Diels & Nauta uit de eerste helft van de twintigste eeuw, een passende collectie open opgaven zouden bevatten. Dit laatste bleek evenmin het geval, want pas met de uitgave van de conceptuele methode *Functioneel Rekenen* van Reijnders & Snijders (1958-1959) werd voor het eerst in de geschiedenis van het

rekenonderwijs het maken van vrije producties gevraagd.[3] Deze methode was geïnspireerd door de ideeën van de denkpsychologische school van Kohnstamm.
Al in deeltje 2, bestemd voor de tweede helft van leerjaar 1 (groep 3), van deze methode krijgen leerlingen de opdracht zelf vragen bij een gegeven antwoord te bedenken. In de volgende deeltjes voor groep 4 tot 8 worden daar nog andere typen van vrije producties aan toegevoegd.

> Het zelf bedenken van sommetjes over gegeven getallen, het zelfstandig opsporen van relaties tussen bepaalde gegevens en getallen, en het bedenken van vraagstukjes bij gegeven abstracties zijn functiemogelijkheden van de intelligentie en het onderwijs dient ook deze functies zo goed mogelijk te laten functioneren.

De auteurs spreken in dit verband van *verschillende richtingen uit kunnen denken*, dat wil zeggen van kale opgave naar toepassingsprobleem, en omgekeerd. Als voorbeelden van een en ander noemen ze:

- Zelf sommetjes bedenken bij een gegeven getal, zeg 72;
- Een vraagstukje ontwerpen met 40 + 25; 40 22; 7 x 6; of 24 : 6 als oplossing;
- Vragen formuleren bij een opgave als ‘Zus koopt in een fruitwinkel 6 appels van 5 c per stuk en 8 peren van 7 c per stuk; ze heeft 1 gulden’.

De laatstgenoemde opgave wordt een vraagloos vraagstuk genoemd.
Vanaf het einde van de jaren vijftig verscheen naast *Functioneel Rekenen* nog *Boeiend Rekenen* van Wanders & Böhncke (1958) met eveneens aandacht voor vrije producties bij open vraagstukken. Ook de laatste functionele traditionele methode *Nieuw Rekenen* van Bruinsma e.a. (1969) bevat open opdrachten als:

1. Bereken op verschillende manieren: 7 x 98
2. Maak zelf sommen.
Om een weiland staat een hek.
Het weiland is lang 120 m, breed 80 m.
3. Maak vijf vermenigvuldigingen. De uitkomst is steeds 450.
4. Gevarieerd oplossen van een opgave als:
Moeder koopt bij de groenteboer:
1 bloemkool voor 4 dubbeltjes = … c
2 kroppen sla van 1 kwartje = … c
Samen voor … c
Zij betaalt 1 gulden. Zij krijgt terug … c
Met welke geldstukken kan de winkelier dat teruggeven?

---

[3] Ook Rombouts vindt variatie in de vraagstukjes belangrijk. *Het verdient sterke aanbeveling, niet alleen telkens van concrete gevallen uit te gaan en telkens weer tot zulke gevallen terug te keren, maar ook, naar aanleiding van een gegeven stof, de leerlingen zelf vraagstukjes te laten samenstellen. De nodige getallen en andere gegevens kunnen uit prijslijsten en dergelijke – die in de klas aanwezig moeten zijn – worden opgezocht* (Rombouts, p.146). Hij beschouwt het zoeken naar open opdrachten als taak van de leraar en neemt vrije producties niet systematisch in zijn methode op. Vandaar dat we de methode van Reijnders & Snijders in dit verband als eerste noemden.

Opgave 1 zet kinderen op het spoor van handig rekenen en cijferen. De overgang van splitsend en van kolomsgewijs naar cijferend rekenen zou volgens de handleiding bij vermenigvuldigen in enkele lessen als volgt kunnen verlopen.

98	98	98
7 x	7 x	7 x
630	56	686
56	630	
686	686	

Afb. 1. Nieuw Rekenen (1969).

Daarnaast zal vooral de handige rekenwijze $7 \times 98 = 7 \times 100 - 7 \times 2 = \ldots$ in de vrije producties van de leerlingen opduiken. De open opgaven, die tot in de middenbouw een passende plaats krijgen toegewezen, verdwijnen in de bovenbouw naar de achtergrond.
Tegelijk met *Nieuw Rekenen* verscheen de functionele methode *Rekenen voor de basisschool* (Van Gerven, 1969) – een methode die mede door de turbulente ontwikkelingen op de methodemarkt al rond 1980 uit het fonds werd gehaald. Het volgende citaat uit de handleiding van deze methode vat goed samen hoe in de traditionele, conceptuele (i.c. functionele) methodes na 1960 over verschillende soorten opdrachten werd gedacht, waaronder die van het nieuwe type open (vrije) opgaven:

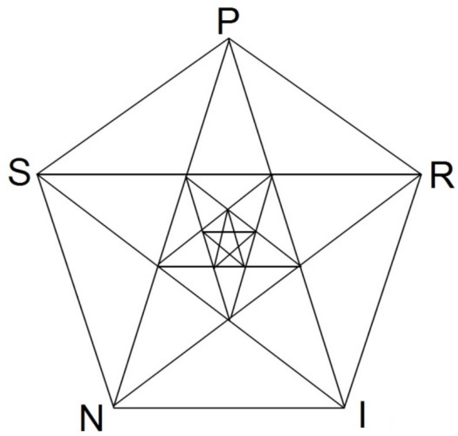
> Aan de verschillende soorten vraagstukjes is veel aandacht besteed: het vraagloze vraagstuk, het volledige vraagstuk (met vraag), het vrije vraagstuk of rekenprobleem en het zelf samenstellen van vraagstukken aan de hand van een berekening (15c + 25c) worden beurtelings aan de orde gesteld.

In het voorgaande zijn, behoudens het gangbare type, van alle genoemde soorten vraagstukken enkele voorbeelden gegeven. Daarbij hebben we wel de kanttekening gemaakt dat er in de traditionele methodes uit de periode 1960-1980 aan de praktische realisering van het nieuwe concept nog wel het een en ander schortte. Zo worden bijvoorbeeld binnen het domein van het kale cijferen, met een totale tijdsduur van een heel schooljaar, in geen enkele traditionele methode stelselmatig open opdrachten opgenomen - een parade van duizenden gesloten opgaven zonder één open vraagstuk!
Zal dit tekort in de moderne methodes van na 1990 zijn opgeheven? Voordat deze vraag zal worden beantwoord, gaan we eerst in op de nationale kerndoelen waarop de nieuwe methodes zijn geënt.

Vrije producties en nationale kerndoelen (1990-1993)

In 1971 stelde het project *WISKunde Op de BASisschool* (Wiskobas) zich ten doel een alternatief te ontwikkelen voor de formele *New Math* waarvoor Nederlandse uitgeverijen eind jaren zestig veel belangstelling kregen. Dit alternatief is het zogenoemde realistische rekenonderwijs dat meer dan het procedurele rekenonderwijs en de New Math op de realiteit en de werkelijkheid van kinderen betrokken is. In de periode 1971-1981 ontwikkelde het Wiskobas-team met en in het onderwijsveld eerst een grote verzameling rijke problemen en thema's, en vervolgens (aanzetten tot) nieuwe leergangen voor verschillende onderwerpen van rekenen, meten en meetkunde. Vanaf het eind jaren zeventig gingen Wiskobas-publicaties en ideeën over realistisch rekenonderwijs als inspiratiebron voor enkele nieuwe methodes fungeren. Eind jaren tachtig werden de rekendoelen voor het eerst in de vorm van een ontwerp van nationale kerndoelen gevat, dat onder auspiciën van de NVORWO onder de titel *Proeve van een Nationaal Programma* (Treffers, De Moor & Feijs, 1989; Treffers & De Moor, 1990) verscheen. Het beschrijvingsmodel van de Proeve volgt de drieslag: onderwijsprincipes; algemene onderwijsleerdoelen; en concrete leerdoelen.

De vraag is nu hoe het maken van vrije producties in deze triade tot uitdrukking komt. De *onderwijsprincipes* van het realistische rekenonderwijs zijn kort via de volgende vijf trefwoorden te benoemen: productie (*P*); reflectie (*R*); interactie (*I*); niveau (*N*); en structuur (*S*). Deze *prinsprincipes* kunnen op grote, middelgrote en kleinere onderwijsblokken worden betrokken: op leergangen, lessenseries, lessen en lesonderdelen met betrekking tot het leren van begrippen, procedures, toepassingen en methoden – zie de krimpende vijfhoek (Afb. 2).



Afb. 2. Samenhang prinsprincipes.

Het *productieprincipe* luidt daarin, kort samengevat, als volgt:

> Kinderen leveren een cruciale bijdrage aan zowel de vorm als de inhoud van het onderwijsleerproces. Hun eigen producties hebben niet alleen betrekking op de specifieke manieren waarop ze de leerstof verwerken, maar ook op het feit dat ze zelf opgaven bedenken en oplossen.
>
> Deze productieve inbreng kan echter alleen gehonoreerd worden indien het startpunt van het onderwijs bij betekenisvolle, realistische problemen ligt. Naarmate kennis, vaardigheden en inzichten toenemen, gaat echter ook de formele rekenwereld in toenemende mate tot de realiteit, de leefwereld van de kinderen behoren, en kunnen de eigen producties ook op het maken van formele rekenopgaven betrokken worden.

Van de acht algemene onderwijsleerdoelen van de Proeve heeft er één betrekking op vrije producties:

> Het onderwijs in rekenen-wiskunde is erop gericht dat leerlingen eigen producties maken en leren reflecteren op hun aanpakken.

In Proeve-2 wordt het concrete leerdoel van de vrije productie met onder meer de volgende voorbeelden uit het aanvankelijke rekenen toegelicht. Kinderen van groep 3 kregen de opdracht om aftrekopgaven te maken waar 3 of 5 uitkwam. Mark, die eigenlijk nooit goed meedeed met rekenen, raakte nu wel geboeid en produceerde tientallen opgaven van 4 – 1 tot 27 – 24. En Jon toonde dat hij veel meer kon dan de juf in de verste verten vermoedde: 6 – 1; 8 – 3; 17 – 12; 30 – 25; 100 – 95; 2000 – 1995; 10000 – 9995 en … 3 – 8 = min 5.
De ontwikkelaar-onderzoeker Van den Brink (1989, p. 135) ging nog een stap verder:

> Het maken van eigen producties in de oefenfase (zelfstandig bedenken van opgaven en dergelijke) wordt door de kinderen zeer gewaardeerd. Deze activiteit kan in een ruimer kader worden geplaatst door de kinderen een rekenboek te laten ontwerpen voor de kinderen die het volgende jaar naar groep 3 gaan. Hierdoor komen de eigen producties in een ander licht te staan: je maakt ze ten behoeve van anderen die ze ook gaan gebruiken. 'De kinderen van volgend jaar' werken hier als een zingevende en daardoor stimulerende context.[4]

Tot zover enkele voorbeelden van vrije producties die in Proeve-2 werden beschreven.[5] In de *Kerndoelen basisonderwijs* (OCW, 1993) werden de concrete leerdoelen van de Proeve vrijwel onverkort overgenomen. Alleen het leerdoel van de vrije producties binnen de onderscheiden leerstofdomeinen viel af, met als argument dat het hier niet om een doel maar om een didactisch middel ging. Om dezelfde reden werd ook het genoemde algemene onderwijsleerdoel geschrapt.
In de Kerndoelen zijn er van de acht algemene doelen uit de Proeve slechts vijf geselecteerd, die in 1998 zelfs tot drie werden teruggebracht.

---

[4] Zie ook het hoofdstuk van Maarten Molenkamp.

[5] In de bovenbouw gebeurt iets dergelijks met het rekenen in het Land van Acht aan de hand van figuurtjes uit de tekenfilms van Walt Disney. Zij willen met hun acht vingers op een vergelijkbare manier leren tellen en rekenen zoals wij dat met onze tien vingers doen en daarbij de getallen op een overeenkomstige wijze in een positiesysteem noteren, alleen niet tien- maar achttallig. Het is de bedoeling dat de kinderen uit groep 8 deze achttallige telrij en de bijbehorende notatiewijze met elkaar uitvinden, en vervolgens eenvoudige opgaven leren maken en daarna leren cijferen. Daarbij krijgen ze steeds gelegenheid om zelf opgaven te produceren die in de volgende les besproken worden. De speurtocht door het Land van Acht is geen productleerdoel, maar een procesleerdoel, een middel om over het eigen leerproces van vroeger in het tientallige positiesysteem na te denken. De kinderen blijken buitengewoon veel plezier aan dit rekenkundige uitstapje te beleven. Het onderwijs is interactief: er wordt individueel en in kleine groepjes gewerkt, maar er zijn ook momenten dat de hele groep bijeen is om instructie te krijgen, voorstellen te bespreken en te discussiëren. De leerkracht speelt hierin een cruciale rol. Soms is die terughoudend, een andere keer stuurt zij/hij het leerproces bij of geeft de kinderen volledig de vrije hand.

De leerlingen leren:

- wiskundetaal gebruiken
- praktische en formele rekenproblemen oplossen
- aanpakken te onderbouwen en te beoordelen.

Hiermee wordt het leren problemen op te lossen als hét algemene kerndoel van het rekenonderwijs aangemerkt: kinderen moeten leren dat bij het rekenen niet alleen routinematig toepassen maar vooral ook nadenken vaak nodig is om problemen uit het leven van alledag en formele opgaven te kunnen oplossen. Dit algemene kerndoel kan uiteraard alleen gerealiseerd worden met een positieve wiskundige attitude en via de concrete leerdoelen uit de rekendomeinen waartoe de basisvaardigheden, cijferen, verhoudingen en procenten, breuken en kommagetallen, en meten en meetkunde behoren. Het algemene doel van de vrije producties werd, zoals gezegd, geschrapt omdat er geen onderscheid in product- en procesdoel werd gemaakt. Het volgende voorbeeld over cijferend aftrekken laat nog eens zien hoe belangrijk dit onderscheid is.

Maak een makkelijke, een wat moeilijkere en een moeilijke opgave.

$$\begin{array}{r} \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \underline{\bullet\ \bullet\ \bullet\ -} \\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

De opgave is een concretisering van het algemene doel betreffende het maken van vrije producties en het reflecteren op de eigen aanpak. Impliciet wordt de kwestie van het *lenen* aan de orde gesteld, waaronder het problematische lenen van nul. In de klassikale nabespreking kan achtereenvolgens het niet lenen, het één en het twee keer lenen uitgebreid worden toegelicht. *Waarom vind je deze voorbeeldopgave eenvoudig, die gewoon en de derde moeilijk?* Deze kernvraag kan leiden tot het reflecteren op de moeilijkheidsgraad van de eigen producties. Hetzelfde geldt voor het rekenen met lenen, dat op verschillende manieren kan gebeuren. De vijf prins-principes komen in het maken en het interactief, klassikaal nabespreken van deze open opgave helder tot uitdrukking. De vraag is nu of met dergelijke open opgaven een welomschreven productdoel wordt nagestreefd, of dat zij louter als didactisch middel fungeren:

- Is het zelf bedenken van rekenvragen en berekeningen via open opdrachten geen procesleerdoel-op-zich, ook al kan het tegelijkertijd als didactisch middel worden aangemerkt?
- Hebben didactische middelen op zichzelf genomen geen persoonlijke en vakspecifieke - zeg vormende - werking en waarde?
- Genereert niet ieder *hoe* tegelijk ook een *wat*?

Het antwoord van de Proeve-auteurs op deze vragen luidt driewerf *ja, dat is wel het geval*. Anders gezegd: de verwijdering van het algemene productiedoel uit de officiële kerndoelen was vakdidactisch bezien, niet verantwoord. Het gevolg voor de methode- en toetsontwikkeling bleek ingrijpend: de open opgaven werden niet systematisch in de nieuwe methodes verwerkt, de aanzet tot de didactische vernieuwing in de periode 1950-1990 stokte.

Terug naar de toekomst

Open opdrachten kwamen, zoals we eerder zagen, tot 1950 niet of nauwelijks in de rekenmethodes voor. En ze werden vervolgens na 1990 betrekkelijk weinig, laat staan systematisch, aangeboden. Dit is opmerkelijk, omdat ze mede een krachtig didactisch middel vormen, waarmee het plezier in rekenen verhoogd kan worden en de opbrengst ervan verbeterd.[6]
In het volgende zal deze vaststelling feitelijk worden onderbouwd aan de hand van het eerdergenoemde cijferende aftrekken – niet bepaald het meest aansprekende onderwerp, maar juist daarom uitermate geschikt om het pleidooi voor vrije producties kracht bij te zetten. We kiezen de methode *Pluspunt* (Van Beusekom, 2010) als voorbeeld, maar voegen er direct aan toe dat wat daarover wordt opgemerkt, onverkort op alle andere methodes van toepassing is. Welnu, de goed uitgelijnde leergang van cijferend aftrekken wordt in de tweede helft van groep 6 begonnen en voor dit type opgaven aan het einde ervan afgesloten - in de volgende leerjaren wordt ze onderhouden en uitgebreid met grotere getallen en kommagetallen.
Van de honderd opgaven in deel 6 van het lesboek en het (tweede) opdrachtenboek staan er zeventig in de directe vorm, zoals:

$$\begin{array}{r} 5\;9\;3 \\ \underline{2\;0\;7-} \\ \bullet\;\bullet\;\bullet \end{array}$$

Van die collectie is er zegge en schrijve één open:

> Maak 6 aftreksommen met de kaartjes 3, 5, 7, 9, 0 en 2.
> Gebruik in elke som elk cijfer 1 keer.
> Reken de sommen onder elkaar uit.

Een open opgave als de volgende wordt node gemist.

---

[6] Zie bijvoorbeeld Selter (1994) en Menne (2001).

Maak een makkelijke, een wat moeilijkere en een moeilijke opgave.

$$\begin{array}{l} \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \underline{\bullet\ \bullet\ \bullet\ -} \\ 2\ 4\ 5 \end{array}$$

De overige dertig opgaven zijn opgaven met twee of drie open plaatsen die opgevuld moeten worden om de aftrekopgave kloppend te maken:

$$\begin{array}{l} 7\ 0\ \bullet \\ \underline{\bullet\ 4\ 6\ -} \\ 3\ 6\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8\ 2\ 7 \\ \underline{\bullet\ \bullet\ \bullet\ -} \\ 6\ 6\ 9 \end{array}$$

Dit zijn interessante *vlekopgaven*, zoals ze wel worden genoemd, vanwege de vlekken die op de plaatsen van de bedekte cijfers staan. Maar geen enkele ervan bevat de open opdracht om ze zelf te ontwerpen: een makkelijke, een niet zo makkelijke en een uitgesproken moeilijke aftrekopgave. Ook de algemene open vraag kan worden gesteld om zoveel mogelijk cijfers van de volgende aftrekopgave weg te laten (te bedekken) om de oorspronkelijke opgave te kunnen terugvinden.

$$\begin{array}{l} 6\ 3\ 7 \\ \underline{2\ 8\ 9\ -} \\ 3\ 4\ 2 \end{array}$$

Daarna kunnen de leerlingen zelf verschillende vlekopgaven met drie open plaatsen construeren. Ontdekken ze dat er, algemeen gesproken, willekeurig één cijfer per kolom bedekt kan worden? Met deze vraag en de open opdrachten die daar uit voortvloeien, worden de algemene doelen van het maken van vrije producties en die van het probleemoplossen met elkaar verbonden.

Al met al kan vastgesteld worden dat de weldoordachte leergang van Pluspunt nog met een tiental open opdrachten van vrije producties verrijkt kan worden. Dezelfde conclusie geldt uiteraard voor het cijferende optellen, vermenigvuldigen en delen, en voor een combinatie van de vier basisbewerkingen. Van de laatste, samengestelde categorie tot slot een klassiek voorbeeld, bestemd voor leerlingen van groep 8 … en voor de lezer!

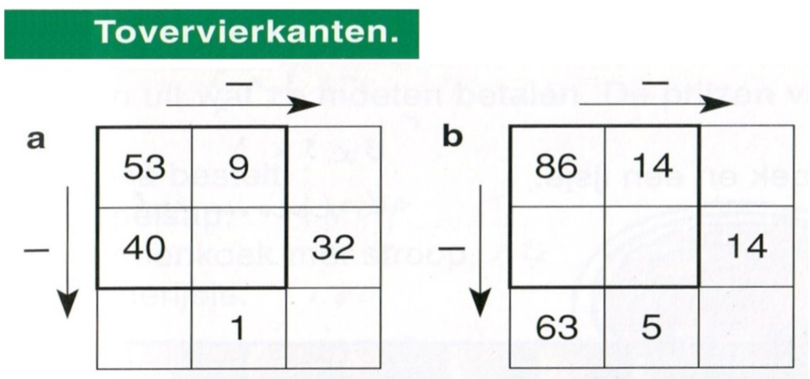
Vul de negen stippen met de cijfers 1 tot en met 9 zodanig in, dat het verschil van de twee producten zo klein mogelijk wordt.

Deze opgave is in twee opzichten open: het kleinst mogelijke verschil blijft ongenoemd, maar ook als dat wel zou gebeuren door te eisen dat de uitkomsten gelijk moeten zijn, dan nog blijven er meerdere oplossingen voor dit klassieke probleem over.[7]

Besluit

Tot zover enkele aantekeningen over de vrije producties in de leergang van het kale, cijferende aftrekken. Het zal duidelijk zijn er dat bij het maken van toepassingsopgaven c.q. contextproblemen ook speelruimte voor open opgaven bestaat. De categorie van de vraagloze vraagstukjes, die eerder werden genoemd, zijn daar een voorbeeld van. De actuele methodes bevatten daarnaast nog tal van andere tekstuele en figurale vormen om vraagstukken in te kleden en die bieden zelfs nog meer mogelijkheden voor het maken van vrije producties in de domeinen van basisvaardigheden, cijferen, verhoudingen, procenten, breuken, kommagetallen, meten en meetkunde. Om daar enigszins zicht op te kunnen krijgen, kan men het beste een methode ter hand nemen en per pagina of blok nagaan welke opgaven open zijn - want die staan er meestal wel degelijk in - en waar mogelijkheden liggen om ze op zinvolle wijze open te maken.

Maak de opgaven. Ontwerp daarna zelf nieuwe tovervierkanten.



Afb. 3. Dit vierkant komt uit De Wereld in Getallen (3e editie) (Huitema e.a., 2001), maar dan wel zonder de open opdracht om zelf een tovervierkant te ontwerpen.

[7] In Gardner (2006, p.65 en p.77) wordt dit probleem van de beroemde recreatieve puzzelontwerper Dudeney, uit de negentiende eeuw, besproken. Er zijn elf oplossingen met een verschil van nul. Een tip: de grootste gelijke uitkomst wordt verkregen door in de twee-maal-drie vorm de cijfers 1 tot en met 5 te plaatsen!

Het zou te ver voeren om hier - meer dan in het voorgaande met het cijferen gebeurde - over mijn eigen ervaringen tijdens die speurtocht te berichten. Maar mijn meest belangwekkende ervaring wil ik de lezer niet onthouden: er blijkt zich een nieuw didactisch venster te openen! In het volgende probleem neemt dit rekenvenster, doeltreffend en veelzeggend, de modelvorm van een tovervierkant aan (Afb. 3).

Mijn algemene aanbeveling voor het rekenonderwijs van de toekomst luidt: vergroot bij het oefenen van basale rekenvaardigheden, bij het probleemoplossen, en bij de combinatie ervan, de eigen inbreng van kinderen door middel van vrije producties via open opdrachten.

Verder lezen?

Weg van het cijferen: http://adritreffers.nl/.

Literatuur

Bruinsma, B. (red.) (1969). *Nieuw Rekenen. Algemene Inleiding*. Baarn: Bosch en Keuning

Diels, P.A., & J. Nauta (1939). *Richtlijnen voor het rekenonderwijs op de lagere school*. Groningen: Wolters.

Gardner, M. (2006). *The Colossal Book of Short Puzzles and Problems*. New York: Norton.

Huitema, S. e.a. (2001). *De Wereld in Getallen (3^e editie)*. Den Bosch: Malmberg.

Menne, J. (2001). *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100* (diss.).Utrecht: Freudenthal Instituut.

OCW (1993). *Kerndoelen basisonderwijs*. Den Haag: Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen.

Rombouts, S. (1948). *Geef Acht! Nieuwe Rekencursus voor de Handleiding voor derde en volgende leerjaren.* Tilburg: R.K. Jongensweeshuis

Selter, Ch. (1994). *Eigenproductionen im Arithmetikunterricht* (diss.). Wiesbaden: Deutsche Universitätsverlag..

Treffers, A., De Moor, E., & Feijs, E. (1989). *Proeve van een Nationaal Programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 1. Overzicht einddoelen*. Tilburg: Zwijsen

Treffers, A. & De Moor, E. (1990). *Proeve van een Nationaal Programma rekenen-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijsen.

Treffers, A. (2015). *Weg van het cijferen. Rekenmethodes vanaf 1800 tot heden*. Utrecht: Universiteit Utrecht.

Van Beusekom, N, e.a. (2010). *Pluspunt*. Den Bosch: Malmberg.

Van den Brink, J. (1989). *Realistisch rekenen aan jonge kinderen* (diss.).Utrecht: OW&OC.

Van Gerven, J., (1969). *Rekenen voor de basisschool*. Den Bosch: Malmberg.

Van Pelt, D. (1903). *Overzicht der methode gevolgd in 'De Nieuwe Rekencursus'*. Tiel: Mijs.

Versluys, J. (1889). *De methodiek van het rekenen.* Amsterdam: W. Versluys.

Wanders, W. & S. Böhncke (1958).*Boeiend rekenen*. 's Hertogenbosch: Malmberg.

Zandvoort, R.; H. Venekamp & N. Kuipers (1955-1970). *Naar Zelfstandig Rekenen*. Groningen: Wolters Noordhoff.

Treffers, A. (2017). Een didactisch tovervierkant. Open opgaven – vrije producties. In: M. van Zanten (red.). *Rekenen-wiskunde in de 21^e eeuw. Ideeën en achtergronden voor primair onderwijs* (pp. 79-89). Utrecht / Enschede: Panama, Universiteit Utrecht / NVORWO / SLO.