



Corruptio optimi pessima: Practicing skills by using and investigating mathematical patterns

www.Mathe2000.de

New syllabus Northrhine-Westphalia 1985 ("Winter syllabus")

1. Inquiry-based learning as the leading principle
2. Content objectives **and** general mathematical objectives (mathematizing, exploring, reasoning, communicating)
3. Orientation towards applications **and** mathematical structures

Addtional decisions made in Mathe 2000:

–Emphasis on practicing skills

Adolph Diesterweg: „What counts is not learning but practicing (skills).“

O.F. Bollnow: Vom Geist des Übens. Freiburg: Herder 1978

Latin wisdom: Repetitio est mater studiorum

– Communicating with teachers via elaborated substantial learning environments that „speak“ to teachers

Main publication:

Handbuch produktiver Rechenübungen 1990/1992
(Handbook for Practicing Skills)

Five guiding principles of Mathe 2000:

1. Emphasis on fundamental mathematical ideas that can be developed along the grades and emphasis on mathematical processes
2. Inquiry- based and social learning
3. Differentiated view of practicing skills
4. Attention to the whole spectrum of students (natural differentiation)
5. Systemic assessment

Five guiding principles of Mathe 2000:

1. Emphasis on fundamental mathematical ideas that can be developed along the grades and emphasis on mathematical processes
2. Inquiry- based and social learning
- 3. Differentiated view of practicing skills**
4. Attention to the whole spectrum of students (natural differentiation)
5. Systemic assessment

Distinction between three types of practice

1. Introductory practice
2. Practice for automatisation
3. Productive Practice

Example 1: The multiplication table

Mathematical foundation:

Commutative law of multiplication: $a \cdot b = b \cdot a$

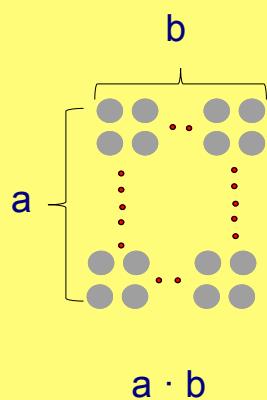
Associative law of multiplication: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Distributive law: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$$

Appropriate representation for the primary level :

Rectangular patterns of dots (Freudenthal, Winter)



Operative proofs of the laws
(based on the principle of invariance)

$$4 + 4 + 4$$

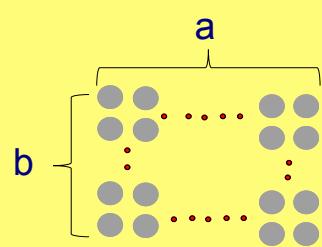
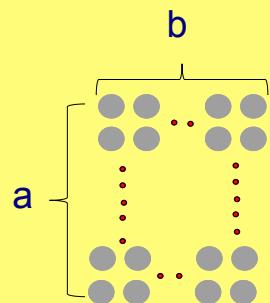
$3 \cdot 4$



$$3 + 3 + 3 + 3$$

$4 \cdot 3$

Commutative law

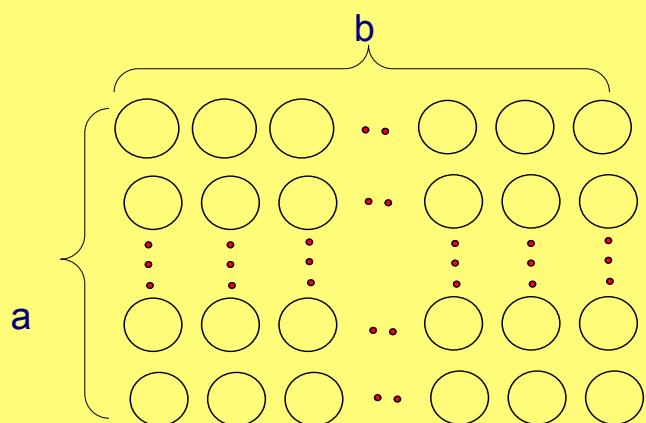


$$a \cdot b$$

=

$$b \cdot a$$

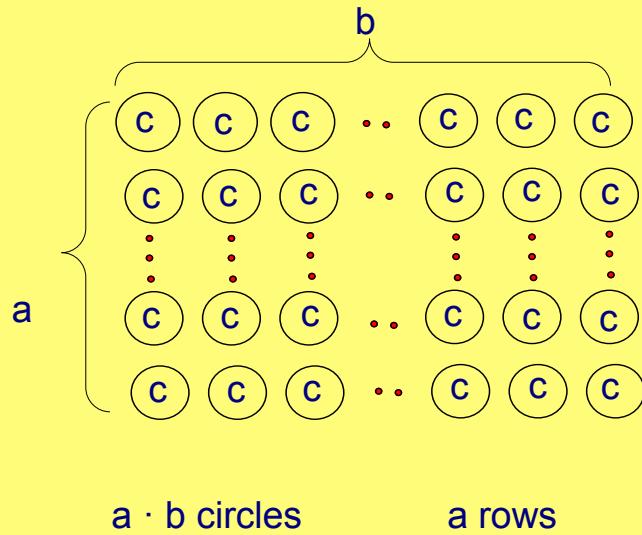
Associative law



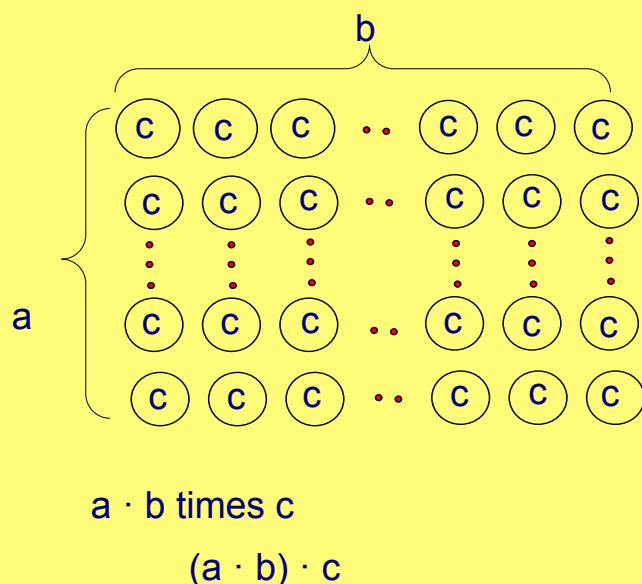
$a \cdot b$ circles

a rows

Associative law



Associative law



Associative law

$$\begin{array}{ccccc} & & b & & \\ & \left\{ \begin{array}{ccccccc} c & c & c & \dots & c & c & c \\ c & c & c & \dots & c & c & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c & c & c & \dots & c & c & c \\ c & c & c & \dots & c & c & c \end{array} \right\} & & \left\{ \begin{array}{ccccccc} & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & \end{array} \right\} & & \\ a & & & & & & \\ \end{array}$$

$a \cdot b \text{ times } c \quad a \text{ times } b \cdot c$

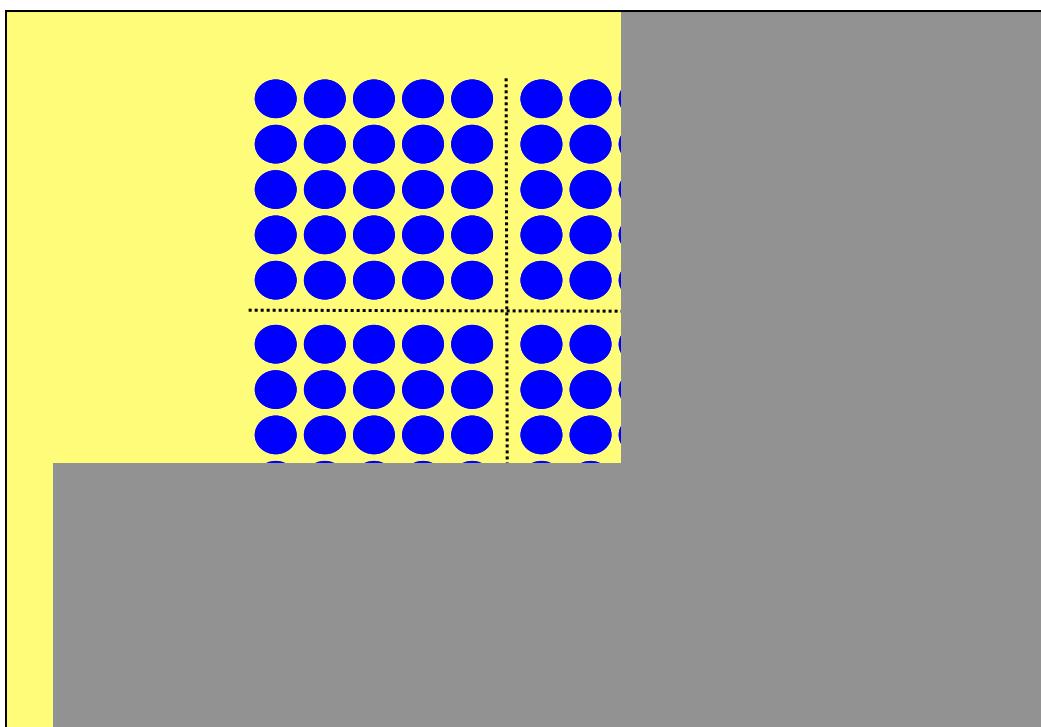
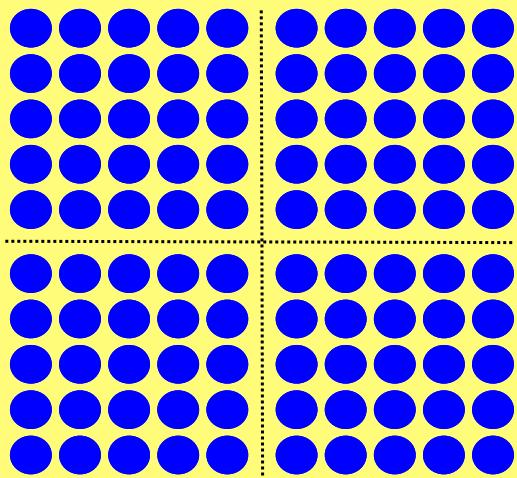
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

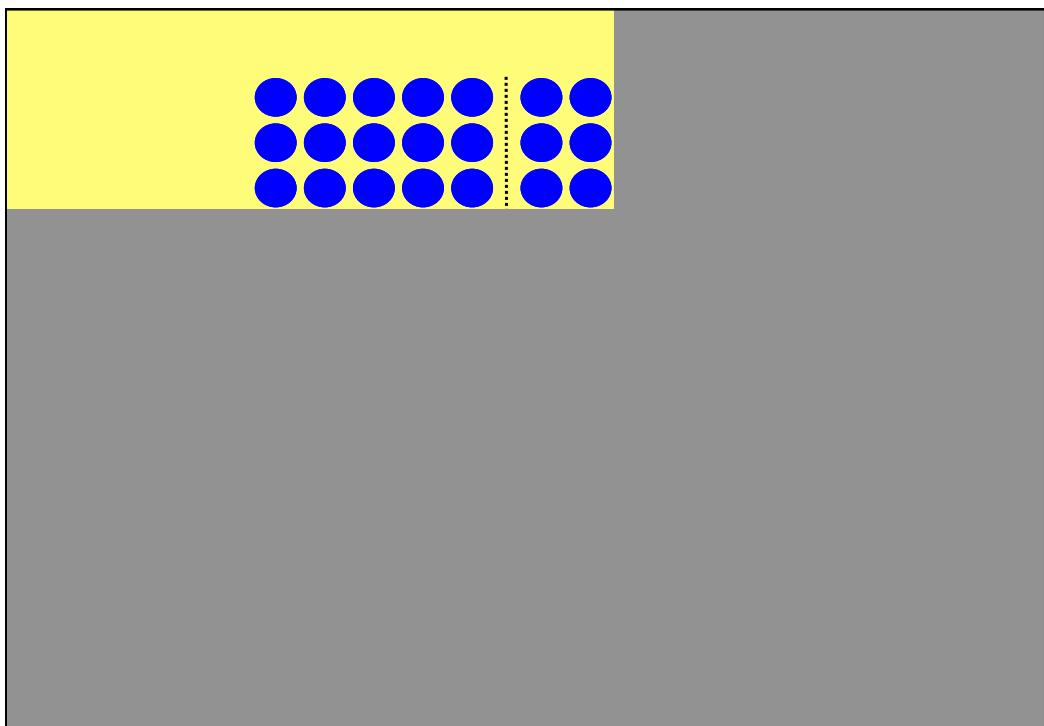
Distributive law

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \dots & \dots \\ \hline \end{array}$$
$$7 \cdot 9 = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 4$$

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \end{array}$$
$$7 \cdot 9 = 5 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 3$$

Basic teaching aid: Hundred field with movable cardboard (H. Winter)





**Multiplication table:
Introductory practice**

Malaufgaben in der Umwelt

1 Schreibe die Aufgaben immer auf drei Arten auf.

a)
 1.a) $4 + 4 + 4$
 3 mal 4
 3 · 4

b)

c) d) e)

2 Lege die Malaufgaben von 1 mit Plättchen nach. Male in dein Heft.

2.a) 2.b) 2.c)

3 Suche selbst Malaufgaben in der Umwelt.

66 Zu den verschiedenen Situationen Malaufgaben suchen und aufschreiben. Kreativschreiber mit Punkt für Malaufgaben einführen und besprechen. 2 Malaufgaben mit Plättchen legen und aufmachen. 3 Weitere Malaufgaben in der Umwelt suchen. → Arbeitsheft, Seite 35

Malaufgaben in der Umwelt

1 Schreibe die Aufgaben immer auf drei Arten auf.

a)
 1.a) $4 + 4 + 4$
 3 mal 4
 3 · 4

b)

c) d) e)

2 Lege die Malaufgaben von 1 mit Plättchen nach. Male in dein Heft.

2.a) 2.b) 2.c)

3 Suche selbst Malaufgaben in der Umwelt.

66 Zu den verschiedenen Situationen Malaufgaben suchen und aufschreiben. Kreativschreiber mit Punkt für Malaufgaben einführen und besprechen. 2 Malaufgaben mit Plättchen legen und aufmachen. 3 Weitere Malaufgaben in der Umwelt suchen. → Arbeitsheft, Seite 35

Malaufgaben am Hunderterfeld legen

Am Hunderterfeld lassen sich alle 100 Malaufgaben von 1·1 bis 10·10 legen.

1 Lege am Hunderterfeld mit dem Winkel nach. Schreibe als Plus- und als Malaufgabe.

a) b) c) d) e) f) g) h)

1.a) $9 + 9$ 1.b) $8 + 8 + 8$
 2 · 9 3 · 8

2 Zeige mit dem Malwinkel am Hunderterfeld.

a) $5 \cdot 3$ b) $6 \cdot 7$ c) $4 \cdot 10$ d) $4 \cdot 4$ e) $7 \cdot 8$
 3 · 5 7 · 6 10 · 4 9 · 9 8 · 7

3 Zeige der Reihe nach mit dem Malwinkel: $3 \cdot 5$, $4 \cdot 5$, $4 \cdot 6$, $5 \cdot 7$, $5 \cdot 8$ und $6 \cdot 10$.

67 1, 2 Malaufgaben mit Hilfe des Malwinkels am Hunderterfeld legen. Neben horizontaler Legen auch vertikale Legen der gleichen Summenwerte zulassen. 3 Malwinkel am Hunderterfeld verschieben. → Verstehen und Trainieren 2, Seiten 24, 25

Rechenwege bei Malaufgaben

1 Wie rechnet ihr $8 \cdot 7$ oder $7 \cdot 8$?



Marie rechnet:
 $35 + 21$

Luis rechnet:
 $40 + 16$



Lukas rechnet:
 $25 + 10 + 15 + 6$

Ahmet rechnet:
 $25 + 15 + 10 + 6$

Wie rechnen die Kinder? Welche einfachen Aufgaben benutzen sie?
Vergleicht mit euren Rechenwegen.

2 Wie rechnest du? Vergleiche die Aufgaben und die Felder.

a) $4 + 7$ b) $9 - 6$ c) $6 \cdot 9$





3 Zeigt mit dem Malwinkel und rechne.

$5 \cdot 9$	$8 \cdot 6$	$9 \cdot 2$	$10 \cdot 4$
$9 \cdot 5$	$6 \cdot 8$	$2 \cdot 9$	$4 \cdot 10$

! Tauschaufgaben haben immer das gleiche Ergebnis.

4 Würum haben Tauschaufgaben immer das gleiche Ergebnis? Erkläre.

5 Rechne immer die Aufgabe oder die Tauschaufgabe.

$3 \cdot 6$	$8 \cdot 4$	$7 \cdot 6$	$5 \cdot 8$	$9 \cdot 4$	$8 \cdot 3$	$6 \cdot 4$	$7 \cdot 9$
-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

6 Lege selbst Aufgaben mit dem Malwinkel und berechne das Ergebnis.

Einfache Malaufgaben

1 2 mal und mal 2 sind Verdopplungsaufgaben.



$2 \cdot 9 = 18$

$9 \cdot 2 = 18$

Zeige und rechne ebenso.

a) $2 \cdot 5$ b) $10 \cdot 2$
 $5 \cdot 2$ $2 \cdot 10$

! Bei 10 mal und mal 10 werden aus Einern Zehner.



$10 \cdot 7 = 70$

$7 \cdot 10 = 70$

Zeige und rechne ebenso.

a) $10 \cdot 4$ b) $2 \cdot 10$
 $4 \cdot 10$ $10 \cdot 2$

1 5 mal ist die Hälfte von 10 mal, mal 5 ist die Hälfte von mal 10.



$10 \cdot 6 = 60$

$5 \cdot 12 = 60$

Zeige und rechne ebenso.

a) $10 \cdot 8$ b) $6 \cdot 10$
 $5 \cdot 8$ $6 \cdot 5$

! Berechne die Kernaufgaben.

$1 \cdot 2$	$1 \cdot 3$	$1 \cdot 4$	$1 \cdot 5$	$1 \cdot 6$	$1 \cdot 7$	$1 \cdot 8$	$1 \cdot 9$
$2 \cdot 2$	$2 \cdot 3$	$2 \cdot 4$	$2 \cdot 5$	$2 \cdot 6$	$2 \cdot 7$	$2 \cdot 8$	$2 \cdot 9$
$5 \cdot 2$	$5 \cdot 3$	$5 \cdot 4$	$5 \cdot 5$	$5 \cdot 6$	$5 \cdot 7$	$5 \cdot 8$	$5 \cdot 9$
$10 \cdot 2$	$10 \cdot 3$	$10 \cdot 4$	$10 \cdot 5$	$10 \cdot 6$	$10 \cdot 7$	$10 \cdot 8$	$10 \cdot 9$

! 1 Matzaufgaben mit Addit 2 zeigen und rechnen. 2 Matzaufgaben mit Füllboxen 10 und 5 zeigen und rechnen.

→ Arbeitsblatt, Seite 26 → Verstehen und frönen, S. Seite 26

Multiplication table: Practice for automatisation

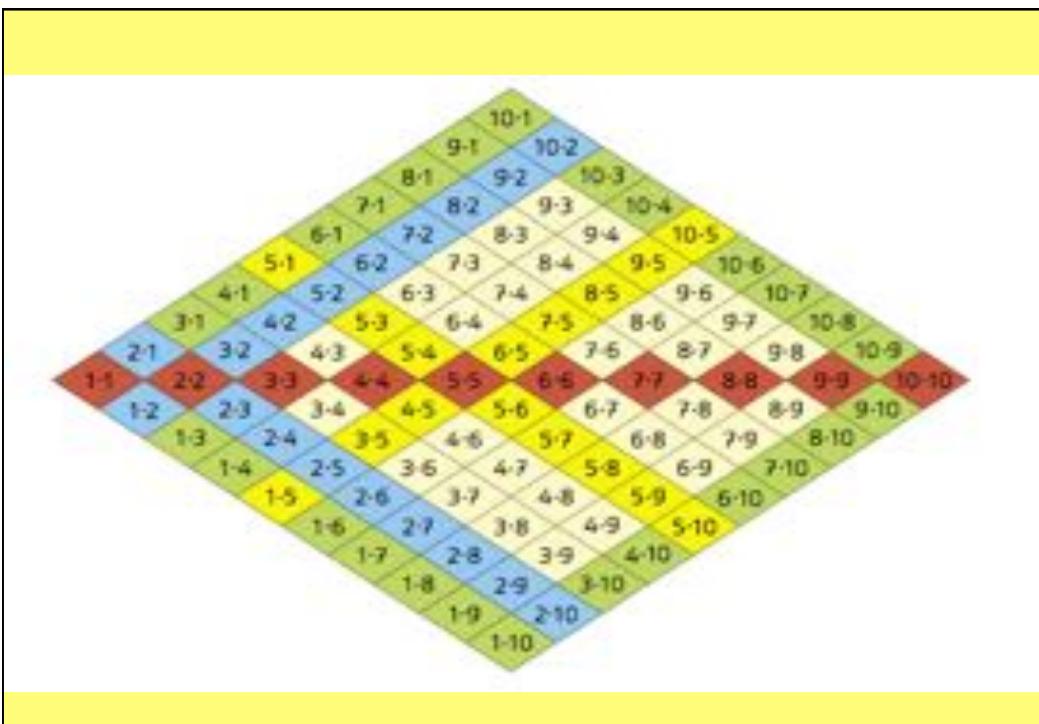
Course „Blitzrechnen“ (bliksem rekenen)

Grade 1	Grade 2	Grade 3	Grade 4
How many?	How many? Which number?	Division table	Showing and naming numbers
Numberline	Counting in steps	Doubling/Halving	Complementing to 1 Million
Power of Five	Complementing to the next full ten	How many?	Dividing powers of 10
Decomposing	Complementing to 100	Counting in steps	Subtracting powers of 10
Complementing to 10/20	Dividing 100	Complementing to 1000	Reading and writing big numbers
Doubling	Doubling/Halving	Dividing 1000	Counting in steps
Addition table	Simple addition tasks	Doubling/Halving	Doubling/Halving
Subtraction table	Simple subtraction tasks	Simple addition and subtraction tasks	Simple addition and subtraction tasks
Halving	Decomposing	times 10/divided by 10	Multiplying powers of 10
Counting in steps /Minimultiplication	Multiplication table	Multiplication and division with tens	Simple multiplication and division tasks

Materials for „Blitzrechnen“:

Card file 1 - 4
CD-ROM 1/2, 3/4
Workbooks 1 - 4

**Multiplication table:
Productive practice**



Zeilen in der Einmaleins-Tafel

1 Wie verändern sich die erste und die zweite Zahl bei den Aufgaben?

1 · 3	2 · 4	3 · 5	4 · 6	5 · 7	6 · 8	7 · 9	8 · 10
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	--------

2 a) Suche die Aufgabenpaare auf der Einmaleins-Tafel.
Wie wurden die Aufgaben gebildet? Beschreibe und setze fort.

2 · 2	3 · 3	4 · 4	5 · 5	6 · 6	7 · 7
1 · 3	2 · 4	3 · 5	4 · 6	5 · 7	6 · 8

b) Rechne aus. Was fällt dir auf? Beschreibe.

c) Verschiebe den Malwinkel am Hunderterfeld immer von der ersten zur zweiten Aufgabe. Wie viele Punkte verlierst du in der untersten Zeile? Wie viele Punkte gewinnst du in der rechten Spalte?

2 · 2	3 · 3
1 · 3	2 · 4

3 Rechne ebenso.

a)

2 · 3	3 · 4	4 · 5	5 · 6	6 · 7	7 · 8
1 · 4	2 · 5	3 · 6	4 · 7	5 · 8	6 · 9

b)

4 · 0	5 · 1	6 · 2	7 · 3	8 · 4	9 · 5
3 · 1	4 · 2	5 · 3	6 · 4	7 · 5	8 · 6

Blitzrechnen: Einmaleins

Malaufgabe zeigen und nennen.
Aufgabe im Kopf rechnen.

■ 1 Gemeinsam an der Einmaleins-Tafel mithilfe bearbeiten. ■ Beginnend des Musters am Punktfolgen geprägt, dann auf die entsprechende Ziffergruppe umstellen. ■ Aufgaben ordnung zu 2 selbstständig bearbeiten. ➔ Arbeitsblatt, Seite 59 ➔ Zur Grundlegungskunde weiterführenden Üben Einmaleins-Tafel (Einmalring) trennen.

Zeilen in der Einmaleins-Tafel

1 Wie verändern sich die erste und die zweite Zahl bei den Aufgaben?

2 a) Suche die Aufgabenpaare auf der Einmaleins-Tafel.
Wie wurden die Aufgaben gebildet? Beschreibe und setze fort.

2 · 2	3 · 3
1 · 3	2 · 4

4 · 4	5 · 5
3 · 5	4 · 6

6 · 6	7 · 7
5 · 7	6 · 8

8 · 8	9 · 9
7 · 9	8 · 10

b) Rechne aus. Was fällt dir auf? Beschreibe.
c) Verschiebe den Malwinkel am Hunderterfeld immer von der ersten zur zweiten Aufgabe.
Wie viele Punkte verlierst du in der untersten Zeile?
Wie viele Punkte gewinnst du in der rechten Spalte?

3 Rechne ebenso.

a) 2 · 3 1 · 4	3 · 4 2 · 5	4 · 5 3 · 6	5 · 6 4 · 7	6 · 7 5 · 8	7 · 8 6 · 9
b) 4 · 0 3 · 1	5 · 1 4 · 2	6 · 2 5 · 3	7 · 3 6 · 4	8 · 4 7 · 5	9 · 5 8 · 6

Blitzrechnen: Einmaleins

101

■ 1. Gemeinsam an der Einmaleins-Tafel nachdrücklich bearbeiten. ■ 2. Begründung des Musters am Punktfeldern gemeinsam erarbeiten (z. notwendigerweise Beispiele für das erste und zweite Aufgabepaar). ■ 3. Aufgaben seindig zu 2 selbstständig bearbeiten. ➔ Arbeitsblatt, Seite 58 ➔ Zur Grundlegung und zum weiteren regelmäßigen Üben Einmaleins-Tafel (Einschlägig) heranziehen.

Zeilen in der Einmaleins-Tafel

1 Wie verändern sich die erste und die zweite Zahl bei den Aufgaben?

2 a) Suche die Aufgabenpaare auf der Einmaleins-Tafel.
Wie wurden die Aufgaben gebildet? Beschreibe und setze fort.

2 · 2	3 · 3
1 · 3	2 · 4

4 · 4	5 · 5
3 · 5	4 · 6

6 · 6	7 · 7
5 · 7	6 · 8

8 · 8	9 · 9
7 · 9	8 · 10

b) Rechne aus. Was fällt dir auf? Beschreibe.
c) Verschiebe den Malwinkel am Hunderterfeld immer von der ersten zur zweiten Aufgabe.
Wie viele Punkte verlierst du in der untersten Zeile?
Wie viele Punkte gewinnst du in der rechten Spalte?

3 Rechne ebenso.

a) 2 · 3 1 · 4	3 · 4 2 · 5	4 · 5 3 · 6	5 · 6 4 · 7	6 · 7 5 · 8	7 · 8 6 · 9
b) 4 · 0 3 · 1	5 · 1 4 · 2	6 · 2 5 · 3	7 · 3 6 · 4	8 · 4 7 · 5	9 · 5 8 · 6

Blitzrechnen: Einmaleins

101

■ 1. Gemeinsam an der Einmaleins-Tafel nachdrücklich bearbeiten. ■ 2. Begründung des Musters am Punktfeldern gemeinsam erarbeiten (z. notwendigerweise Beispiele für das erste und zweite Aufgabepaar). ■ 3. Aufgaben seindig zu 2 selbstständig bearbeiten. ➔ Arbeitsblatt, Seite 58 ➔ Zur Grundlegung und zum weiteren regelmäßigen Üben Einmaleins-Tafel (Einschlägig) heranziehen.

Spalten in der Einmaleins-Tafel

1 Wie verändern sich in den Spalten der Einmaleins-Tafel die Aufgaben von oben nach unten? Beschreibe.

2 a) Suche die Aufgabepaare auf der Einmaleins-Tafel. Beschreibe und setze fort.

8 · 1	7 · 2	6 · 3	5 · 4	4 · 5
9 · 2	8 · 3	7 · 4	6 · 5	5 · 6

b) Rechne aus. Was füllt dir auf? Beschreibe.

c) Zeige die Aufgaben jedes Paars am Hunderterfeld. Verschiebe den Molwinkel am Hunderterfeld immer von der ersten zur zweiten Aufgabe. Wie viele Punkte kommen jeweils hinzu?

1 Rechne ebenso. Setze fort.

a)

9 · 1 10 · 2	8 · 2 9 · 3	7 · 3 8 · 4	6 · 4 7 · 5	5 · 5 6 · 6	4 · 6 5 · 7
-----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

b)

9 · 2 10 · 3	8 · 3 9 · 4	7 · 4 8 · 5	6 · 5 7 · 6	5 · 6 6 · 7	4 · 7 5 · 8
-----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

c)

9 · 3 10 · 4	8 · 4 9 · 5	7 · 5 8 · 6	6 · 6 7 · 7	5 · 7 6 · 8	4 · 8 5 · 9
-----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

d)

7 · 1 9 · 3	6 · 2 8 · 4	5 · 3 7 · 5	4 · 4 6 · 6	3 · 5 5 · 7	2 · 6 4 · 8
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

■ Gemeinsam an den Einmaleins-Tafeln arbeiten. **■** Begründung des Mustens in Punktformen gemeinsam erarbeiten, Notizen schreiben. **■** Aufgaben direkt zu Selbststestung bearbeiten. **■** Rechnen und kombinieren, Zahlen 10-21

Spalten in der Einmaleins-Tafel							
1 Wie verändern sich in den Spalten der Einmaleins-Tafel die Aufgaben von oben nach unten? Beschreibe.							
2 a) Suche die Aufgabepaare auf der Einmaleins-Tafel. Beschreibe und setze fort.							
b) Rechne aus. Was fällt dir auf? Beschreibe.							
c) Zeige die Aufgabepaare am Hunderterfeld. Verschiebe den Molzwinkel am Hunderterfeld immer von der ersten zur zweiten Aufgabe. Wie viele Punkte kommen jeweils hinzu?							
d) Rechne ebenso. Setze fort.							
e) Generiere an der Einmaleins-Tafel möglichst viele Paare. Begründung: das Motiv ist Punktbaumsymmetrisch erster Ordnung zu horizontaler Belegung.							
f) Aufgaben sind zu selbstständig bearbeiten. → Rechnen und Kontrollieren; Seiten 10-12							

Spalten in der Einmaleins-Tafel

1 Wie verändern sich in den Spalten der Einmaleins-Tafel die Aufgaben von oben nach unten? Beschreibe.

2 a) Suche die Aufgabenpaare auf der Einmaleins-Tafel. Beschreibe und setze fort.

8 · 1	9 · 2
8 · 2	9 · 3

b) Rechne aus. Was füllt dir auf? Beschreibe.

c) Zeige die Aufgabenpaare am Hunderterfeld. Verschiebe den Molwinkel am Hunderterfeld immer von der ersten zur zweiten Aufgabe. Wie viele Punkte kommen jeweils hinzu?

3 Rechne ebenso. Setze fort.

a)

9 · 1 10 · 2	8 · 2 9 · 3	7 · 3 8 · 4	6 · 4 7 · 5	5 · 5 6 · 6	4 · 6 5 · 7
-----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

b)

9 · 2 10 · 3	8 · 3 9 · 4	7 · 4 8 · 5	6 · 5 7 · 6	5 · 6 6 · 7	4 · 7 5 · 8
-----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

c)

9 · 3 10 · 4	8 · 4 9 · 5	7 · 5 8 · 6	6 · 6 7 · 7	5 · 7 6 · 8	4 · 8 5 · 9
-----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

d)

7 · 1 9 · 3	6 · 2 8 · 4	5 · 3 7 · 5	4 · 4 6 · 6	3 · 5 5 · 7	2 · 6 4 · 8
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------

102

* 1 Gemeinsam an der Einmaleins-Tafel möglichst leichter herankommen. 2 Begründung des Motivs an Pausenhäusern. Gemeinsam erarbeitet ist „heute ist eins Beispiel“. 3 Aufgaben-Modell zu Reihenfolge schreiben. 4 Rechnen und Kombinieren L Sätze 18–21

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 1 = 8 \\ 9 \cdot 2 = 18 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \cdot 2 = 14 \\ 8 \cdot 3 = 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \cdot 3 = 18 \\ 7 \cdot 4 = 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 5 \cdot 4 = 20 \\ 6 \cdot 5 = 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 5 = 20 \\ 5 \cdot 6 = 30 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \cdot 6 = 18 \\ 4 \cdot 7 = 28 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \cdot 7 = 14 \\ 3 \cdot 8 = 24 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1 \cdot 8 = 8 \\ 2 \cdot 9 = 18 \end{array}$$

Zahntabellen

Mensch

3	2	1	2	2	1	2	3
3	2	1	2	2	1	2	3

Schneidezähne
Eckzähne
vordere Backenzähne
hintere Backenzähne

1 Der erwachsene Mensch hat 32 Zähne. Erkläre die Rechnung. Vergleiche mit der Zahntabelle.

1)	oben	2 ·	8 = 16
	unten	2 ·	8 = 16
zusammen, $16 + 16 = 32$			

2 Viele Tiere haben ein ähnliches Gebiss wie der Mensch. Wie viele Zähne haben diese Tiere?

a) Elefant

3	3	0	1	1	0	3	3
3	3	0	0	0	0	3	3

2	0	2 ·	7 = 14
	2 ·	6 = 12	
$14 + 12 = 26$			

b) Tiger

1	3	1	3	1	3	1	1
1	2	1	3	1	2	1	1

c) Hund

2	4	1	3	1	4	2
3	4	1	3	1	4	3

d) Hausrind

3	3	0	0	0	0	3	3
3	3	1	3	1	3	3	3

e) Pferd

3	3	1	3	1	3	3
3	3	1	3	1	3	3

3 Vergleiche die Zahntabellen. Worum haben die Tiere so unterschiedliche Gebisse? Überlege, was die Tiere fressen.

■ 1+8 Struktur der Zahntabellen (oben = unten, links = rechts) eindeutig. Anzahl der Zähne auf unten verschiedenen Wegen bestimmen und Seiten vergleichen.

109

Productive practice in a real setting
(tooth formulae of mammals)

Example 2: Buildings with cubes (IOWO 1976)

Mit Würfeln bauen

- 1** a) Die Baupläne zeigen, wie die Würfel angeordnet sind.
Erkläre.



- b) Bestimme jeweils die Anzahl der Würfel. Vergleiche mit dem Bauplan.

- 2** Die Kinder haben nach diesen Plänen gebaut. Immer zwei Kinder haben den gleichen Plan verwendet. Ordne zu.



- 3**

- Die Kinder haben ein Gebäude betrachtet und Baupläne gezeichnet. Ein Plan ist falsch. Zeichne die Pläne, schneide sie aus und finde durch Drehen den Fehler.

- 4** Bau mit 6 Würfeln auf dem Grundriss. Es gibt 6 verschiedene Baupläne. Zeichne sie.

- 5**

- Bau selbst Gebäude und zeichne dazu Baupläne.

- 6**

- Bestimme Gebäude-Blöcke! Begründen, dass ein Blöckchen nur die Bestimmung der Gebäudeteile zuläßt, nicht aber die Lage und Ausrichtung des Gebäudes im Raum festlegt. ▲ Verschiedene Zeilegruppen der 6 geometrischen unterscheiden. ▶ Arbeitsblatt, Seite 44.

Mit Würfeln bauen

- 6** a) Besteue die Gebäude nach diesen Plänen. Zeige durch Drehen, welche gleich sind.



- b) Zeichne die Baupläne, schneide sie aus. Zeige durch Drehen, welche gleich sind.

- c) Besteue die Gebäude nach diesen Plänen und stelle sie nebeneinander.

- d) Betreue jedes Gebäude im Spiegel. Was füllt dir auf?

- e) Betreue jeden Bauplan im Spiegel. Was füllt dir auf?

- f) Vergleiche die beiden Gebäude mit deiner rechten und linken Hand. Denke dir den Dreieckturm als Daumen. Was füllt dir auf?



- 7** Welche Baupläne liefern das gleiche Gebäude?



Forschen und Finden

- 8** Bau auf dem Grundriss mit 5 Würfeln. Es gibt 6 verschiedene Baupläne. Zeichne sie.



- 9** Bau auf dem Grundriss mit 6 Würfeln. Es gibt 10 verschiedene Gebäude. Zeichne die Baupläne.

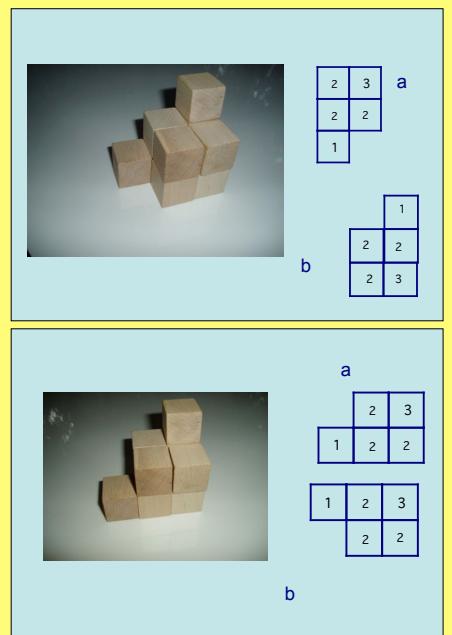


- 10** Finde die Baupläne aller Gebäude, die man mit 1, 2, 3 oder 4 Würfeln bauen kann. Zeichne sie und baut die Gebäude noch. Für alte Gebäude zusammen benötigt ihr genau ?? Würfel. Überlegt zuerst, wie die Grundrisse ausssehen können. Wie viele Baupläne kann man aus jedem Grundriss herstellen?



Practice for automatisation:

Card file „Geometrie im Kopf“
(Mental geometry)



Example 3: Productive practice of long multiplication

647 · 1	647 · 2	647 · 3	647 · 4	647 · 5	647 · 6	647 · 7	647 · 8	647 · 9	647 · 10
647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823	6470

Verschiedene Rechnungen – gleiche Ergebnisse

Forschen und Finden – Vergleichen und Begründen

Die Matriehe der Zahl 647:

647 · 1	647 · 2	647 · 3	647 · 4	647 · 5	647 · 6	647 · 7	647 · 8	647 · 9	647 · 10
647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823	6470

1 Prüfe die Ergebnisse durch fortgesetzte Addition von 647.

647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823	6470
-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------

+ 647 + 647 + 647 + 647 + 647 + 647 + 647 + 647 + 647

2 Mit den Ergebnissen der Matriehe werden immer zwei Aufgaben gebildet. Vergleiche die Ergebnisse der Rechnungen mit den Ergebnissen der Matriehe. Beschreibe, was dir auffällt und versuche es zu begründen.

a) $1294 \cdot 2$ b) $1294 \cdot 4$ c) $1294 \cdot 5$ d) $1294 \cdot 6$ e) $1294 \cdot 8$

$1294 \cdot 2$	$1294 \cdot 4$	$1294 \cdot 5$	$1294 \cdot 6$	$1294 \cdot 8$
$1941 \cdot 2$	$2588 \cdot 2$	$3235 \cdot 2$	$3882 \cdot 2$	$4529 \cdot 2$

f) $1294 \cdot 9$ g) $1294 \cdot 10$

$1294 \cdot 9$	$1294 \cdot 10$
$5176 \cdot 9$	$5823 \cdot 9$

3 Rechne, beschreibe und begründe ebenso.

a) $1941 \cdot 2$ b) $3882 \cdot 4$ c) $1941 \cdot 8$ d) $5823 \cdot 3$ e) $5176 \cdot 8$

$1941 \cdot 2$	$3882 \cdot 4$	$1941 \cdot 8$	$5823 \cdot 3$	$5176 \cdot 8$
$4529 \cdot 2$	$2588 \cdot 4$	$3235 \cdot 8$	$1941 \cdot 3$	$2588 \cdot 8$

4 Rechne immer drei Aufgaben und kontrolliere.

a) $647 \cdot 42$ b) $647 \cdot 56$ c) $647 \cdot 54$ d) $647 \cdot 72$ e) $647 \cdot 63$

$647 \cdot 42$	$647 \cdot 56$	$647 \cdot 54$	$647 \cdot 72$	$647 \cdot 63$
$3882 \cdot 7$	$4529 \cdot 8$	$5823 \cdot 6$	$5176 \cdot 9$	$4529 \cdot 9$
$4529 \cdot 6$	$5176 \cdot 7$	$3882 \cdot 9$	$5823 \cdot 8$	$5176 \cdot 7$

5 Finde mit den Ergebnissen der Matriehe von 647 selbst ähnliche Aufgaben wie in 2.

6 Berechne die Matriehe der Zahl 1 294 und vergleiche die Ergebnisse mit den Ergebnissen der Matriehe von 647. Begründe, was dir auffällt.

7 Wähle selbst eine Zahl und berechne die Ergebnisse der Matriehe. Finde mit den Ergebnissen Matriehe-Aufgaben, die gleiche Ergebnisse haben müssen. Prüfe es durch Rechnung nach.

80 1-2 Gleiche Ergebnisse mit den Ergebnissen der Matriehe begründen (Aussonderungsprinzip der Multiplikation).

Multiples of 647

1294 · 3 1941 · 2

647 · 1	647 · 2	647 · 3	647 · 4	647 · 5	647 · 6	647 · 7	647 · 8	647 · 9	647 · 10
647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823	6470

Verschiedene Rechnungen – gleiche Ergebnisse

Forschen und Finden – Vergleichen und Begründen

Die Matriehe der Zahl 647:

647 · 1	647 · 2	647 · 3	647 · 4	647 · 5	647 · 6	647 · 7	647 · 8	647 · 9	647 · 10
647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823	6470

1 Prüfe die Ergebnisse durch fortgesetzte Addition von 647.

647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823	6470
-----	------	------	------	------	------	------	------	------	------

+ 647 + 647 + 647 + 647 + 647 + 647 + 647 + 647 + 647

2 Mit den Ergebnissen der Matriehe werden immer zwei Aufgaben gebildet. Vergleiche die Ergebnisse der Rechnungen mit den Ergebnissen der Matriehe. Beschreibe, was dir auffällt und versuche es zu begründen.

a) $1294 \cdot 3$ b) $1294 \cdot 4$ c) $1294 \cdot 5$ d) $1294 \cdot 6$ e) $1294 \cdot 8$

$1294 \cdot 3$	$1294 \cdot 4$	$1294 \cdot 5$	$1294 \cdot 6$	$1294 \cdot 8$
$1941 \cdot 2$	$2588 \cdot 2$	$3235 \cdot 2$	$3882 \cdot 2$	$4529 \cdot 2$

f) $1294 \cdot 9$ g) $1294 \cdot 10$

$1294 \cdot 9$	$1294 \cdot 10$
$5176 \cdot 9$	$5823 \cdot 9$

3 Rechne, beschreibe und begründe ebenso.

a) $1941 \cdot 2$ b) $3882 \cdot 4$ c) $1941 \cdot 8$ d) $5823 \cdot 3$ e) $5176 \cdot 8$

$1941 \cdot 2$	$3882 \cdot 4$	$1941 \cdot 8$	$5823 \cdot 3$	$5176 \cdot 8$
$4529 \cdot 2$	$2588 \cdot 4$	$3235 \cdot 8$	$1941 \cdot 3$	$2588 \cdot 8$

4 Rechne immer drei Aufgaben und kontrolliere.

a) $647 \cdot 42$ b) $647 \cdot 56$ c) $647 \cdot 54$ d) $647 \cdot 72$ e) $647 \cdot 63$

$647 \cdot 42$	$647 \cdot 56$	$647 \cdot 54$	$647 \cdot 72$	$647 \cdot 63$
$3882 \cdot 7$	$4529 \cdot 8$	$5823 \cdot 6$	$5176 \cdot 9$	$4529 \cdot 9$
$4529 \cdot 6$	$5176 \cdot 7$	$3882 \cdot 9$	$5823 \cdot 8$	$5176 \cdot 7$

5 Finde mit den Ergebnissen der Matriehe von 647 selbst ähnliche Aufgaben wie in 2.

6 Berechne die Matriehe der Zahl 1 294 und vergleiche die Ergebnisse mit den Ergebnissen der Matriehe von 647. Begründe, was dir auffällt.

7 Wähle selbst eine Zahl und berechne die Ergebnisse der Matriehe. Finde mit den Ergebnissen Matriehe-Aufgaben, die gleiche Ergebnisse haben müssen. Prüfe es durch Rechnung nach.

80 1-2 Gleiche Ergebnisse mit den Ergebnissen der Matriehe begründen (Aussonderungsprinzip der Multiplikation).

Multiples of 647

1294 · 3 1941 · 2
3882

647 · 1	647 · 2	647 · 3	647 · 4	647 · 5	647 · 6	647 · 7	647 · 8	647 · 9	647 · 10
647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823	6470

Verschiedene Rechnungen – gleiche Ergebnisse

Forschen und Finden – Vergleichen und Begründen

Die Matriehe der Zahl 647:

647 · 1	647 · 2	647 · 3	647 · 4	647 · 5	647 · 6	647 · 7	647 · 8	647 · 9	647 · 10
647	1 294	1 941	2 588	3 235	3 882	4 529	5 176	5 823	6 470

Die Matriehe der Zahl 647:

647 · 1	647 · 2	647 · 3	647 · 4	647 · 5	647 · 6	647 · 7	647 · 8	647 · 9	647 · 10
647	1 294	1 941	2 588	3 235	3 882	4 529	5 176	5 823	6 470

1 Prüfe die Ergebnisse durch fortgesetzte Addition von 647.

647	1 294	1 941	2 588	3 235	3 882	4 529	5 176	5 823
+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647

2 Mit den Ergebnissen der Matriehe werden immer zwei Aufgaben gebildet. Vergleiche die Ergebnisse der Rechnungen mit den Ergebnissen der Matriehe. Beschreibe, was dir auffällt und versuche es zu begründen.

a) $\begin{array}{r} 1294 \cdot 2 \\ + 1294 \\ \hline 2588 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 1294 \cdot 4 \\ + 1294 \\ \hline 5176 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 1294 \cdot 5 \\ + 1294 \\ \hline 6470 \end{array}$ d) Tipp zur Begründung für c): $\begin{array}{r} 1294 \cdot 5 \\ + 1294 \\ \hline 6470 \end{array}$

d) $\begin{array}{r} 2 588 \cdot 5 \\ + 2 588 \\ \hline 3 882 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 3 235 \cdot 6 \\ + 3 235 \\ \hline 5 823 \end{array}$

3 Rechne, beschreibe und begründe ebenso:

a) $\begin{array}{r} 1 941 \cdot 2 \\ + 1 941 \\ \hline 3 882 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 1 941 \cdot 4 \\ + 1 941 \\ \hline 7 764 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 1 941 \cdot 8 \\ + 1 941 \\ \hline 15 528 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 5 823 \cdot 3 \\ + 5 823 \\ \hline 17 469 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 5 176 \cdot 4 \\ + 5 176 \\ \hline 20 688 \end{array}$

4 Rechne immer drei Aufgaben und kontrolliere.

a) $\begin{array}{r} 647 \cdot 42 \\ + 3 882 \\ \hline 4 529 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 647 \cdot 56 \\ + 4 529 \\ \hline 5 176 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 647 \cdot 54 \\ + 5 823 \\ \hline 3 882 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 647 \cdot 72 \\ + 5 176 \\ \hline 5 823 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 647 \cdot 63 \\ + 4 529 \\ \hline 5 823 \end{array}$

5 Finde mit den Ergebnissen der Matriehe von 647 selbst ähnliche Aufgaben wie in 3.

6 Berechne die Matriehe der Zahl 1 294 und vergleiche die Ergebnisse mit den Ergebnissen der Matriehe von 647. Begründe, was dir auffällt.

7 Wähle selbst eine Zahl und berechne die Ergebnisse der Matriehe. Finde mit den Ergebnissen Matriehe-Aufgaben, die gleiche Ergebnisse haben müssen. Prüfe es durch Rechnung noch.

80 ■ Tipp: Gleiche Ergebnisse mit den Ergebnissen der Matriehe begründen (Assoziativgesetz der Multiplikation).

Multiples of 647

$$\begin{array}{r} 1294 \cdot 3 \\ + 3882 \\ \hline 1941 \cdot 2 \\ + 3882 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1294 \cdot 5 \\ + 6470 \\ \hline 3235 \cdot 2 \\ + 6470 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1294 \cdot 8 \\ + 10352 \\ \hline 2588 \cdot 4 \\ + 10352 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6470 \\ + 3882 \\ \hline 10352 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5823 \\ + 4529 \\ \hline 10352 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12940 \\ - 2588 \\ \hline 10352 \end{array}$$

Explanation:

$$647 \quad 647 \quad 647 \quad 647 \cdot 3 = 1941$$

$$647 \quad 647 \quad 647$$

$$1941 \cdot 2$$

$$647 \cdot 6$$

$$647 \cdot 2 = 1294$$

Associative law

$$1294 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} 647 \xrightarrow{\cdot 2} \xrightarrow{\cdot 3} \\ 647 \xrightarrow{\cdot 3} \xrightarrow{\cdot 2} \end{array}$$

$$647 \xrightarrow{\cdot 6}$$

647 · 1	647 · 2	647 · 3	647 · 4	647 · 5	647 · 6	647 · 7	647 · 8	647 · 9	647 · 10
647	1294	1941	2588	3235	3882	4529	5176	5823	6470

Verschiedene Rechnungen – gleiche Ergebnisse

Forschen und Finden – Vergleichen und Begründen

Die Matriehe der Zahl 647:

647 · 1	647 · 2	647 · 3	647 · 4	647 · 5	647 · 6	647 · 7	647 · 8	647 · 9	647 · 10
647	1 294	1 941	2 588	3 235	3 882	4 529	5 176	5 823	6 470

Die Matriehe der Zahl 647:

647 · 1	647 · 2	647 · 3	647 · 4	647 · 5	647 · 6	647 · 7	647 · 8	647 · 9	647 · 10
647	1 294	1 941	2 588	3 235	3 882	4 529	5 176	5 823	6 470

1 Prüfe die Ergebnisse durch fortgesetzte Addition von 647.

647	1 294	1 941	2 588	3 235	3 882	4 529	5 176	5 823	6 470
+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647	+ 647

2 Mit den Ergebnissen der Matriehe werden immer zwei Aufgaben gebildet. Vergleiche die Ergebnisse der Rechnungen mit den Ergebnissen der Matriehe. Beschreibe, was dir auffällt und versuche es zu begründen.

a) $\begin{array}{r} 1\ 294 \cdot 2 \\ + 1\ 294 \\ \hline 1\ 941 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 1\ 294 \cdot 4 \\ + 1\ 294 \\ \hline 5\ 176 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 1\ 294 \cdot 5 \\ + 1\ 294 \\ \hline 3\ 882 \end{array}$ d) Tipp zur Begründung für g)

d) $\begin{array}{r} 2\ 588 \cdot 5 \\ + 2\ 588 \\ \hline 3\ 882 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 3\ 235 \cdot 6 \\ + 3\ 235 \\ \hline 5\ 823 \end{array}$

3 Rechne, beschreibe und begründe ebenso.

a) $\begin{array}{r} 1\ 941 \cdot 2 \\ + 1\ 941 \\ \hline 3\ 882 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 1\ 941 \cdot 4 \\ + 1\ 941 \\ \hline 7\ 764 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 1\ 941 \cdot 8 \\ + 1\ 941 \\ \hline 15\ 528 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 5\ 823 \cdot 3 \\ + 5\ 823 \\ \hline 17\ 469 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 5\ 176 \cdot 4 \\ + 5\ 176 \\ \hline 20\ 688 \end{array}$

4 Rechne immer drei Aufgaben und kontrolliere.

a) $\begin{array}{r} 647 \cdot 42 \\ + 647 \\ \hline 3\ 882 \end{array}$ b) $\begin{array}{r} 647 \cdot 56 \\ + 647 \\ \hline 5\ 176 \end{array}$ c) $\begin{array}{r} 647 \cdot 54 \\ + 647 \\ \hline 3\ 882 \end{array}$ d) $\begin{array}{r} 647 \cdot 72 \\ + 647 \\ \hline 5\ 176 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 647 \cdot 63 \\ + 647 \\ \hline 4\ 529 \end{array}$

5 Finde mit den Ergebnissen der Matriehe von 647 selbst ähnliche Aufgaben wie in 2.

6 Berechne die Matriehe der Zahl 1 294 und vergleiche die Ergebnisse mit den Ergebnissen der Matriehe von 647. Begründe, was dir auffällt.

7 Wähle selbst eine Zahl und berechne die Ergebnisse der Matriehe. Finde mit den Ergebnissen Matriehe-Aufgaben, die gleiche Ergebnisse haben müssen. Prüfe es durch Rechnung noch.

80 T-P Gleihe Ergebnisse mit den Ergebnissen der Matriehe begründen (Übersichtsseite der Multiplikation).

$$\frac{4529 \cdot 9}{40761}$$

$$\frac{5176 \cdot 8}{41408}$$

$$\frac{41408}{-40761}$$

$$647$$

Example 4:

Learning environment for practicing long addition:

2 3 4 5 6 7

Choose the digits 2 to 7, make two 3-digit numbers with them and add these numbers.

Biggest result, smallest result?

Is it possible to get round numbers like 700, 800, 900, 1000 as results?

$\begin{array}{r} 246 \\ + 357 \\ \hline 603 \end{array}$	$\begin{array}{r} 642 \\ + 1753 \\ \hline 1395 \end{array}$	$\begin{array}{r} 725 \\ + 1463 \\ \hline 1188 \end{array}$	$\begin{array}{r} 643 \\ + 257 \\ \hline 900 \end{array}$
$\begin{array}{r} 643 \\ + 1572 \\ \hline 1215 \end{array}$	$\begin{array}{r} 634 \\ + 1572 \\ \hline 1206 \end{array}$	$\begin{array}{r} 635 \\ + 1472 \\ \hline 1107 \end{array}$	$\begin{array}{r} 245 \\ + 1763 \\ \hline 1008 \end{array}$
$\begin{array}{r} 465 \\ + 237 \\ \hline 702 \end{array}$	$\begin{array}{r} 564 \\ + 237 \\ \hline 801 \end{array}$	$\begin{array}{r} 543 \\ + 1762 \\ \hline 1305 \end{array}$	$\begin{array}{r} 642 \\ + 357 \\ \hline 999 \end{array}$

Questions:

Why is the result 900 possible while the results 700, 800, 1000, 1100 and 1200 seem impossible?
What is special with the results?

603, 702, 801, 900, 1008, 1107, 1206, 1305

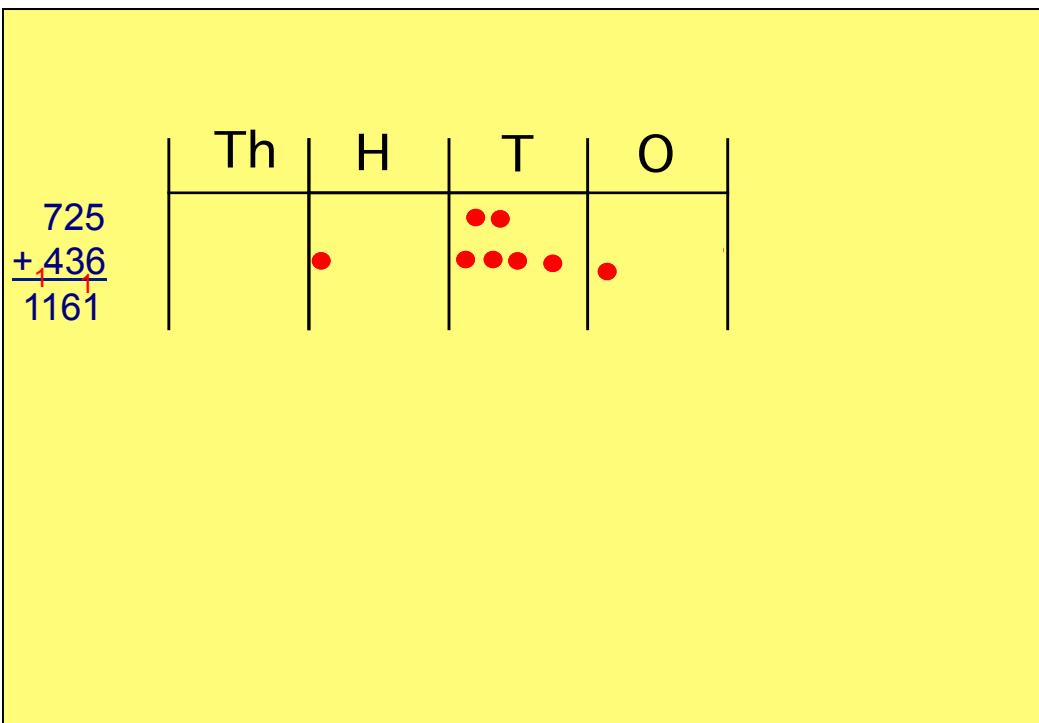
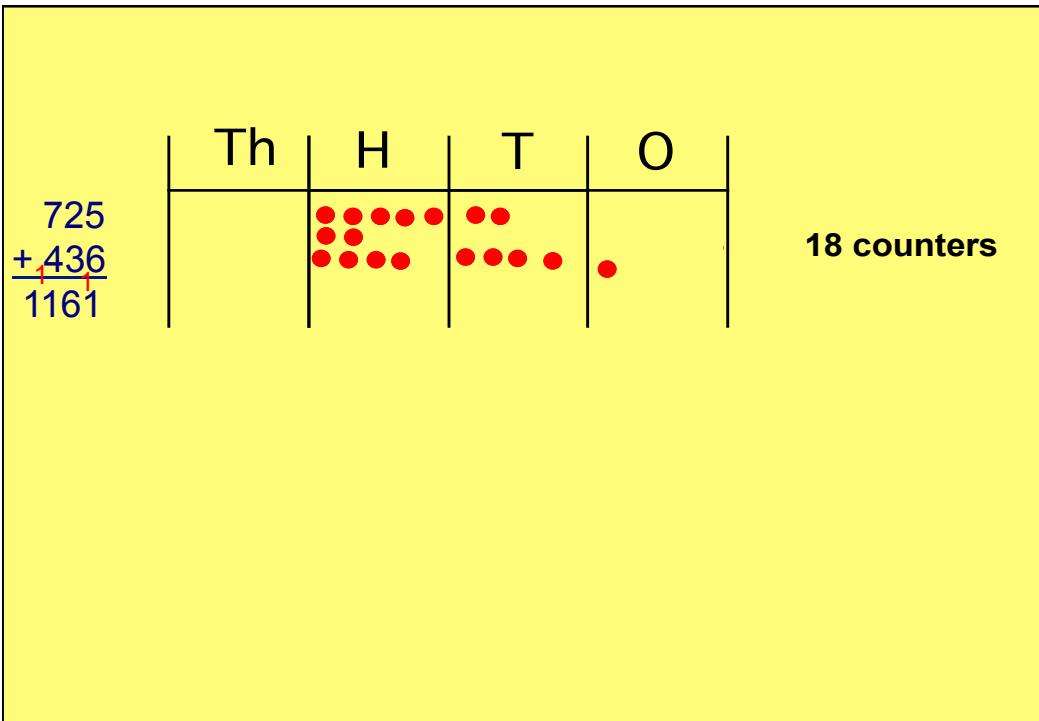
Analysis based on the place value table

Th	H	T	O

	Th	H	T	O	
725					
+ 436					
<u>1161</u>					

14 27 counters
13

	Th	H	T	O	
725					
+ 436					
<u>1161</u>					



	Th	H	T	O	
725	•				
+ 436		•	••	••••	
1161			•		9 counters

$1 + 1 + 6 + 1 = 9$

Theorem:

In an addition task the sum of the digit sum of the numbers that are added differs from the digit sum of the result by a multiple of 9.

As the digit sum is itself a sum the process of „casting out nines“ can be repeated.

Operations with counters prepare the ground for arithmetic and algebra.

Moreover:

Arranging dots and numbers in linear and rectangular patterns is sufficient to cover wide parts of elementary number theory.

(see Müller/Steinbring/Wittmann, Arithmetik als Prozess, chapter 3.4)

Operative proofs with non-symbolic representations prepare the ground for proofs with symbolic representations.

Type of practice	Introductory practice	Practice for automatisation	Productive practice
Teacher's focus	Careful foundation	Insistence on full mastery	Inspiration

Reminder for curriculum developers:

Lack of time is the rock where the fairest educational schemes are wrecked.

A.N. Whitehead, The Aims of Education. New York 1929

wittmann@math.tu-dortmund.de