

## Rekenen-wiskundeonderwijs dat leerlingen voorbereidt op hun toekomst

Koeno Gravemeijer  
koeno@gravemeijer.nl

1



2

## Overzicht

- Globalisering en informatisering
- 21<sup>st</sup>. Century skills
- Probleem-georiënteerd rekenonderwijs
- Contexten interpreteren & Globaal rekenen
- Leerstof inhouden

3

## Asscher: robots pikken banen in

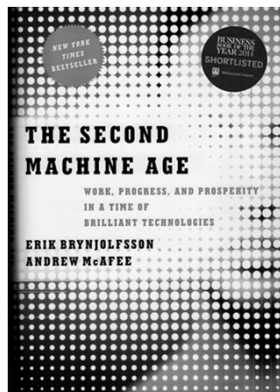
NOS website maandag 29 sep 2014, 15:09 (Update: 29-09-14, 20:21)



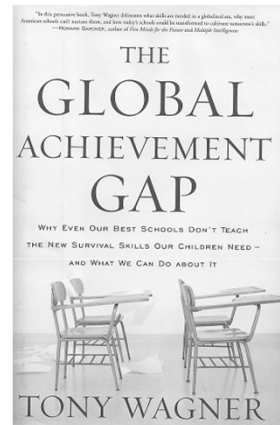
Lodewijk Asscher ANP

Volgens Asscher moet het onderwijs daarom de komende jaren verbeteren, zodat jongeren vaardigheden leren waar in de toekomst wel vraag naar zal zijn: "Als robots laaggeschoold en routinematig werk gaan overnemen moeten we onze jeugd opleiden voor het andere werk."

4



5



Why even our best schools don't teach the survival skills our children need – and what we can do about it

6

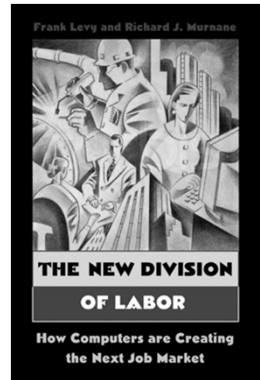
## Nederland: doorgaande leerlijn rekenen

- “In die schoolloopbaan zitten een paar lastige “drempels” (...). Onze niveaubeschrijvingen moeten helpen een beetje soepel over die drempels te komen.”
- “Voor de inhoudsbepaling hebben wij aansluiting gezocht bij bestaande documenten als examenprogramma’s, kerndoelen, toetsen en voorbeeldmateriaal dat gebruikt wordt in onderzoeken.”

Oriëntatie op de reken-wiskundige kennis die mensen nodig hebben om in de informatiemaatschappij van de toekomst te kunnen functioneren ontbreekt.

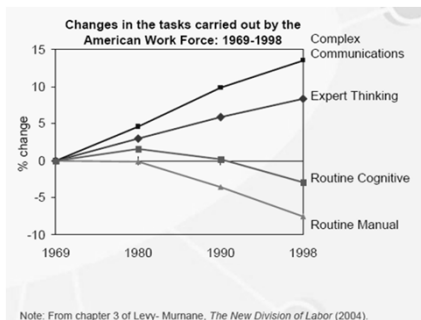
7

- Levy & Murnane (2004)
- The New Division of Labor



8

## The Changing Nature of the Workforce



9

## Informatiemaatschappij & global economy

Routinetaken verdwijnen (Levy & Murnane)

- Taken die kunnen worden opgesplitst in routines worden overgedragen aan computers, of uitbesteed aan lagelonenlanden
- Veel banen zijn al verdwenen, in de maakindustrie, administratief werk en programmeren

10

## Informatiemaatschappij & global economy

Routinetaken verdwijnen (Levy & Murnane)

- Overblijvende banen vragen:
  - sociale vaardigheden, flexibiliteit, creativiteit en een blijvend leren
  - werken met computers of gecomputeriseerde apparatuur.

11

## Informatiemaatschappij & global economy

Tweedeling in de samenleving

- onderzoek in de UK (Goos en Manning) tweedeling in ‘lousy jobs’ en goedbetaalde ‘lovely jobs’
- De lovely jobs vragen flexibiliteit, probleemoplosvaardigheden, een leven lang leren en sociale vaardigheden

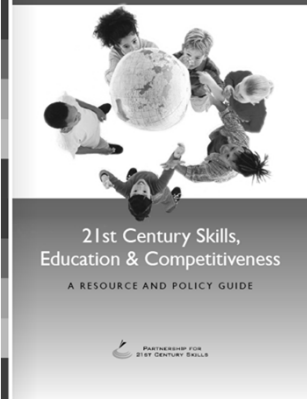
12



**D**ie veranderingen in de mbo-banen komen dus nooit meer terug. Al die verdwenen mbo-banen komen dus nooit meer terug.

Administratie bij de...

13



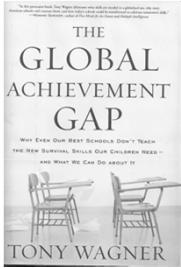
21<sup>st</sup>. Century Skills

21st Century Skills, Education & Competitiveness  
A RESOURCE AND POLICY GUIDE

PARTNERSHIP FOR 21ST CENTURY SKILLS

14

**21<sup>st</sup>. Century Skills**



Verwachtingen die CEO's uitspreken staan haaks op wat in scholen bieden

Kritisch denken  
Probleem oplossen  
Effectief communiceren  
Beoordelen & analyseren van informatie

“Asking the right questions”

15

**21<sup>st</sup>. Century Skills**

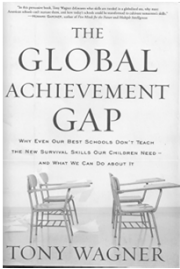
**Analyse van Voogt & Pareja Roblin (2010):**

**Projecten:**

- Partnership for 21st Century Skills
- EnGauge
- Assessment and Teaching of 21st Century Skills
- National Educational Technology Standards (NETS)
- Technological Literacy for the 2012 National Assessment of Educational Progress (NAEP)
- Studies carried out by the European Union, OECD and UNESCO

16

**Bredere doelstelling Tony Wagner**



**“Jury-ready”:**  
*Would they know how to distinguish fact from opinion, weigh evidence, listen with both head and heart, wrestle with the sometimes conflicting principles of justice and mercy, and work to seek the truth with their fellow jurors?”*

Weten ze hoe feiten te onderscheiden van meningen, bewijs te wegen, te luisteren met hoofd en hart, te worstelen met soms conflicterende principes van gerechtigheid en barmhartigheid, en samen te werken met hun collega-juryleden?

17

**Kerdoelen PO**

“In de rekenwiskundeles leren kinderen een probleem wiskundig op te lossen en een oplossing in wiskundetaal aan anderen uit te leggen. Ze leren met respect voor ieders denkwijze wiskundige kritiek te geven en te krijgen. Het uitleggen, formuleren en noteren en het elkaar kritiseren leren kinderen als specifiek wiskundige werkwijze te gebruiken om alleen en samen met anderen het denken te ordenen, te onderbouwen en fouten te voorkomen.”

18

## Het realiseren van probleem-georiënteerd, interactief reken-wiskundeonderwijs

19

- Onderwijs gericht op 21<sup>st</sup>. Centurys Skills:
  - probleem oplossen
  - kritisch denken
  - werken ingroepen
  - communiceren
  - ...
- Probleem-georiënteerd, interactief wiskundeonderwijs
- Realiseren van probleem-georiënteerd onderwijs is lastig

20

## Het realiseren van probleem-georiënteerd, interactief wiskundeonderwijs

1. Kassencultuur/didactisch contract
2. Taak- vs ego-motivatie
3. Cultiveren van wiskundige interesse

21

## 1. Didactisch Contract

A: Kunt u mij zeggen waar de Kerkdwarstraat is?

22

## Didactisch Contract

A: Kunt u mij zeggen waar de Kerkdwarstraat is?  
 B: De Kerkdwarstraat, dan moet u recht doorgaan tot de tweede stoplichten. Daar gaat u rechts. En dan neemt u de eerste links.

23

## Didactisch Contract

A: Kunt u mij zeggen waar de Kerkdwarstraat is?  
 B: De Kerkdwarstraat, dan moet u recht doorgaan tot de tweede stoplichten. Daar gaat u rechts. En dan neemt u de eerste links.  
 A: Oké, prima: Rechtdoor tot de tweede stoplichten, en daar naar rechts. En dan de eerste links. Goed zo, andere vraag: Kunt u nu ook vertellen waar de Middenweg is?

24

### Didactisch Contract

- Social norms (Cobb, Yackel) = onderlinge verwachtingen en verplichtingen leraar en leerlingen; rolverdeling:
- Rol van de leraar: uitleggen --- niet uitleggen
- Rol van de leerling: navolgen --- zelf uitvinden

25

### Gangbare Sociale Normen

- Vraag-antwoord evaluatie patroon
- Van de leerlingen wordt verwacht datgene reproduceren wat eerder is voorgedaan
- Van de leraar wordt verwacht dat hij/zij uitleg geeft

26

### Probleem-gerichte Sociale Normen

- Van de leerlingen wordt verwacht:
  - Hun oplossingen uitleggen & onderbouwen
  - Proberen anderen te begrijpen
  - Vragen om verheldering
  - Ter discussie stellen waar ze het niet mee eens zijn
- Van de leraar wordt verwacht:
  - Dat hij/zij opvragen aanbiedt en vragen stelt, die de leerlingen stimuleren tot nadenken, om daarmee te bereiken dat ze hun huidige kennis uitbouwen.

27

### Verandering van didactisch contract

Docent: Hoeveel meer groene dan rode zijn er. Hoeveel meer?

Donna: Zes.

Docent: Zijn dat er zes? Klopt dat klas?

Lln. : Roepen ja en nee.

Donna: Eh, zeven.

Docent: Zeven.

Donna: Acht. Acht.

28

Docent: Hoeveel? Denk er nog even over na Donna.

-----

Later blijkt het antwoord toch zes te zijn.

Donna: (Protesteert bij de docent.)  
Ik zei zes, maar u zei, "Nee".

Docent: Wacht even, luister, luister. Wat heeft de meester jullie altijd geleerd?  
(Tegen Donna:) Hoe heet je?

Donna: Ik heet Donna Walters.

Docent: Hoe heet je?

29

Donna: Ik heet Donna Walters.

Docent: Als ik je nu weer zou vragen, "Hoe heet je?", zou je dan zeggen dat je Mary heet?

Donna: Nee.

Docent : Waarom niet?

Donna: Omdat ik geen Mary heet.

Docent: En je weet dat jouw naam geen Mary is. Als je niet helemaal zeker zou zijn geweest, zou je misschien hebben gezegd dat je naam Mary is. Maar elke keer dat ik je het vroeg zei je dat je Donna heette, omdat..? Omdat je weet dat je naam, wat is?

30

Donna: Donna.

Docent: Donna. En ik kan niet maken dat je gaat zeggen dat je Mary heet. En zo had je ook moeten zeggen: "Meneer het is zes. En ik kan dat ook uitleggen. Dat probeer ik jullie nu steeds te leren.

31

### Cultiveren van een probleem-georiënteerde klassencultuur

- Vragen om uitleg
  - Kun je uitleggen hoe je daaraan komt?
- Leerlingen uitnodigen vragen te stellen
  - Wie heeft een vraag voor Tim?
- Het probleem doorgeven
  - Wie kan Paula's vraag beantwoorden?
- Om een persoonlijk oordeel vragen
  - Anna zegt dat het € 16,25 kost, zijn jullie het daarmee eens?
- Bevorderen dat de leerlingen luisteren en proberen te begrijpen wat er wordt gezegd
  - Heb je begrepen wat zij zei, kun je het mij uitleggen?

32

## 2. Motivatie/intresse

Bevorderen van taak- versus ego-motivatie:

### 3. Wiskundige intresse

- Cultiveren van wiskundige intresse (wiskunde om de wiskunde):
  - Wat is het algene principe hier?
  - Werkt dit altijd?
  - Kunnen we dat bewijzen?
- Oprechte belangstelling van de leraar voor het denken van de leerling

33

## Welke wiskunde?

34

## Welke wiskunde?



**Conrad Wolfram**

Mathematician, technologist and entrepreneur. Strategic director and European co-founder/CEO of the Wolfram group [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com)  
 Founder [computerbasedmath.org](http://computerbasedmath.org)

35

## Conrad Wolfram

- Wiskunde bedrijven:
  1. Kijken waar wiskunde kan worden toegepast
  2. Het vertalen van een vraag of een probleem in een wiskundig probleem
  3. Het wiskundige probleem oplossen
  4. De oplossing terugvertalen en de oplossing evalueren

36

## Conrad Wolfram

- Wiskunde bedrijven:
  1. Kijken waar wiskunde kan worden toegepast
  2. Het vertalen van een vraag of een probleem in een wiskundig probleem
  3. **Het wiskundige probleem oplossen**
  4. De oplossing terugvertalen en de oplossing evalueren

37

## Conrad Wolfram

- Wiskunde bedrijven:
  1. Kijken waar wiskunde kan worden toegepast
  2. Het vertalen van een vraag of een probleem in een wiskundig probleem
  3. **Het wiskundige probleem oplossen**
  4. De oplossing terugvertalen en de oplossing evalueren

→ computer-based mathematics education

38

## Conrad Wolfram

“If computers do all the mathematics,  
What should we do in mathematics  
education?”

39

## Informatisering

Levy & Murnane:

- Twee rollen computer:
  - Taken die worden overgenomen
  - Aanvullend; uitbreiding menselijke mogelijkheden

→ Rekenen/wiskunde: niet richten op wat computers (beter) kunnen, maar op rekenen /wiskunde die aanvullend is

40

*Onderwijs richten op kennis en vaardigheden die van belang zijn voor het werken met computers of gecomputeriseerde apparaten*

- het kunnen *herkennen* van problemen die wiskundig kunnen worden opgelost,
- het kunnen *vertalen* van een probleem in een wiskundige bewerking, die met een computer kan worden uitgevoerd
- het wiskundig *gezien begrijpen* wat deze bewerking inhoudt en
- het kunnen *interpreteren* en *evalueren* van de antwoorden die de computer geeft.

41

## Evalueren van antwoorden

- Globaal rekenen
  - Netwerken van getalrelaties,
  - Eigenschappen
  - Generaliseren van rekenen → algebra

42

### Globaal Rekenen

- $4 \times 27$
- ruim  $4 \times 25 = 100$
- minder is dan  $4 \times 30 = 120$
- twee keer  $54 = 108$
- Getalrelaties: bijvoorbeeld veelvouden van 25, 75, 125 en dergelijke en het kunnen relateren van deze getallen aan kommagetallen, breuken en procenten.
- Kunnen bedenken dat  $4 \times 1,25 = 5$ , omdat  $4 \times 25 = 100$  en dus  $4 \times 125 = 500$ , of, omdat  $4 \times 1,25$  gelijk is aan  $4 \times 1\frac{1}{4}$ .

43

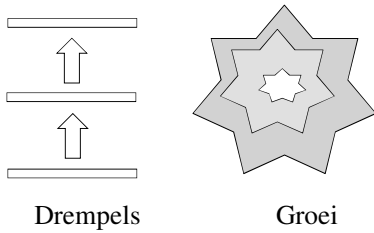
### Netwerken van getalrelaties t.b.v. globaal rekenen

Voorbeelden

- getalrelaties, waarvan 25 de spil vormt:
  - veelvouden van 25 en van 125,
  - relaties met  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{4}$  en  $\frac{1}{8}$ .
  - gecombineerd met machten van 10
- getalrelaties rond 24
  - vermenigvuldigingen die 24 als uitkomst hebben
  - zoals  $3 \times 8$ ,  $4 \times 6$ ,  $2 \times 12$  en  $8 \times 3$ ,  $6 \times 4$ ,  $12 \times 2$ , en ook  $2 \times 3 \times 4 = 24$  en  $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24$
  - veelvouden van 12.

44

### Organische groei ipv drempels



45

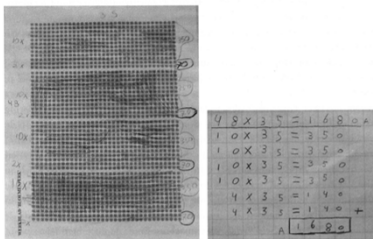
### Eigenschapsrekenen

- Rekeneigenschappen :
  - weten dat je de getallen bij optellen en vermenigvuldigen mag omwisselen en bij aftrekken en delen niet
  - Bijv.  $25 \times 4 = 4 \times 25$
  - weten dat je  $81 + 37 + 19$  kunt uitrekenen als  $(81+19) + 37$
  - weten dat  $22 \times 15 = 20 \times 15 + 2 \times 15$
  - enz.

46

### Kees Buijs

- Rechthoeksmodel ontwikkelen



47

### Eigenschapsrekenen: conceptuele wiskunde → doorgaande leerlijn

- Van rechthoekspatronen (dubbel distributief) via naar merkwaardige producten
- $(x+p)(x+q) = x(x+q) + p(x+q) = x \cdot x + x \cdot p + p \cdot x + p \cdot q$

	x	p
x	$x^2$	xp
q	qx	pq

48



### Conceptuele wiskunde

- Phil Daro
- Amerikaanse leraren vragen zich af: “Hoe kan ik mijn leerlingen leren deze opgaven goed te maken?”
- Aziatische leraren vragen zich af: “Om welke wiskunde zit er achter?”

49

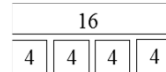
### Conceptuele wiskunde

Onderzoek Geeke Bruin-Muurling (breuken):  
In PO getalspecifieke oplossingsmethoden

- $16 \times \frac{3}{4} \Leftrightarrow 16$  pakjes room van  $\frac{3}{4}$  liter
  - Herhaald optellen  $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \dots$



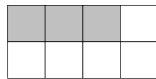
- $\frac{3}{4} \times 16 \Leftrightarrow$  “ $\frac{3}{4}$  deel van 16”
  - $16:4=4; 3 \times 4=12$



- Via oppervlakte
- Gemengde getallen

50

- VO; Dezelfde plaatjes  $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$



$$\text{breuk} \times \text{breuk} = \frac{\text{teller} \times \text{teller}}{\text{noemer} \times \text{noemer}}$$

- Vijf verschillende procedures
- Algemene regel ligt op het niveau van onbenoemde getallen (rationale getallen) → noodzaak overgang naar onbenoemde getallen

51

### Van benoemde naar onbenoemde getallen

- Van Hiele: getallen als knooppunten in een relatienet:
  - $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
  - $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$
  - $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$
  - $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$
  - $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = 1 \frac{1}{2}$
  - $3 : 4 = \frac{3}{4}$
  - $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{12}{16}$
  - $\frac{3}{4}$  van 100 is 75 etc.

52

### Vergelijk aanvankelijk rekenen

“Hoeveel is 4+4?”

- Getallen nog gekoppeld aan tellen; telbare objecten: “vier knikkers”
- Hoger niveau: knooppunt van getalrelaties  
 $4 = 2+2 = 3+1 = 5-1 = 8:2$
- Getal is een ding geworden; onbenoemde getallen

53

### Conceptuele wiskunde

- Van getalspecifieke oplossingen naar een algemene regel; activiteiten als:
  - Beredeneren waarom 16 keer  $\frac{3}{4}$  optellen ( $16 \times \frac{3}{4}$ ) op hetzelfde neerkomt als 3 keer  $\frac{1}{4}$  deel van 16 =  $\frac{3}{4} \times 16$
- Ontwikkelen van relaties tussen relaties:
  - $5 \times \frac{3}{4} = 5 \times 3 : 4$
  - $\frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$
  - uit  $6:2 = 3$  volgt dat  $6/3 = 2$

54

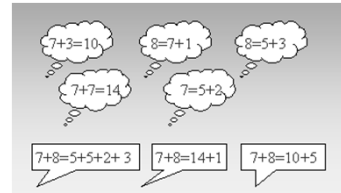
## Leren cijferen dient andere doelen

- Cijferen biedt efficiënte, effectieve, rekenmethoden
- Maar:
  - Bereidt niet voor op wiskunde VO
  - Leren cijferen leidt niet tot het ontwikkelen van netwerken van getalrelaties
  - Leren cijferen leidt niet tot inzicht in rekeneigenschappen

55

## Handig rekenen

- Geen verzameling van regeltjes
- Gebruiken van getalrelaties en rekeneigenschappen



56

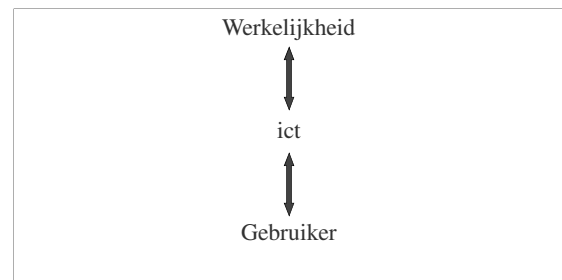
## Mensen worden wiskundeconsumenten

Levy en Murnane (2006)

De wiskunde is verborgen in volledig geïntegreerde systemen, zoals spreadsheets, automatische kassa's, en geautomatiseerde productie lijnen, en de mensen die deze systemen gebruiken moeten beslissingen nemen op basis van de output van verborgen wiskundige berekeningen.

57

## Computer als interface



58

## Computer als interface

- Fenomenen uit de werkelijkheid moeten worden gekwantificeerd  $\Leftrightarrow$  meten (breed), onzekerheid (statistiek)
- Numerieke gegevens worden gecombineerd en bewerkt met behulp van dynamische modellen van samenhangende variabelen
- De resultaten worden gepresenteerd op computerschermen of prints, in de vorm van tabellen en grafieken

59

## Statistiek

- Variatie in meetresultaten; nauwkeurigheid; “natuurlijke” variatie
- Steekproeven, gemiddelden, trends
- Onzekerheid & voorspelbaarheid

60

## Modellen en variabelen

- Model van de werkelijkheid
- Samenhangen (covariantie)/ dynamisch interpreteren van verbanden
- Nadenken over samenhangen tussen variabelen  $\Leftrightarrow$  meetwaarden opvatten als waarden op een variabele
  - Bijv. Samenhang tussen lengte en gewicht  $\Leftrightarrow$  lengte en gewicht als variabelen
  - ≠ “lengte en gewicht van Piet”, “van Jan”, ...

61

## Redeneren met grafische representaties

- Maken of uitvinden van grafieken
- Interpreteren van en redeneren met grafieken
- Grafiekbegrip funderen in concrete realiteit
- Gevaar van ‘pseudo-mathematics’
  - Niet alleen kijken naar de trend — stijgend of dalend — maar ook specificeren van de grootte van de samenhang



62

## Afsluiting

### Rekenen-wiskunde in de 21<sup>st.</sup> century

63

## Rekenen-wiskunde in de 21<sup>st.</sup> century

Aandachtpunten bij het realiseren van probleem-georiënteerd reken-wiskundeonderwijs

- Didactisch contract/social norms
- Taak-motivatie vs ego motivatie
- Cultiveren van wiskundige interesse

64

## Rekenen-wiskunde in de 21<sup>st.</sup> century

Aard van de reken-wiskundige kennis

- Globaal rekenen
- Verschuiving naar conceptuele wiskunde
  - Generaliseren van rekenen als voorbereiding op algebra
  - Vorming van getallen als wiskundige objecten
  - “Big Ideas”
- Gebruik van computer tools en simulaties

65

## Rekenen-wiskunde in de 21<sup>st.</sup> century

Leerstofaccenten:

- Globaal rekenen
  - Netwerken van getalrelaties
  - Eigenschapsrekenen
  - Van Hiele niveaus; basis voor algebra
- Meten: kwantificeren, meetgetallen
- Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek
- Modellen; functies & variabelen
- Meetkunde (3D)
- Grafieken

66

website  
[www.rekenenwiskunde21.nl](http://www.rekenenwiskunde21.nl)

emailadres onderwijs2032  
[onderwijs2032@minocw.nl](mailto:onderwijs2032@minocw.nl)

67