Rekenen-informatica

Jan Bergstra, Inge Bethke, Alban Ponse

sectie Theory of Computer Science
Instituut voor Informatica, FNWI
Universiteit van Amsterdam

https://staff.fnwi.uva.nl/
{j.a.bergstra/,i.bethke/,a.ponse/}

PANAMA 2015

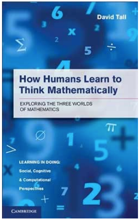
1. Rekenen-informatica (R-i)

1. R-i = accentverschuiving ten opzichte van rekenen-wiskunde:
   - syntax is prominent en vraagt om semantiek en omgekeerd,
   - eindige structuren zijn van groot belang,
   - oneindige structuren zijn zinvol ter vereenvoudiging van families van eindige structuren.
2. Zinvol om bij structuren met een additioneel element **a** te werken (voor alle operaties) dat kan dienen als fout-waarde (*sink*).
3. Getalsystemen zoals $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ zijn abstracte datatypen; voor elk daarvan bestaan verschillende concrete datatypen.
4. Termherschrijfsystemen: bruikbaar om algoritmen te noteren. (Met algebraïsche specificaties die een volledig termherschrijfsysteem vormen komt men aan concrete datatypen voor deze getalsystemen.)

2. Breuken I
Literatuur

David Tall - concept images

- 1981: (with Shlomo Vinner) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, (12):151–169.
- 2006: Emeritus Professor of Mathematical Thinking at Warwick University.



- Visie: het geeft niet als er in een verhaal strijdigheden zitten, dat lost zich in een aantal slagen wel op.
- 2014: *How Humans Learn to Think Mathematically*.

Friedhelm Padberg - Didaktik der Bruchrechnung

- Arithmetikunterricht in der Primarstufe.
- Rationale Zahlen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe.
- 1989/ .. /2009 (4e druk): *Didaktik der Bruchrechnung*.
- Universitätsprofessor - Universität Bielefeld.

- breuk is een complex begrip, geen totaal consistent verhaal, o.i. in het verlengde van Tall.
- Iets van breuken weten = verschillende perspectieven erop in onderling verband kennen.

Stefan Rollnik - Proefschrift over “den Bruchrechenunterricht”

Das pragmatische Konzept für den Bruchrechenunterricht

Ein neues didaktisches Konzept für den Bruchrechenunterricht in der Sekundarstufe I, das anders als die bisher dominierenden Konzepte nicht auf der konkreten Ebene, sondern im Formalen ansetzt.
Ausgehend von dem Wunsch, jeden Quotienten zweier natürlicher Zahlen wieder als Zahl zu akzeptieren, wird der Zahlbereich erweitert. Alle Rechenregeln für diese Zahlen können in einer Teilmenge, nämlich in der Menge der natürlichen Zahlen, gewonnen und per Permanenzprinzip auf den neuen Zahlbereich übertragen werden.

Außerdem wird ein neuer, multiplikativer Algorithmus für die Entwicklung der Perioden „unendlicher Dezimalbrüche“ vorgestellt.

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors der Philosophie am Institut für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Flensburg

vorgelegt im November 2009 von
Stefan Rollnik,
geb. am 2. 5. 1968, Kiel

Gutachter:
Prof. Dr. Eugen Peter Bauhoff, Institut für Mathematik und ihre Didaktik, Universität Flensburg
Prof. Dr. Ulrich Spengler, Mathematisches Seminar, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel

1

- 2001 - 2009:
  Docent op diverse scholen.
- 2009: Universität Flensburg, Abt. für Mathematik und ihre Didaktik.
- 2010: proefschrift
  Das pragmatische Konzept für den Bruchrechenunterricht.

1. Kies een route zonder interne inconsistentie,
2. spreek niet over teller en noemer,
3. breuk = rationaal getal.

3. Breuken II

Wat is het probleem? We willen solide redeneren over breuken met de gewone rekenregels bij de hand...

We willen de breuken ook zien als uitdrukkingen met teller (functie *teller*( )) en noemer (functie *noemer*( )) zodat b.v.

$$teller(\frac{1}{2}) = 1 \quad \text{en} \quad noemer(\frac{1}{2}) = 2.$$

Nu levert gewone logica, in combinatie met $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ het volgende:

$$1 = teller(\frac{1}{2}) = teller(\frac{2}{4}) = 2$$

en dat kan niet kloppen. Hoe redeneren we over breuken zonder dit probleem tegen te komen?

Is dit echt een probleem?

- Dit is niet eenvoudig en ook niet echt onschuldig. Wie zegt
  1. "een breuk IS een rationaal getal", en
  2. "een breuk HEEFT een teller en een noemer"

  komt deze tegenstrijdigheid onvermijdelijk tegen.

- Opties :
  1. Inconsistent concept image volgens (Tall & Vinner): zelfde concept (breuk) heeft veel verschillende associaties, naderhand aanscherpen tot consistente visie.
  2. (Padberg): bij 1) en 2) hierboven gaat het om verschillende noties van "breuk".
  3. Kiezen: b.v. breuk is notatie (expressie, naam) voor rationaal getal, of juist andersom: (Rollnik) breuk heeft geen teller en noemer, breuk is rationaal getal.

- Alternatief idee: behandeling via paraconsistentie logica.

Informele logica en de praktijk

Paraconsistentie:

1. Uit een onware bewering kun je niet alles afleiden.
2. Als ik zeg $5 = 8$ volgt niet dat ik ontslag neem of dat ik mijn huis verkoop. (Dit vergt een betere logische boekhouding dan "gewone logica" vereist.)
3. Wiskunde willen verklaren met een tweewaardige logica en het simpelste bewijssysteem is naïef.
4. Wiskunde werkt met natuurlijke taal en met "*informal logic*".
5. Informele logica (IL) is VEEL "moeilijker" dan de klassieke tweewaardige logica (KTL).
6. Maar IL is de realiteit en niet KTL, ook op school, en ook voor kinderen en voor docenten.

Paraconsistentie concreet:

- Chunk en permeate methode (Brown & Priest, 2004).
- Een chunk is een verzameling van rekenregels.
- Bijzonder geval: twee chunks, genaamd source en target.
- Mixed reasoning = switchen tussen source en target context.

In onze toepassing zijn source en target beide consistente onderdelen van het *concept image* (Tall & Vinner) van breuken die samen strijdig zijn.

Allereerst de source context: breuken zijn expressies, en

- Tellers en noemers bestaan: $teller(\frac{3}{5}) = 3$ en $noemer(\frac{3}{5}) = 5$
- Breuken met gelijke noemer kun je optellen: $\frac{3}{5} + \frac{7}{5} = \frac{3+7}{5}$
- Breuken kun je vermenigvuldigen: $\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2}$
- Breuken met verschillende noemer kun je NIET optellen, anders gezegd, daar komt een fout uit (we schrijven **a** voor een foutwaarde):

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{2} = \mathbf{a}$$

(vijfden en halven zijn als appels en peren).

- Breuken kun je niet vereenvoudigen: $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} \neq \frac{3}{5}$. Immers:

$$teller(\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2}) = 6 \neq 3 = teller(\frac{3}{5})$$

Paraconsistentie: de permeate.

De permeate bevat een deel van de informatie over de source, in dit geval identiteiten zonder **a**, *teller*() en *noemer*().

Bijvoorbeeld

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{5} = \frac{3+7}{5}$$

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 2}$$

De permeate bevat informatie over breuken die we in een volgend stadium mogen gebruiken.

Paraconsistentie: de target.

In de target context kun je breuken wel vereenvoudigen (het zijn daar rationale getallen), maar kun je geen teller en noemer bepalen.

- In target wel: $\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{3}{5}$
- Maar in target zijn geen tellers en noemers, of zo men wil:

$$\mathit{teller}(\frac{3}{5}) = \mathbf{a} \quad \text{en} \quad \mathit{noemer}(\frac{3}{5}) = \mathbf{a}$$

  (zodat tellers en noemers nooit kunnen verschillen).

Nu blijkt de inconsistentie niet op te treden en bovendien kun je nu gewoon afleiden dat $\frac{3}{5} + \frac{7}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 7 \cdot 5}{5 \cdot 2}$

4. Termherschrijven

Natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ en termherschrijven:

$$2 + 2 \rightarrow 4$$
$$2 + 1 \rightarrow 3$$
$$1 + 2 \rightarrow 3$$
$$2 + 0 \rightarrow 2$$
$$0 + 2 \rightarrow 2$$
$$enz.$$

- Niet: $4 \rightarrow 2 + 2$ enz.
- en natuurlijk ook: $64 + 192 \ \rightarrow \ 256$ enz.
- lastiger: is 0600000000 (geen mobiel nr) een natuurlijk getal?

Dit kan systematisch worden aangepakt...

Natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ in binaire notatie:

dec	*bin*
0	0
1	1
2	1ˆ0
3	1ˆ1
4	(1ˆ0)ˆ0
⋮	
9	((1ˆ0)ˆ0)ˆ1
18	10010
37	100101

Dus: geneste rijen gemaakt van 0 en 1 met de bitboomconstructor _ˆ_

Voorbeeld: 1ˆ1 is de binaire representatie van $2 \cdot 1 + 1$

(Soms laten we haakjes en ˆ in binaire getallen weg.)

Natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ in binaire notatie en hun decimale waarde:

dec	*bin*	*bin* $\xrightarrow{[\![\cdot]\!]}$ *dec*
0	0	$[\![0]\!] = 0$
1	1	$[\![1]\!] = 1$
2	1^0	$[\![1\hat{}0]\!] = 2 \cdot [\![1]\!] + [\![0]\!] = 2$
3	1^1	$[\![1\hat{}1]\!] = 2 \cdot [\![1]\!] + [\![1]\!] = 3$
4	(1^0)^0	$[\![(1\hat{}0)\hat{}0]\!] = 2 \cdot [\![1\hat{}0]\!] + [\![0]\!] = 4$

Binaire (positieve) getallen moeten voldoen aan deze conditie:
het enig rijtje dat met 0 begint is 0, ofwel termherschrijven:

$$0\hat{}0 \to 0$$

$$0\hat{}1 \to 1$$

...

$$(((0\hat{}1)\hat{}0)\hat{}0)\hat{}1 \to ((1\hat{}0)\hat{}0)\hat{}1$$

Een (term)herschrijfregel voor de representatie van natuurlijke getallen in binaire representatie:

$$0\,\hat{}\,x \to x$$

Dus: $(0\,\hat{}\,0)\,\hat{}\,0 \to 0\,\hat{}\,0 \to 0$, ofwel $(0\,\hat{}\,0)\,\hat{}\,0 \twoheadrightarrow 0$ (eindig veel stappen) en b.v.

$$((0\,\hat{}\,0)\,\hat{}\,0)\,\hat{}\,1 \twoheadrightarrow 1$$

Voor de optelling willen we (decimale representatie)

$(1\,\hat{}\,0) + (1\,\hat{}\,0) \twoheadrightarrow 100$	$2 + 2 \twoheadrightarrow 4$
$1 + (1\,\hat{}\,0) \twoheadrightarrow 11$	$1 + 2 \twoheadrightarrow 3$
$(1\,\hat{}\,0) + 1 \twoheadrightarrow 11$	$2 + 1 \twoheadrightarrow 3$
$0 + (1\,\hat{}\,0) \twoheadrightarrow 10$	$0 + 2 \twoheadrightarrow 2$

Dit kan systematisch worden aangepakt...

Een TRS (Term Rewrite System) voor rekenen met natuurlijke getallen in binaire representatie (Bouma & Walters, 1989):

[1]	$0\hat{}x \to x$	[6]	$1 + (x\hat{}y) \to x\hat{}(1 + y)$
[2]	$x\hat{}(y\hat{}z) \to (x + y)\hat{}z$	[7]	$(x\hat{}y) + z \to x\hat{}(y + z)$
[3]	$0 + x \to x$	[8]	$x \cdot 0 \to 0$
[4]	$1 + 0 \to 1$	[9]	$x \cdot 1 \to x$
[5]	$1 + 1 \to 1\hat{}0$	[10]	$x \cdot (y\hat{}z) \to (x \cdot y)\hat{}(x \cdot z)$

Merk op:

$$\begin{array}{ccc} 0\hat{}(0\hat{}0) & \xrightarrow{[1]} & 0\hat{}0 \\ {[2]}\downarrow & & \downarrow[1] \\ (0+0)\hat{}0 & \overset{[3],[1]}{\twoheadrightarrow} & 0 \end{array}$$

(op twee manieren)

Afspraak mbt decimale notatie:

$$[\![0]\!] = 0 \qquad [\![x\hat{\ }y]\!] = 2 \cdot [\![x]\!] + [\![y]\!]$$

$$[\![1]\!] = 1 \qquad [\![x+y]\!] = [\![x]\!] + [\![y]\!]$$

$$(\text{en } [\![x \cdot y]\!]) = [\![x]\!] \cdot [\![y]\!])$$

Toepassing op de herschrijfregel [2], dus

$$x\hat{\ }(y\hat{\ }z) \to (x+y)\hat{\ }z$$

levert

$$\begin{aligned} [\![x\hat{\ }(y\hat{\ }z)]\!] &= 2 \cdot [\![x]\!] + [\![y\hat{\ }z]\!] \\ &= 2 \cdot [\![x]\!] + 2 \cdot [\![y]\!] + [\![z]\!] \\ &= 2 \cdot [\![x+y]\!] + [\![z]\!] \\ &= [\![(x+y)\hat{\ }z]\!] \end{aligned}$$

Dus herschrijfregel [2] behoudt “decimale waarde” en dit geldt voor alle herschrijfregels [1] – [10].

De herschrijfregel [1], dus

$$0\hat{\ } x \to x$$

past zowel op het rijtje $(0\hat{\ }1)\hat{\ }1$ als op $0\hat{\ }(1\hat{\ }1)$ en levert dezelfde waarde op, namelijk $1\hat{\ }1$.

Vraag: vertegenwoordigen $1\hat{\ }(1\hat{\ }0)$ en $(1\hat{\ }1)\hat{\ }0$ dezelfde waarde?

Voor $(1\hat{\ }1)\hat{\ }0$ geldt: $[\![(1\hat{\ }1)\hat{\ }0]\!] = 2 \cdot [\![1\hat{\ }1]\!] + 0 = 6$.

Voor $1\hat{\ }(1\hat{\ }0)$ geldt: $[\![1\hat{\ }(1\hat{\ }0)]\!] = 2 \cdot 1 + [\![1\hat{\ }0]\!] = 4$.

Dus in het algemeen geldt niet dat $(x\hat{\ }y)\hat{\ }z$ en $x\hat{\ }(y\hat{\ }z)$ dezelfde waarde vertegenwoordigen...

Met andere woorden: de bitboomconstructor $\_\hat{\ }\_$ is niet associatief.

1. Een term t heet een normaalvorm als er geen herschrijfregels meer op toepasbaar zijn. In 't voorbeeld:

$$1\,\hat{}\,0 \not\rightarrow$$

en 0, 1, $1\,\hat{}\,0$, $1\,\hat{}\,1$, $(1\,\hat{}\,0)\,\hat{}\,0$, $(1\,\hat{}\,0)\,\hat{}\,1$ zijn normaalvormen.

2. Een TRS heet terminerend als iedere rij herschrijvingen eindigt.

3. Een TRS heet confluent als voor ieder paar herschrijvingen $s \twoheadrightarrow t_1$, $s \twoheadrightarrow t_2$ er een term t is met $t_1 \twoheadrightarrow t$ en $t_2 \twoheadrightarrow t$.

   In een diagram:
$$\begin{array}{ccc} s & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & t_1 \\ \downarrow\!\!\!\downarrow & & \downarrow\!\!\!\downarrow \\ t_2 & \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow & t \end{array}$$

Minimale eis: TRS is terminerend en confluent voor gesloten termen.

(Het voorbeeld van onze TRS voldoet hieraan.)

Met deze TRS, dus

[1]	$0\hat{\ }x \to x$	[6]	$1 + (x\hat{\ }y) \to x\hat{\ }(1+y)$
[2]	$x\hat{\ }(y\hat{\ }z) \to (x+y)\hat{\ }z$	[7]	$(x\hat{\ }y) + z \to x\hat{\ }(y+z)$
[3]	$0 + x \to x$	[8]	$x \cdot 0 \to 0$
[4]	$1 + 0 \to 1$	[9]	$x \cdot 1 \to x$
[5]	$1 + 1 \to 1\hat{\ }0$	[10]	$x \cdot (y\hat{\ }z) \to (x \cdot y)\hat{\ }(x \cdot z)$

berekenen we een typisch voorbeeldje:

$$(1\hat{\ }0) + (1\hat{\ }0) \xrightarrow{[7]} 1\hat{\ }(0 + (1\hat{\ }0))$$

$$\xrightarrow{[3]} 1\hat{\ }(1\hat{\ }0) \xrightarrow{[2]} (1+1)\hat{\ }0 \xrightarrow{[5]} (1\hat{\ }0)\hat{\ }0$$

Dus: $(1\hat{\ }0) + (1\hat{\ }0) \twoheadrightarrow (1\hat{\ }0)\hat{\ }0$ (decimaal: $2 + 2 \twoheadrightarrow 4$).

De normaalvormen voor positieve binaire getallen zijn

0, 1, $1\hat{}0$, $1\hat{}1$, $(1\hat{}0)\hat{}0$, $(1\hat{}0)\hat{}1$ etc.

Gehele getallen $\mathbb{Z}$ en termherschrijven: breid binaire notatie uit met

$$-(x)$$

voor elk binair getal x ongelijk 0.

Een TRS voor rekenen met deze gehele getallen is wat groter: in totaal 25 herschrijfregels...

Normaalvormen: 0, 1, $1\hat{}0$, $1\hat{}1$, $(1\hat{}0)\hat{}0$, ...
$-(1)$, $-(1\hat{}0)$, $-(1\hat{}1)$, $-((1\hat{}0)\hat{}0)$, ...

5. Relevantie voor onderwijs

Motto: overal bewust met syntax en typering omgaan.

- Eenvoudige TRS'en voor $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}$:
  - binaire representatie: efficiënt (logaritmische notatie),
  - decimale representatie: even moeilijk als binair, wat grotere TRS.

  Dit brengt de algoritmiek van $+$ en $\cdot$ over de toonbank.

- Door syntax precies te hebben weet je ook wat het is om informatie bewust weg te laten en zo inconsistenties te vermijden.

  Dat levert een sterkere theorie op de achtergrond.

- De logica van de wiskunde breng je dichter bij de logica van het dagelijks leven.

Opmerkingen, vragen, discussie, ... of, als we tijd hebben ...

6. Unaire getallen & QUIZ

Natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ in unaire notatie: (en hun decimale waarde)

dec	*unair*	$unair \xrightarrow{[\![\cdot]\!]} dec$
0	e	$[\![e]\!] = 0$
1	$e; e$	$[\![e; e]\!] = 1$
2	$(e; e); e$	$[\![(e; e); e]\!] = 2$
$\vdots$		

Dus: unaire getallen zijn rijtjes van een aantal e-voorkomens.

(e staat voor "eenheid" en $\_; e$ is de eenheid-append)

Afspraak mbt decimale notatie: $[\![e]\!] = 0$

$$[\![x; e]\!] = [\![x]\!] + 1$$

QUIZ

Een TRS (Term Rewrite System) voor rekenen met natuurlijke getallen in unaire representatie

[1] $x + e \rightarrow\ ?$

[2] $x + (y; e) \rightarrow\ ?$

[3] $x \cdot e \rightarrow\ ?$

[4] $x \cdot (y; e) \rightarrow\ ??$

Een TRS (Term Rewrite System) voor rekenen met natuurlijke getallen in unaire representatie

[1] $x + e \to x$

[2] $x + (y; e) \to (x; e) + y$

[3] $x \cdot e \to e$

[4] $x \cdot (y; e) \to (x \cdot y) + x$

Termherschrijven:

$$
\begin{aligned}
((e;e);e) + ((e;e);e) &\to (((e;e);e);e) + (e;e) && \text{(met [2])}\\
&\to ((((e;e);e);e);e) + e && \text{(met [2])}\\
&\to (((e;e);e);e);e && \text{(met [1])}
\end{aligned}
$$

Dus $((e;e);e) + ((e;e);e) \twoheadrightarrow (((e;e);e);e);e$

(eindig veel stappen; decimaal: $2 + 2 \twoheadrightarrow 4$).

Met deze TRS, dus

$$[1] \quad x + e \to x$$
$$[2] \quad x + (y; e) \to (x; e) + y$$
$$[3] \quad x \cdot e \to e$$
$$[4] \quad x \cdot (y; e) \to (x \cdot y) + x$$

berekenen we nog een typisch voorbeeldje (decimaal: $1 \cdot 1 \twoheadrightarrow 1$)

$$\begin{array}{ccccc}
(e; e) \cdot (e; e) & \xrightarrow{[4]} & ((e; e) \cdot e) + (e; e) & \xrightarrow{[3]} & e + (e; e) \\
 & & [2] \downarrow & & \downarrow [2] \\
 & & (((e; e) \cdot e); e) + e & \xrightarrow{[3]} & (e; e) + e \\
 & & [1] \downarrow & & \downarrow [1] \\
 & & ((e; e) \cdot e); e & \xrightarrow{[3]} & e; e
\end{array}$$

Dus: $(e; e) \cdot (e; e) \twoheadrightarrow e; e$ (welk pad we ook volgen).

Gehele getallen $\mathbb{Z}$: breid unaire notatie uit met $-(x)$ voor elk unair getal ongelijk e (dus ongelijk "nul"). Bijbehorende TRS:

[1]	$x + e = x$	[7]	$e + x = x$
[2]	$x + y; e = x; e + y$	[8]	$(x; e) + (-(y; e)) = x + (-y)$
[3]	$x \cdot e = e$	[9]	$(-(y; e)) + (x; e) = x + (-y)$
[4]	$x \cdot (y; e) = (x \cdot y) + x$	[10]	$(-x) + (-y) = -(x + y)$
[5]	$-e = e$	[11]	$x \cdot (-y) = -(x \cdot y)$
[6]	$-(-x) = x$	[12]	$(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$

Voorbeeld: $(e; e) + (-(e; e); e) \overset{[8]}{\to} e + (-(e; e)) \overset{[7]}{\to} -(e; e)$

Normaalvormen: e, $e; e$, $(e; e); e$, $((e; e); e); e$, ...

$-(e; e)$, $-((e; e); e)$, $-(((e; e); e); e)$, ...