



De overgang van natuurlijke getallen naar rationale getallen: een handboekanalyse en lessenreeks voor toekomstige leerkrachten.

Patrick Van Roy, Ilona Hawrijk, Ann Palmaerts, Nathalie Vermeersch en Fien Depaape



Inhoud

- Theoretische achtergrond
- Analyse leermethodes in Vlaanderen
- Nieuwe lessenreeks rationale getallen

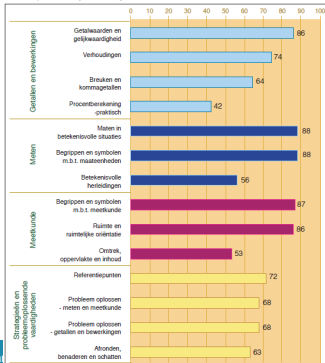
Theoretische achtergrond

Rationale getallen

- Één van de moeilijkste wiskundige domeinen in de basisschool (o.a. Zhou, Peverly, & Xin, 2006)
- Vlaanderen:
 - "Werken met breuken ervaren veel leerlingen als moeilijk en minder aangenaam." (toelichting leerplan wiskunde VSKO p. 21)
 - Peilingsproeven BaO (Janssen, De Corte, De Boeck, Verschaffel, Luyten, Van Nijlen, Daems, & Rymenans, 2002):
 - In welke mate hebben de leerlingen de eindtermen wiskunde bereikt in het zesde leerjaar (groep 8) van het basisonderwijs?
 - Ons basisonderwijs scoort goed voor de eindtermen wiskunde, maar er zijn voor een aantal deeldomeinen minder goede resultaten.

Rationale getallen

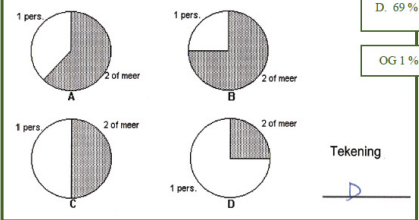
Tabel: percentage leerlingen dat de eindtermen haalt in 2002



Rationale getallen

Basisopgave

In Mechelen zijn 2 000 auto's gecontroleerd. In 500 auto's zaten twee of meer personen. Welke van deze tekeningen (A, B, C of D) hoort bij deze controle?



- A. 3 %
- B. 16 %
- C. 11 %
- D. 69 %

OG 1 %

Tekening

Rationale getallen

Bijkomende opgaven

Ongeveer $\frac{1}{5}$ deel van de mensen woont in China.

Ongeveer $\frac{1}{6}$ deel van de mensen woont in India.

Welk deel van de mensen woont in China en India samen?

$\frac{11}{30}$ deel

52 %

Fres drinkt iedere dag drie bekers melk van een kwart liter.
Hoeveel liter melk drinkt ze per week?

5,85 liter

29 %

KU LEUVEN

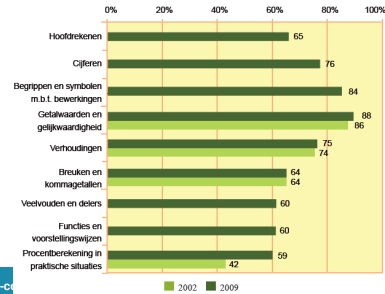
Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Rationale getallen

- BaO (Janssen, Verschaffel, Tuerlinckx, Van den Noortgate, & De Fraine, 2009):

Tabel: vergelijking percentage leerlingen dat de eindtermen haalt 2002-2009



KU LEUVEN

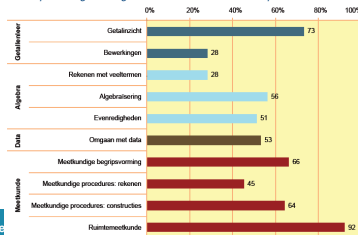
Panama-c

Rekenen-wiskunde XL

Rationale getallen

- o Peilingsproeven eerste graad SO (A-stroom) (Janssen, Janssens, Van Dooren, Tuerlinckx, Van den Noortgate, & De Fraine, 2009):
 - o Opgaven met breuken worden doorgaans minder goed opgelost dan opgaven zonder breuken. Weinig jongeren kunnen correct vermenigvuldigen en delen met rationale getallen.

Tabel: percentage leerlingen dat de eindtermen beheerst per toets in 2009



KU LEUVEN

Panama-conf

Rekenen-wiskunde XL

Rationale getallen

- o Internationaal (vb. Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Clarke & Roche, 2009; Clarke, Roche, & Mitchell, 2007; Cramer, Post & delMas, 2002; Vamvakoussi, Christou, Mertens, & Van Dooren, 2011; Zhou, Peverly, & Xin, 2006)

- o Enkele voorbeelden:

- o Welk deel is D?

42.7% juist (groep 8; Clarke et al., 2007)



- o Welke breuk is groter, $\frac{4}{7}$ of $\frac{1}{5}$?

37.2% juist (groep 8; Clarke et al., 2007)

- o Hoeveel getallen liggen er tussen 7 en 7,001?

Minder dan 1 op 3 juist (3^e jaar voortgezet onderwijs; Vamvakoussi et al., 2011)

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Kennis van leerkrachten

- o Succesvol onderwijs vraagt om gespecialiseerde kennis van leerkrachten.
 - o Shulman (1986, 1987)
 - o Content Knowledge (CK) = vakinhoudelijke kennis
 - o Conceptuele kennis: kennis over concepten, zoals o.a. definities, eigenschappen, ...
 - o Procedurele kennis: kennis over procedures, zoals o.a. handelingen uitvoeren, algoritmen toepassen, ...
 - o Pedagogical Content Knowledge (PCK) = vakdidactische kennis
 - o Kennis van misvattingen van leerlingen en leermoeilijkheden
 - o Kennis van representaties en instructiestrategieën
 - o CK is een noodzakelijke, maar geen voldoende voorwaarde voor PCK (Hill, Rowan, & Ball, 2005)

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Overgang van natuurlijke naar rationale getallen

- o Vamvakoussi, Christou, Mertens & Van Dooren (2011)
 - o Conceptual change approach: conflict voorkennis – nieuwe kennis.
 - o Vb. hoeveel getallen liggen er tussen 4 en 6?
 - o Veelal schrijven leerlingen ten onrechte eigenschappen van natuurlijke getallen toe aan de rationale getallen, een fenomeen dat ook wel de "natural number bias" wordt genoemd.
 - o Vb. leerlingen veronderstellen vaak dat $\frac{1}{5}$ groter is dan $\frac{1}{4}$ omdat 5 groter is dan 4.

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Voorbeeld PISA (2012)

Welke wagen heeft de laagste cilinderinhoud?

- Alpha
- Bolte
- Castel
- Dezal

Model:	Alpha	Bolte	Castel	Dezal
Year	2003	2000	2001	1999
Advertised price (zeds)	4800	4450	4250	3990
Distance travelled (kilometres)	105 000	115 000	128 000	109 000
Engine capacity (litres)	1.79	1.796	1.82	1.783

Bron: http://www.nieuwsblad.be/article/detail.aspx?articleid=dm20131203_036

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Analyse leermethodes in Vlaanderen

Depaape, F., Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2012). Wat is er dan zo rationeel aan rationale getallen? Of hoe voorkennis niet (altijd) helpt. *School en klaspraktijk*, 53(2), 2-16.

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Natural number bias

- 4 discontinuïteiten tussen natuurlijke en rationale getallen.
 - Verschillen in aantal representaties
 - Verschillen in vergelijken en ordenen
 - Discreet vs. dicht
 - Verschillen in bewerkingen
- Door **expliciet** te verwijzen naar verschillen tussen natuurlijke en rationale getallen kan de natural number bias vermeden worden (Vosniadou & Verschaffel, 2004).
- Onderzoeksvraag:

"In hoeverre vinden we in leerkrachthandleidingen instructies om mogelijke uitingen van de natural number bias bij leerlingen te voorkomen, te remediëren of te versterken en in welke mate zijn deze instructies geëxpliciteerd?"

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Procedure

- Dataset
 - Analyse van leerkrachthandleidingen
 - Drie meest gebruikte handboeken (Kompas, Zo gezegd zo gerekend en Nieuwe Tal-rijk)
 - Vanaf het tweede (groep 4) tot en met het zesde (groep 8) leerjaar
- Codeerschema: 4 aspecten:
 - Expliciete verwijzing naar verschillen
 - Impliciete verwijzing naar verschillen
 - Expliciete verwijzing naar gelijkenissen
 - Impliciete verwijzing naar gelijkenissen

→ Deze aspecten werden gecontroleerd voor elk van de vier discontinuïteiten.
- 2 onafhankelijke codeerschema's:
 - Interscorerbetrouwbaarheid = .71 → discussie tot overeenkomst



KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Expliciet vs. impliciet

- Expliciete gelijkheid:

"De leerlingen ervaren dat het vermenigvuldigen van een kommagetal met een natuurlijk getal op dezelfde manier verloopt als het vermenigvuldigen van een natuurlijk getal met een natuurlijk getal."

- Impliciet verschil:

"Voor delingen waarbij de deler kleiner is dan 1, is het belangrijk voor leerlingen dat ze begrijpen en benadrukken dat het quotiënt groter is dan het deeltal. De leerlingen kunnen dit inzicht gebruiken om hun verkregen oplossingen te controleren. Door dit inzicht te benadrukken, vermijdt je dat leerlingen misvattingen over delen gaan ontwikkelen."

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Resultaten

Handboek	Jaar	Vergelijken & ordenen			Bewerkingen			Dichtheid			Representaties		
		Exp	Imp	La	Exp	Imp	La	Exp	Imp	La	Exp	Imp	La
Kompas	2		1	1									1
	3		2	1			2						1
	4		3	2			3	9	2				4
	5		6	1			9	10	1				7
	6		4	1			14	9	1				5
	7												
Zo gezegd, zo gerekend	2						1						
	3						1						1
	4		2	2			1	4	2	1			4
	5		2	2			6	7					5
	6		1				8	8	3	1			5
	7												
Nieuwe Tal-rijk	2												
	3						1						
	4		1				2	5					1
	5						7	8	1				1
	6						7	5					
	7												

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Resultaten – expliciete verwijzingen

- Slechts één expliciet verschil tussen natuurlijke en rationale getallen
 - "Noteer 12.456 op het bord. Vragen die je stelt:
 - > Is dit een natuurlijk getal?
 - > Hoe noem je dergelijk getal? (kommagetal)
 - > Waarom noem je deze getallen zo? (kommagetal omdat je er een komma in noteert)"
- Expliciete gelijkenissen tussen natuurlijke en rationale getallen zijn het meest terug te vinden binnen het domein bewerkingen.
 - "Bij het aanbrengen van bewerkingen met rationale getallen kan men best starten vanuit gelijkenissen met natuurlijke getallen."
 - "Leerlingen moeten ervaren dat vermenigvuldigen met kommagetallen gelijkaardig is aan de vermenigvuldiging met natuurlijke getallen."
$$\begin{array}{r} 0,3 \times 0,8 = 0,24 \\ 10 \times \downarrow \quad \downarrow 10 \times \quad \downarrow 100 \times \quad \uparrow :100 \\ 3 \times 8 = 24 \end{array}$$

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Resultaten

- Gelijkenissen en verschillen tussen natuurlijke en rationale getallen blijven hoofdzakelijk impliciet.
 - Er is een toename in het aantal verwijzingen in de opeenvolgende jaren (doordat er meer tijd besteed wordt aan rationale getallen naarmate de leerlingen ouder worden).
- **Leerkrachten moeten op een goede manier omgaan met handboekmateriaal, inzicht hebben in de leermoeilijkheden van leerlingen en weten met welke instructietechnieken en representaties ze deze moeilijkheden kunnen voorkomen.**

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Interventiestudie: lessenreeks rationale getallen

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Eerder onderzoek (Depaepe, Vermeersch, Torbeyns, Janssens, Verschaffel, & Van Dooren, 2011-2012)

- **Het ontwikkelen van een instrument voor het meten van de vakinhoudelijke en vakdidactische kennis van toekomstige leerkrachten basisonderwijs in het domein van de rationale getallen.**
- Het in kaart brengen van deze vakinhoudelijke en vakdidactische kennis bij toekomstige leerkrachten lager onderwijs en secundair onderwijs.
- De relatie tussen vakinhoudelijke en vakdidactische kennis
- Verschillen tussen deze vakinhoudelijke en vakdidactische kennis en de relatie ertussen over verschillende opleidingsniveaus heen

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Meetinstrument

- Twee verschijningsvormen van rationale getallen
 - Breuken
 - Kommagetallen
- Vakinhoudelijke kennis (content knowledge; CK)
 - Conceptuele kennis
 - Concept breuk (bijv. breuk als deel van een geheel, gelijkwaardigheid tussen breuken)
 - Concept kommagetal (bijv. dichtheid, ordenen van kommagetallen)
 - Procedurele kennis
 - Bewerkingen met breuken (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen)
 - Bewerkingen met kommagetallen (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen)

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Meetinstrument

- Vakdidactische kennis (pedagogical content knowledge; PCK)
 - Kennis over misvattingen en leermoeilijkheden bij leerlingen
 - Kennis over representatievormen en instructietechnieken
- Niveau: eind BaO
- Complementaire vakinhoudelijke en vakdidactische items
 - Concept breuken/kommagetallen versus bewerkingen met breuken/kommagetallen
 - Gelijkaardige wiskundige ideeën (gelijkwaardigheid van breuken, rangschikken van kommagetallen, ...)

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Meetinstrument

		CK	PCK	
			Misvattingen	Representaties
Breuken	Conceptuele kennis	4	2	2
	Procedurele kennis	Optelling	2	1
		Altrekking	2	1
		Vermenigvuldiging	2	1
Deling	2	1		
Kommagetallen	Conceptuele kennis	4	2	2
	Procedurele kennis	Optelling	2	1
		Altrekking	2	1
		Vermenigvuldiging	2	1
Deling	2	1		
Totaal		24	12	12

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Breuken (conceptuele kennis)

• CK

Vul aan met >, < of = en noteer je werkwijze.

$$\frac{9}{63} \dots \frac{2}{14}$$

• PCK (representaties)

Gegeven:
In een les ontrent de gelijkwaardigheid van breuken, gebruikt een leerkracht volgende tekening om $\frac{1}{2}$ met $\frac{2}{4}$ te vergelijken.



Gevraagd:
Geef een goede reden waarom je dit zelf niet zou doen om aan je leerlingen te tonen dat $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$ gelijkwaardig zijn?

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Kommagetallen (procedurele kennis)

• CK

Los op met behulp van hoofdrekenen en noteer je werkwijze.

$$0,9 + 4,18 =$$

• PCK (misvattingen)

Gegeven:
Een leerling werkt de volgende oefening als volgt uit:

Los op:
 $0,99 + 0,1 = \frac{1}{10}$

Gevraagd:
a) Is dit antwoord juist of fout?

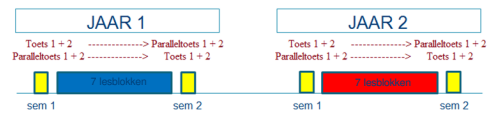
b) Noteer de vermoedelijke redenering van de leerling.

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Interventiestudie: lessenreeks rationale getallen



- Testafname → Toetsboekje 1 / Paralleltoetsboekje 1
- Toetsboekje 2 / Paralleltoetsboekje 2
- Oude studentencursus
- Nieuwe studentencursus

substantieel hogerschouwen
vives

THOMAS
MORE

GROEP 7

KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Toets - paralleltoets

<p>VRAAG 14</p> <p>Vul aan met >, < of = en noteer je werkwijze.</p> $\frac{9}{63} \dots \frac{2}{14}$	<p>VRAAG 14</p> <p>Vul aan met >, < of = en noteer je werkwijze.</p> $\frac{9}{72} \dots \frac{3}{27}$
<p>VRAAG 16</p> <p>Rangschik de getallen van klein naar groot.</p> <p>0,33 0,8 0,242 0,4 0,71</p>	<p>VRAAG 16</p> <p>Rangschik de getallen van klein naar groot.</p> <p>0,22 0,5 0,343 0,7 0,51</p>
<p>VRAAG 22</p> <p>Gegeven: Elena maakte $\frac{1}{2}$ liter vers geperst fruitsap. Ze gaf daarvan $\frac{1}{4}$ aan haar moeder. Hoeveel liter geperst fruitsap kreeg haar moeder?</p> <p>Gevraagd: Noteer de passende wiskundige bewerking met breuken en los op.</p>	<p>VRAAG 22</p> <p>Gegeven: Papa brouwde $\frac{6}{10}$ liter porto. Hij gaf daarvan $\frac{1}{5}$ aan zijn broer. Hoeveel liter porto kreeg zijn broer?</p> <p>Gevraagd: Noteer de passende wiskundige bewerking met breuken en los op.</p>

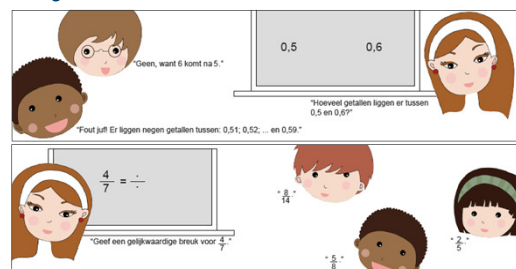
KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

Pijlers van de nieuwe lessenreeks

1) Aandacht voor voorkennis van en moeilijkheden bij leerlingen



KU LEUVEN

Panama-conferentie 16-17/02/2014

Rekenen-wiskunde XL

